ПМТФ, № 5, 1971

УДК 539.121.7+539.125.52

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИЗОТРОПНО РАССЕИВАЮЩИХСЯ ЧАСТИЦ В АНИЗОТРОПНЫХ СТРУКТУРАХ

А. С. Долгов

(Харьков)

Изучаются свойства решений одномерного односкоростного уравнения переноса частиц в среде с зависимостью вероятностей элементарных процессов от направления при сферической индикатрисе рассеяния. Показано, что линейный параметр экспоненциального асимптотического ослабления глобальной плотности частиц для среды с ориентационной неоднородностью может весьма сильно отличаться от аналогичной величины, найденной с помощью осреднения вероятностей элементарных процессов по направлениям. Рассматривается роль особенностей структуры ориентационной неоднородности. Приводится обобщение на случай анизотропии рассеяния.

Строгое теоретическое рассмотрение переноса частиц или излучения в некоторой среде требует решения соответствующего кинетического уравнения (см., например,[1, 2]). Наиболее просто оно выглядит при сферической индикатрисе рассеяния, которая реализуется в ряде случаев. При решении кинетических уравнений переноса обычно явно или неявно предполагается, что свойства среды не зависят от направления движения частицы. Если речь идет о сильно анизотропных структурах, какими являются, например, кристаллы или какие-либо дисперсные среды с выраженной ориентацией, то априори ясно, что поведение частицы каким-то образом зависит от направления ее движения. Однако априори нельзя сказать, насколько сильно влияет анизотропия на статистические характеристики процесса переноса. Некоторое освещение обсуждаемая проблема получила в обзорной статье Линдхарда, содержанием которой являются ориентационные эффекты при движении заряженных частиц в кристаллической решетке [3]. Ниже рассматривается одномерная задача о распределении изотропно рассеивающихся частиц в бесконечной среде, когда вероятности процессов рассеяния и поглощения частиц — функции угла между направлением движения частицы и нормалью к плоскости, являющейся изотропным источником частиц. Дается также обобщение на случай анизотропного рассеяния.

Если $f(x, \mu)$ — функция распределения частиц, зависящая от линейной координаты x и от μ — косинуса угла, отсчитываемого от оси x, то кинетическое уравнение, описывающее изменение функции распределения по x, записывается так:

$$\mu \frac{\partial f(x,\mu)}{\partial x} + \Sigma(\mu) f(x,\mu) - \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} \Sigma_s(\mu') f(x,\mu')\, d\mu' = \frac{1}{2}\delta(x) \qquad (1)$$

Здесь $\Sigma - \Sigma_s$ и Σ_s — зависящие от направления макроскопические сечения поглощения и рассеяния соответственно, δ — дельта-функция Дирака. Отметим, что термин «макроскопическое сечение» должен здесь пониматься только как иное название величины, обратной среднему пробегу в данном направлении.

Решение уравнения (1) строится методом, сходным с методами решения задач, в которых сечения не зависят от углов [1, 2]. Обычно интересуются только глобальной плотностью частиц, т. е. величиной

$$\varphi(x) = \int_{-1}^{1} f(x, \mu)\, d\mu \tag{2}$$

Для функции, вычисляемой согласно (2), получается

$$\varphi(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{\Sigma_s d\mu}{\Sigma + i\omega\mu}\right)^{-1} e^{i\omega x} \int_{-1}^{1} \frac{d\mu}{\Sigma + i\omega\mu}\, d\omega \tag{3}$$

Формула (3) дает общее решение задачи для различных зависимостей $\Sigma(\mu)$, $\Sigma_s(\mu)$. Целесообразно рассмотреть некоторые частные случаи, когда соотношение (3) сводится к весьма наглядным выражениям, позволяющим выявить роль анизотропии структуры.

Следует считать, что $\Sigma(\mu)$ и $\Sigma_s(\mu)$ суть четные функции (равноправие направлений «вперед» и «назад») и что $\Sigma_s\Sigma^{-1} = b = \text{const} < 1$ (акты рассеяния и поглощения вызываются одними и теми же центрами).

Пусть

$$\Sigma = a \begin{cases} \Delta^2, & |\mu| < \Delta \\ \mu^2, & |\mu| > \Delta \end{cases} \tag{4}$$

Предполагается, таким образом, что ось x совпадает с «наименее прозрачным» направлением. Численное значение параметра Δ определяет, в каких пределах изменяется величина сечений.

