

УДК 551.555.9

## ЧИСЛЕННОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТОНКОЙ СТРУКТУРЫ ТЕЧЕНИЯ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ ВБЛИЗИ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА

В. А. Гущин, В. В. Миткин\*, Т. И. Рождественская, Ю. Д. Чашечкин\*

Институт автоматизации проектирования РАН, 123056 Москва

\* Институт проблем механики РАН, 117526 Москва

E-mails: gushchin@icad.org.ru, chakin@ipmnet.ru

В лабораторном и численном экспериментах исследована тонкая структура поля течения непрерывно стратифицированной жидкости вблизи кругового цилиндра при малых значениях числа Фруда. По двумерной модели рассчитаны параметры опережающего возмущения, поля внутренних волн и следа за цилиндром. Впервые путем численных расчетов подтверждено существование высокоградиентных прослоек плотности в следе, параллельных оси течения, обнаруженных ранее экспериментально. Результаты численных и экспериментальных исследований хорошо согласуются между собой и с аналитическими моделями в диапазоне малых значений числа Фруда.

**Ключевые слова:** стратифицированная жидкость, круговой цилиндр, поле внутренних волн, след, тонкая структура, вычислительный эксперимент.

**Введение.** Исследование пространственно-временных характеристик течений непрерывно стратифицированной жидкости вблизи двумерных препятствий, их устойчивости и критических условий перестройки представляет научный и практический интерес, поскольку в природных условиях и в технологических аппаратах жидкости являются стратифицированными вследствие неоднородности распределения температуры и концентрации растворенного или взвешенного вещества.

При анализе течений стратифицированной жидкости с учетом стратификации в систему уравнений гидродинамики добавляются сила плавучести и уравнение диффузии стратифицирующего компонента. В результате наряду с пограничным слоем, отстающим следом, донными вихрями, вихревой дорожкой в течении присутствуют внутренние волны и опережающее возмущение. Следует отметить, что стратифицированная жидкость является неравновесной средой, в которой даже в отсутствие внешних дестабилизирующих факторов на непроницаемых поверхностях вследствие прерывания потока стратифицирующего компонента формируются пограничные течения с собственными масштабами скорости и плотности [1]. При этом решение задачи существенно усложняется вследствие появления новых малых и больших параметров, обусловленных слабостью стратификации и малостью членов, учитывающих диффузию.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 05-01-00496, 02-05-65383), Фонда содействия отечественной науке и Президиума РАН (6-й конкурс-экспертиза, грант № 94 “Исследование формирования и эволюции свободных стратифицированных течений”), а также в рамках Программы Президиума РАН “Математическое моделирование”.

Наибольшее распространение получили две модели стратификации: модель двухслойной жидкости, в которой расчеты проводятся по аналогии с поверхностными волнами, и экспоненциально стратифицированная модель. Вследствие слабой стратификации в постановке задачи уравнения Навье — Стокса записываются в приближении Буссинеска, когда изменения плотности считаются пренебрежимо малыми во всех членах уравнения, за исключением члена, содержащего силу тяжести, который учитывает влияние плавучести.

Экспериментальному исследованию течения линейно стратифицированной жидкости (экспоненциальное и линейное распределения плотности неразличимы в пределах погрешности опытов в случае слабой стратификации) вблизи горизонтального цилиндра посвящено значительное количество работ. В большинстве из них оптическими методами визуализирована структура течения и определены геометрические характеристики волн, вихрей и следов. Феноменологическая классификация режимов течения [2] расширена и дополнена в [3] с учетом расположения высокоградиентных прослоек в следах. Новые типы неустойчивости ламинарного течения за цилиндром при малых значениях числа Фруда обнаружены в [4].

В аналитических расчетах опережающего возмущения используются предположения об идеальности жидкости и затухании всех возмущений на больших расстояниях перед препятствием [5]. В работе [6] проанализированы границы применимости такого подхода, позволяющего описать основные особенности течения около цилиндра: заблокированную жидкость перед препятствием, присоединенные внутренние волны, всяческие вихревые системы (“роторы” по терминологии авторов [6]). Хотя формально метод [5] применим для расчета течений при больших значениях числа Фруда  $Fr = U/ND > 0,5$  ( $U$  — скорость цилиндра;  $D$  — диаметр цилиндра;  $N$  — частота плавучести), он вполне приемлем и при меньших значениях числа Фруда.