Подставляя (4) в (3), получим

$$\varphi(x) = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left(2 \ln \frac{\Delta a + i\omega}{\Delta a - i\omega} - \ln \frac{a + i\omega}{a - i\omega}\right) \left\{1 - b(1 - \Delta) + \frac{b}{2} \times \right.$$

$$\left. \times \left[\frac{i\omega}{a} \ln \frac{a + i\omega}{a - i\omega} - \left(\frac{i\omega}{a} + \frac{\Delta^2 a}{i\omega}\right) \ln \frac{\Delta a + i\omega}{\Delta a - i\omega}\right]\right\}^{-1} e^{i\omega x} \frac{d\omega}{\omega} \tag{5}$$

Подынтегральная функция в (5) имеет два простых полюса на мнимой оси $\pm i\omega_0$, $\omega_0 < \Delta a$, определяемых из решения трансцендентного уравнения, и четыре точки ветвления $\pm ia$, $\pm i\Delta a$. Точка $\omega = 0$ не является полюсом. Искомый интеграл (5) складывается из вклада от вычета J в полюсе $+i\omega_0$ и интеграла I по контуру, обходящему разрез в верхней полуплоскости, т. е.

$$\varphi(x) = J + I \tag{6}$$

где

$$J = \frac{a}{2b\omega_0} \left\{2 \frac{1 - b(1 - \Delta)}{b} + \frac{\Delta^2 a^2 - \omega_0^2}{a\omega_0} \ln \frac{\Delta a - \omega_0}{\Delta a + \omega_0}\right\} \times$$

$$\times \left\{\frac{1 - b(1 - \Delta)}{b} + \frac{\Delta^2 a}{\omega_0} \ln \frac{\Delta a - \omega_0}{\Delta a + \omega_0} - \frac{\omega_0^2}{a^2 - \omega_0^2} + \frac{\Delta (a^2\Delta^2 + \omega_0^2)}{\Delta^2 a^2 - \omega_0^2}\right\}^{-1} e^{-\omega_0 |x|} \tag{7}$$

$$I = \frac{1}{2} \int_{1}^{\infty} \left\{1 - b(1 - \Delta) - \frac{b}{2}\left(y - \frac{\Delta^2}{y}\right)\left(\ln \frac{y - 1}{y + 1} - \ln \frac{y - \Delta}{y + \Delta}\right)\right\} \times$$

$$\times \left\langle \left\{1 - b(1 - \Delta) - \frac{b}{2}\left[y \ln \frac{y - 1}{y + 1} - \left(y + \frac{\Delta^2}{y}\right) \ln \frac{y - \Delta}{y + \Delta}\right]\right\}^2 + \frac{\pi^2 b^2}{4} \frac{\Delta^4}{y^2} \right\rangle^{-1} \times$$

$$\times e^{-ay|x|} \frac{dy}{y} + \frac{1}{2} \int_{\Delta}^{1} \left\{2 - 2b(1 - \Delta) - \frac{b}{2}\left(y - \frac{\Delta^2}{y}\right) \ln \frac{1 - y}{1 + y}\right\} \times$$

$$\times \left\langle \left\{1 - b(1 - \Delta) - \frac{b}{2}\left[y \ln \frac{1 - y}{1 + y} - \left(y + \frac{\Delta^2}{y}\right) \ln \frac{y - \Delta}{y + \Delta}\right]\right\}^2 + \frac{\pi^2 b^2}{4}\left(y + \frac{\Delta^2}{y}\right)^2 \right\rangle^{-1} \times$$

$$\times e^{-ay|x|} \frac{dy}{y} \tag{8}$$

Формула (7) определяет ту составляющую плотности частиц, которую принято называть асимптотической, так как она определяет поведение $\varphi(x)$ при больших значениях аргумента в силу того, что величина I, определяемая формулой (8), как показывают очевидные оценки, убывает быстрее, нежели J.

Итак, $\varphi(x)$ экспоненциально убывает с удалением от излучающей плоскости с характерным линейным параметром ω_0^{-1}, который, как и в изотропном случае, можно называть диффузионной длиной. Приближенное решение трансцендентного уравнения для ω_0 следующее:

$$\omega_0 \approx \Delta a \sqrt{3(1-b)/b(4-3\Delta)} \tag{9}$$

Формула (9) справедлива, когда $(1-b)/\Delta \ll 1$, т. е. при слабом поглощении. Таким образом, диффузионная длина в направлении «наименьшей прозрачности» очень существенно зависит от степени анизотропии сечений рассеяния и поглощения. Например, при $\Delta = 0.7$ диффузионная длина в области применимости соотношения (9) увеличивается по сравнению с аналогичной величиной для изотропного случая с тем же значением a приблизительно вдвое. Для достаточно малых Δ длина диффузии изменяется как Δ^{-1}.