Для численного моделирования стратифицированных течений широко используется метод расщепления, первоначально предложенный для расчета течений однородной жидкости [7]. Подробное описание этого метода и различные примеры использования для расчета двух- и трехмерных нестационарных течений стратифицированной жидкости включая течения со свободной поверхностью приведены в [8, 9]. Результаты расчетов и экспериментального исследования присоединенных внутренних волн за цилиндром хорошо согласуются [10]. Хотя метод расщепления по физическим параметрам имеет достаточно большие возможности, ранее он использовался в основном для расчета крупномасштабных элементов спутных течений и присоединенных внутренних волн. Элементы тонкой структуры стратифицированных течений, лежащие в основе феноменологической классификации режимов течений, ранее численно не анализировались. Появление новых мощных компьютеров позволяет более полно реализовать возможности вычислительных подходов и детально рассчитывать картины течений.

Целью данной работы являются адаптация метода расщепления [7], ранее успешно применявшегося при анализе течений однородной жидкости, для расчета структуры двумерных стратифицированных течений, сравнение результатов вычислительного и лабораторного экспериментов при одних и тех же значениях безразмерных параметров задачи и анализ картины поперечного обтекания цилиндра.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается поперечное обтекание цилиндра диаметром  $D$  потоком линейно стратифицированной жидкости, плотность которой  $\rho(y) = \rho_0(1 - y/\Lambda + s)$  уменьшается с увеличением высоты  $y$  вследствие изменения солености ( $\rho_0 = \rho(0) = 1$ ;  $\Lambda$  — масштаб стратификации;  $s$  — возмущение солености). Это явление описывается системой уравнений, включающей уравнения Навье — Стокса, записанные в приближении Буссинеска, которое применимо вследствие слабой стратификации, а так-

же уравнение несжимаемости жидкости и уравнение диффузии соли:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} &= -\frac{\nabla p}{\rho_0} + \mathbf{g}s + \nu\nabla^2\mathbf{v}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)s &= \varkappa_s\nabla^2s + \frac{1}{\Lambda}v_y.\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{v}$  — вектор скорости;  $p$  — давление;  $\mathbf{g}$  — ускорение свободного падения;  $\nu$  — кинематическая вязкость;  $\varkappa_s$  — коэффициент диффузии соли. Стратификация характеризуется линейным масштабом  $\Lambda = |d(\ln \rho)/dy|^{-1}$  и периодом плавучести  $T_b = 2\pi/N = 2\pi\sqrt{\Lambda/g}$  [11]. Скорость потока на бесконечности равна  $U$ . В расчетах и экспериментах исследовалась жидкость с периодом плавучести  $T_b = 25,2$  с.

В качестве граничных условий используются условия невозмущенного потока на контуре  $G$ , находящемся на достаточно большом удалении от центра:  $u = U \cos \theta$ ,  $v = -U \sin \theta$ ,  $p = 0$ ,  $s = 0$ ; условие прилипания  $\mathbf{v}|_{\Gamma} = 0$  и условие отсутствия нормальной компоненты потока солености  $\partial s/\partial n|_{\Gamma} = 0$  на поверхности цилиндра  $\Gamma$  ( $u$ ,  $v$  — компоненты вектора скорости вдоль осей полярной системы координат  $(r, \theta)$ ).

В качестве начальных условий для скорости задается невозмущенный плоскопараллельный поток  $u = U \cos \theta$ ,  $v = -U \sin \theta$  с учетом граничных условий на поверхности цилиндра.

Основными масштабами задачи (кроме внешних — размера тела и масштаба плавучести) являются размеры структурных элементов течения: длина присоединенной внутренней волны  $\lambda = UT_b = 2\pi U/N$ , толщина скоростного пограничного слоя  $\delta_u = \nu/U$  и толщина плотностного пограничного слоя  $\delta_\rho = \varkappa_s/U$ . Масштаб обусловленного стратификацией внутреннего пограничного течения составляет  $\delta_N = \sqrt{\nu/N}$ , масштаб соответствующей плотностной неоднородности равен  $\delta_s = \sqrt{\varkappa_s/N}$  [2].