Интересно сравнить величину эффективного макроскопического сечения ослабления плотности частиц по направлению нормали к излучающей плоскости в асимптотической области ω_0 с аналогичной средней величиной

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3(1-b)}{b}} \int_{-1}^{1} \Sigma(\mu)\, d\mu$$

Имеем

$$\frac{\omega_0}{\omega_1} = \frac{3\Delta}{\sqrt{4-3\Delta}\,(1+3\Delta-\Delta^3)} \tag{10}$$

Из формулы (10) видно, что отношение $\omega_0\omega_1^{-1}$ при изменении Δ меняется в широких пределах. При $\Delta = 1$ это отношение равно единице, как и должно быть, при $\Delta \ll 1$ $\omega_0\omega_1^{-1} \approx {}^3/_2\,\Delta$. Это значит, что в данном случае для малых Δ, т. е. при сильной анизотропии «прозрачности» плотность частиц даже в направлении наименьшей прозрачности убывает много медленнее, чем следовало бы из оценок по осредненным характеристикам.

Пусть теперь

$$\Sigma = a\Delta_i \quad \text{при} \quad \mu_{i+1} < |\mu| < \mu_i \tag{11}$$

Ступенчатую функцию (11) следует рассматривать как естественную аппроксимацию всевозможных зависимостей $\Sigma = \Sigma(\mu)$.

Выполняя интегрирование, находим решение вида (6), где

$$J = -\frac{\omega_0}{ab}\left\{1 - b\sum_i \Delta_i \left(\frac{\mu_i}{\Delta_i^2 - \mu_i^2\omega_0^2/a^2} - \frac{\mu_{i+1}}{\Delta_i^2 - \mu_{i+1}^2\omega_0^2/a^2}\right)\right\}^{-1} e^{-\omega_0|x|} \tag{12}$$

При этом

$$\omega_0^2 \approx 3\,\frac{1-b}{b}\,a^2\left[\sum_i \Delta_i^{-2}(\mu_i^3 - \mu_{i+1}^3)\right]^{-1} \tag{13}$$

Формула (13) законна при слабом поглощении. Ясно, что щель как угодно малой, но конечной ширины с нулевым значением Δ приводит к уменьшению ω_0 до нуля. Это значит, что в асимптотической области с ростом $|x|$ плотность частиц не уменьшается. Из (13) видно также, что глубокие локальные провалы в сечениях приводят к резкому уменьшению ω_0 только тогда, когда $\Delta_i \to 0$ быстрее, чем ширина соответствующего интервала углов $\mu_i - \mu_{i+1}$. Ясно поэтому, что в случае, описываемом формулой (9), $\omega_0 \to 0$ при $\Delta \to 0$, в то время как при распределении сечений по закону

$$\Sigma = a \begin{cases} \Delta^k, & |\mu| < \Delta \\ \mu^k, & |\mu| > \Delta \end{cases} \quad (k < 1) \tag{14}$$

этого не произойдет.

Отметим, что все приведенные выше формулы, также как и соотношения, используемые далее, в соответствующих частных случаях переходят в формулы для изотропной системы ([2] и др.).

Получим теперь решение задачи в случае, когда закон рассеяния анизотропен. В предположении независимости функции распределения от азимута исходное односкоростное кинетическое уравнение запишется так:

$$\mu \frac{\partial f(x, \mu)}{\partial x} + \Sigma(\mu) f(x, \mu) - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{2} g_m P_m(\mu) \int_{-1}^{1} P_m(\mu') \Sigma_s(\mu') f(x, \mu') d\mu' = \frac{1}{2} \delta(x) R(\mu) \tag{15}$$

Распределение рождающихся частиц по направлениям определяется функцией $R(\mu)$. Индикатриса рассеяния несферична, g_m — коэффициенты разложения угловой функции рассеяния по полиномам Лежандра. Следует считать, что

$$g_0 = 1, \quad \int_{-1}^{1} R(\mu) d\mu = 1$$

Уравнению (15) при оговоренных выше условиях удовлетворяет соотношение

$$f(x, \mu) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ R(\mu) + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{2} g_m h_m(\omega) P_m(\mu) \right\} [\Sigma(\mu) + i\omega\mu]^{-1} e^{i\omega x} d\omega \tag{16}$$

где

$$h_m(\omega) = \int_{-1}^{1} \left\{ R(\mu) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} g_n h_n(\omega) P_n(\mu) \right\} [\Sigma + i\omega\mu]^{-1} \Sigma_s(\mu) P_m(\mu) d\mu \tag{17}$$