Отношения базовых масштабов образуют основные безразмерные параметры: число Рейнольдса  $Re = D/\delta_u = UD/\nu$ , число Пекле  $Pe = D/\delta_\rho = UD/\varkappa_s$  (или число Шмидта  $Sc = Pe/Re$ ), внутреннее число Фруда  $-Fr = \lambda/(2\pi D) = U/(ND)$ ; отношение масштабов  $C = \Lambda/D$ . Поскольку стратификация является слабой, а кинетические коэффициенты достаточно малы, значения базовых масштабов существенно различаются:  $\Lambda \gg D \gg \delta_u \gg \delta_\rho$ ,  $\lambda \gg \delta_\nu \gg \delta_s$ . Техника лабораторного эксперимента и вычислительные подходы разрабатывались с учетом необходимости выделения структурных элементов с различными масштабами.

Выбирая в качестве масштаба скорости скорость потока  $U$ , а в качестве масштаба длины диаметр цилиндра  $D$ , запишем систему (1) в безразмерном виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} &= -\frac{\nabla p}{\rho_0} + \frac{s\mathbf{g}}{Fr^2|g|(D/\Lambda)} + \frac{1}{Re}\nabla^2\mathbf{v}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)s &= \frac{1}{Pe}\nabla^2s + \frac{Dv_y}{\Lambda}.\end{aligned}\quad (2)$$

Расчетная область заключена между двумя концентрическими окружностями — границей цилиндра  $\Gamma$  и условной границей  $G$ , за которой находится невозмущенная область (рис. 1). Поток жидкости со скоростью  $U$ , обтекающий неподвижный цилиндр, направлен вдоль оси  $x$  (в эксперименте цилиндр движется в неподвижной жидкости). В расчетах используется полярная система координат  $(r, \theta)$  с началом в центре цилиндра. Внешняя граница удалена на расстояние  $(80 \div 100)D$  в зависимости от условий задачи.

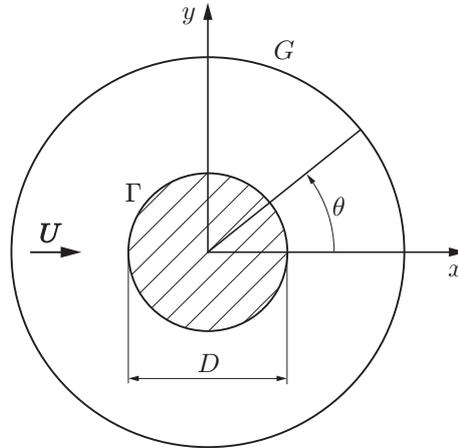


Рис. 1. Расчетная область течения

**2. Методика расчета.** Для удобства вычислений расчетная область преобразуется в прямоугольную со сторонами  $z$  в горизонтальном направлении и  $\theta$  в вертикальном с помощью замены  $r = R(z) = 1 + \alpha z + z^3$ , коэффициент преобразования  $\alpha = 0,2\sqrt{2}/\text{Re}$ . Новая ортогональная система координат  $(z, \theta)$ , где  $z \in [0, \infty]$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ , связана с декартовой системой преобразованием  $x = R(z) \cos \theta$ ,  $y = R(z) \sin \theta$ . Расчетная сетка в координатах  $z, \theta$  является равномерной и при использовании конечно-разностных методов более удобна, чем полярная. В то же время эта сетка позволяет лучше разрешать особенности течения вблизи цилиндра.

Для решения системы уравнений (2) используется метод расщепления по физическим переменным с явной гибридной конечно-разностной схемой второго порядка аппроксимации по пространственным переменным. Эта схема характеризуется монотонностью, минимальными схемной вязкостью и дисперсией, что позволяет проводить расчеты в широком диапазоне значений чисел Рейнольдса и Фруда [7]. При использовании метода расщепления задача (2) решается поэтапно. Пусть в некоторый момент времени  $t_n = n\Delta\tau$  ( $\Delta\tau$  — шаг по времени;  $n$  — число шагов) известно поле скорости  $\mathbf{v}^n$ . Тогда схему определения неизвестных функций в момент времени  $t_{n+1} = (n+1)\Delta\tau$  можно представить следующим образом. На первом этапе определяется вспомогательная сеточная функция  $\tilde{\mathbf{v}}$ , учитывающая только конвективные и вязкие члены, а также силы плавучести, но не удовлетворяющая условию  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ :

$$\frac{\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v}^n}{\Delta t} = -(\mathbf{v}^n \nabla) \mathbf{v}^n + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{v}^n + \frac{s\mathbf{g}}{\text{Fr}^2 |g|(D/\Lambda)}.$$

На втором этапе из решения уравнения Пуассона находится поле давления с учетом условия  $\nabla \mathbf{v}^{n+1} = 0$ :

$$\nabla^2 p = \frac{\nabla \tilde{\mathbf{v}}^n}{\Delta t}.$$

На третьем этапе вычисляется поле скоростей на  $(n+1)$ -м слое по времени:

$$\mathbf{v}^{n+1} = \tilde{\mathbf{v}} - \nabla p \Delta t,$$

после чего с учетом найденного значения  $\mathbf{v}^{n+1}$  решается уравнение для возмущения солёности

$$s^{n+1} = s^n - \Delta t (\mathbf{v}^{n+1} \nabla) s - \frac{\Delta t \Delta s}{\text{Pe}} + \frac{\Delta t D(u \sin \theta + v \cos \theta)}{\Lambda}.$$

Расчет проводился до момента времени  $10T_b = 252$  с, которому соответствовали и результаты экспериментов. Расчетная сетка содержала 180 точек по координате  $z$  и 180 точек по координате  $\theta$  (размеры первой ячейки  $0,07 \times 0,044$  см достаточны для разрешения тонкой структуры течения). Шаг по времени выбирался автоматически из условия Куранта. Расчеты выполнены на суперкомпьютере PARAM-10000 (Ultra Sparc II, 400 MHz). Все численные данные, представленные для сравнения с результатами экспериментов, пересчитаны в декартову систему координат, в которой цилиндр движется относительно неподвижной жидкости.

**3. Методика эксперимента.** Опыты выполнены в бассейне с прозрачными стенками, имеющем размеры  $240 \times 40 \times 60$  см. Бассейн заполнялся линейно стратифицированным водным раствором поваренной соли методом непрерывного вытеснения. Распределение плотности и период плавучести измерялись перед каждым опытом по регистрограмме осцилляций, возбуждаемых плотностной меткой, которые фиксировались датчиком электропроводности (погрешность не превышала 5 %). В данной серии экспериментов период плавучести составлял  $T_b = 25,2$  с.

Изучалась картина течения за горизонтальным цилиндром диаметром  $D = 2,5$  см, который буксировался с постоянной скоростью в центре бассейна. С помощью тонких ножей цилиндр крепился к каретке, которая перемещалась по направляющим со скоростью  $U = 0,08 \div 3,00$  см/с (шаг  $\Delta U = 0,02$  см/с, погрешность определения скорости не более 5 %). Условия экспериментов ( $C = 150 \div 560$ ,  $Fr = 0,12 \div 0,73$ ,  $Re = 20 \div 75$ ) соответствовали ламинарному следу. Перед началом каждого опыта цилиндр устанавливался вблизи торцевой стенки бассейна.

Визуализация проводилась теневым прибором ИАБ-458 методом Максудова в двух модификациях: вертикальная щель — нож или щель — нить в фокусе. С учетом линейной зависимости между плотностью и коэффициентом преломления раствора соли при использовании первого способа визуализируется горизонтальная компонента коэффициента преломления, а при использовании второго — ее модуль. Плотностные метки создавались вертикально всплывающими газовыми пузырьками или падающими кристаллами сахара. Характерное время жизни метки составляло  $40 \div 100$  с, ее толщина — не более 1 мм. Погрешность измерения скорости жидкости не превышала 10 %.

Период плавучести, профили солености и ее изменение в выбранной точке измерялись “одноэлектродным” контактным датчиком удельной электропроводности. Датчик калибровался перед каждой серией экспериментов непосредственно в лабораторном бассейне методами подъема — погружения и свип-колебаний на высоту 0,5 см. Статическая и динамическая погрешности измерений составляли 15 %.

Через 24 ч после заполнения бассейна с установленным под кареткой цилиндром, когда затухали все возмущения и сглаживались неоднородности распределения плотности, измерялись профиль солености и период плавучести на выбранном горизонте. Затем в бассейне создавались вертикальные метки — маркеры профиля течения — и производилась буксировка цилиндра по всей длине бассейна. Следующий эксперимент проводился после затухания всех движений и выравнивания возмущений солености (плотности) от предыдущей буксировки.

**4. Основные результаты.** Для сравнения с экспериментом, который проводился в водном растворе поваренной соли (NaCl), в расчетах принимались следующие значения параметров:  $\nu = 0,01$  см<sup>2</sup>/с,  $\kappa_s = 1,41 \cdot 10^{-5}$  см<sup>2</sup>/с,  $T_b = 25,2$  с,  $U = 0,1 \div 0,4$  см/с,  $D = 2,5$  см.