Формула (17) дает систему алгебраических уравнений для нахождения $h_m(\omega)$, порядок которой определяется наивысшим индексом, для которого $g_m \neq 0$. Если

$$g_1 = g, \quad g_{m>1} = 0$$

то формула (16) приобретает вид

$$f(x, \mu) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(R + \frac{1}{2} h_0 + \frac{3}{2} g h_1 \mu \right) (\Sigma + i\omega\mu)^{-1} e^{i\omega x} d\omega \tag{18}$$

При этом

$$h_0 = D_0 / D, \qquad h_1 = D_1 / D \tag{19}$$

где

$$D = \left(1 - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} V d\mu\right)\left(1 - \frac{3}{2} g \int_{-1}^{1} V\mu^2 d\mu\right) - \frac{3}{4} g \left(\int_{-1}^{1} V\mu d\mu\right)^2$$

$$D_0 = \left(1 - \frac{3}{2} g \int_{-1}^{1} V\mu^2 d\mu\right)\int_{-1}^{1} VR d\mu + \frac{3}{2} g \int_{-1}^{1} V\mu d\mu \int_{-1}^{1} VR\mu d\mu$$

$$D_1 = \left(1 - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} V d\mu\right)\int_{-1}^{1} VR\mu d\mu + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} V\mu d\mu \int_{-1}^{1} VR d\mu \qquad (20)$$

$$V(\mu) = \Sigma_s(\mu)\,[\Sigma(\mu) + i\omega\mu]^{-1}$$

Подстановка (19), (20) в (18) дает пространственно-угловое распределение плотности нейтронов для произвольных зависимостей $R(\mu)$, $\Sigma(\mu)$, $\Sigma_s(\mu)$. Интегрированием соотношения (18) по μ находится пространственное изменение глобальной плотности частиц $\varphi(x)$. Интегрирование по ω требует нахождения полюсов функции

$$\frac{e^{i\omega x}}{D}\int_{-1}^{1}(DR + {}^1/_2 D_0 + {}^3/_2 D_1 g\mu)(\Sigma + i\omega\mu)^{-1} d\mu \qquad (21)$$

Наибольший интерес представляют те полюсы выражения (21), которые определяются уравнением

$$D = 0$$

так как из них наименьшие по модулю ω_p ответственны за асимптотическое поведение глобальной плотности нейтронов при условии слабого поглощения ($\Sigma - \Sigma_s \ll \Sigma$) при весьма общих предположениях относительно вида функций $R(\mu)$, $\Sigma(\mu)$, $\Sigma_s(\mu)$. Предполагая малость $|\omega_p|$ по сравнению с Σ (слабое поглощение) и выполняя элементарные преобразования в выражении для D (20), с учетом четности функций $\Sigma(\mu)$ и $\Sigma_s(\mu)$ находим

$$\omega_p^2 = -A/B$$

$$A = \left(1 - \int_0^1 \frac{\Sigma_s}{\Sigma} d\mu\right)\left(1 - 3g\int_0^1 \frac{\Sigma_s\mu^2}{\Sigma} d\mu\right)$$

$$B = \left(1 - 3g\int_0^1 \frac{\Sigma_s\mu^2}{\Sigma} d\mu\right)\int_0^1 \frac{\Sigma_s\mu^2}{\Sigma^3} d\mu + 3g\left(1 - \int_0^1 \frac{\Sigma_s}{\Sigma} d\mu\right)\int_0^1 \frac{\Sigma_s\mu^4}{\Sigma^3} d\mu + {}$$
$$+ 3g\left(\int_0^1 \frac{\Sigma_s\mu^2}{\Sigma^2} d\mu\right)^2$$

Таким образом, асимптотическое решение даст экспоненциальное убывание с линейным параметром $|\omega_p|^{-1}$, который зависит от $\Sigma_s(\mu)$, $\Sigma(\mu)$ и степени анизотропии функции рассеяния в лабораторной системе координат. Легко видеть, что анизотропия рассеяния приводит к уменьшению $|\omega_p|$, т. е. к замедлению убывания $\varphi(x)$ с ростом $|x|$ для любых зависимостей $\Sigma(\mu)$, $\Sigma_s(\mu)$.

Автор благодарит Н. А. Хижняка за постоянный интерес к работе.

Поступила 29 X 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии. М., Изд-во иностр. лит., 1953.
2. Марчук Г. И. Методы расчета ядерных реакторов. М., Атомиздат, 1961.
3. Линдхард Й. Влияние кристаллической решетки на движение быстрых заряженных частиц. Усп. физ. н., 1969, т. 99, № 2, стр. 249.