Типичная теневая картина ламинарного стратифицированного течения вблизи цилиндра и рассчитанная карта изолиний солености в системе координат, связанной с цилиндром, приведены на рис. 2 (цилиндр движется справа налево). На теневой фотографии,

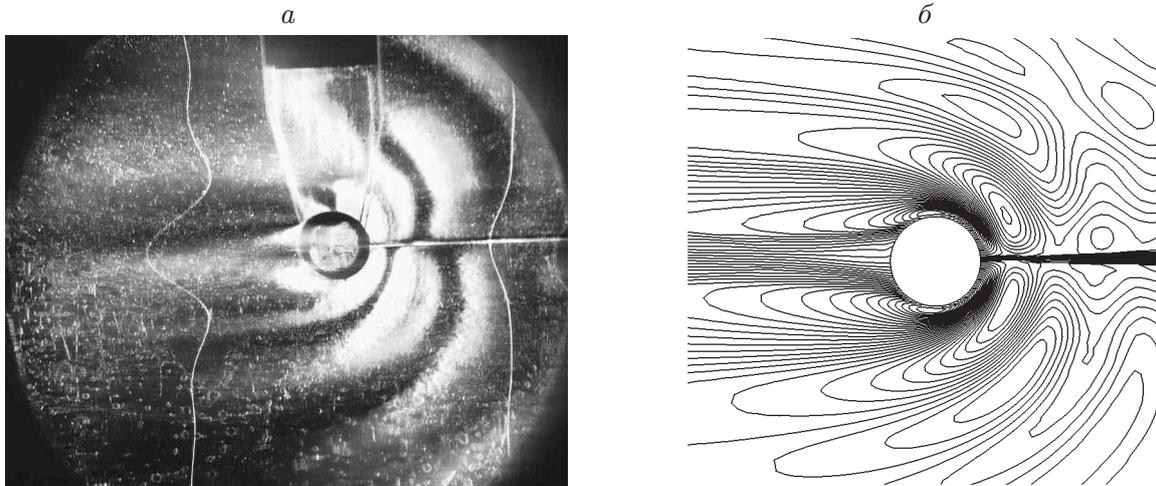


Рис. 2. Стратифицированное течение вблизи цилиндра ( $D = 2,5$  см;  $U = 0,1$  см/с;  $T_b = 25,2$  с;  $Fr = 0,16$ ;  $Re = 25$ ):

*a* — теньевая картина; *б* — расчетные изолинии солёности

полученной методом “вертикальная щель — нить в фокусе”, видна структура поля модуля градиента солёности (рис. 2, *a*). Метки визуализируют профили скорости в опережающем возмущении и в следе позади цилиндра. На рис. 2, *б* представлено поле возмущений солёности.

На рис. 2 видны также общие элементы наблюдаемой и рассчитанной картин течения: опережающее возмущение, скоростной и плотностной следы позади цилиндра, поле внутренних волн. Опережающее возмущение представляет собой заблокированную жидкость непосредственно перед телом и нестационарные внутренние волны, плавно переходящие в присоединенные внутренние волны позади цилиндра. Как на теневой картине, так и на рассчитанной видны клиновидные границы области полной блокировки перед цилиндром.

Искаженные полуокружности позади цилиндра на рис. 2, *a* визуализируют фазовые поверхности присоединенных внутренних волн. Гребням соответствуют темные линии, впадинам — серые. Гребни и впадины присоединенных волн отчетливо видны и на картине изолиний солёности (рис. 2, *б*). В обоих случаях визуализированы три волны, длина которых соответствует рассчитанной по линейной теории:  $\lambda = U_0 T_b$  [5]. Однако рассчитанная картина является более информативной, поскольку позволяет определить не только форму гребней и впадин волн, но и величину возмущений солёности, а следовательно, смещения частиц в волне и положение областей максимальных амплитуд (центры замкнутых изолиний).

Как в расчетах, так и в эксперименте фазовые поверхности присоединенных внутренних волн отклоняются от полуокружностей в окрестности плотностного следа, где они “увлекаются” средним течением вследствие эффекта Доплера. Наиболее сильные возмущения плотности наблюдаются вблизи оси движения в опережающем возмущении и непосредственно за цилиндром. В целом экспериментально наблюдаемая и рассчитанная картины течения являются структурно-подобными. Более подробные результаты экспериментального исследования параметров заблокированной жидкости перед двумерным препятствием приведены в [12].

Иную структуру имеет поле возмущений солёности. Семейство почти параллельных изолиний перед цилиндром свидетельствует о наличии блокировки (проталкивание жидкости перед телом). Наклонные линии, постепенно преобразующиеся в концентрические

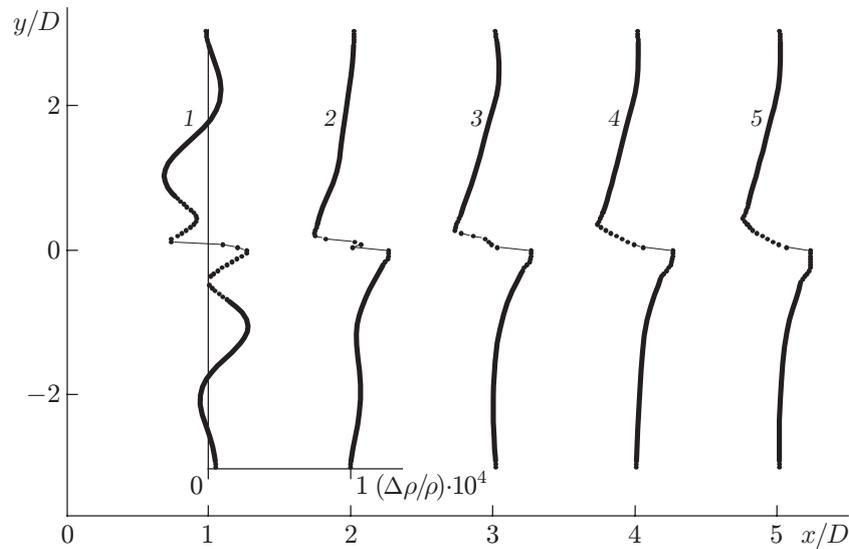


Рис. 3. Профили плотности в следе за цилиндром на различных расстояниях от задней критической точки ( $D = 2,5$  см;  $U = 0,1$  см/с;  $T_b = 25,2$  с;  $Fr = 0,16$ ;  $Re = 25$ ):

1 —  $x/D = 1$ ; 2 —  $x/D = 2$ ; 3 —  $x/D = 3$ ; 4 —  $x/D = 4$ ; 5 —  $x/D = 5$

окружности, визуализируют нестационарные опережающие внутренние волны (которым соответствуют наклонные лучи на рис. 2, *a*), плавно переходящие в присоединенные позади тела. Однако вблизи оси течения в следе за телом монотонность изменения плотности нарушается. В донной области к препятствию примыкает центральная высокоградиентная оболочка (сгущение изолиний на рис. 2, *b*), которая видна на рис. 2, *a* (светлая линия позади тела). Ранее высокоградиентные элементы структуры спутного следа наблюдались в эксперименте, но не визуализировались в численных расчетах.

Появление прослойки в спутном следе обусловлено общей перестройкой стратификации движущимся цилиндром. Вследствие блокировки — торможения и захвата жидкости — перед двумерным цилиндром накапливается более однородная жидкость, собранная с траектории движения тела. Увлеченная жидкость замещается новой, поступающей с ранее разнесенных по вертикали слоев жидкости и погружающейся под действием сил плавучести. В областях контакта жидкости разной плотности позади цилиндра в зависимости от параметров движения формируется одна или несколько высокоградиентных прослоек. По количеству и положению поверхностей разрыва плотности в следе классифицируются режимы течения при малых числах Фруда [12]. Высокоградиентные прослойки, которые наблюдаются при обтекании как двумерных, так и трехмерных препятствий, в численных расчетах ранее практически не обнаруживались.

Профили возмущений плотности за цилиндром, рассчитанные на различных расстояниях от его задней критической точки, приведены на рис. 3. На дополнительной оси отложены возмущения солёности. Точка 0 соответствует центру двумерного цилиндра. На оси движения в каждом сечении выделяется тонкий слой, в котором градиент плотности в несколько раз превышает фоновый. В ближайшем к цилиндру сечении формируется скачок плотности вследствие смыкания слоев, разнесенных по вертикали в невозмущенной среде.

На приведенных распределениях плотности волновые возмущения проявляются только в ближайшем к телу сечении, на расстоянии от задней критической точки цилиндра, равном длине волны, что свидетельствует о влиянии ближайших к цилиндру волн (см.

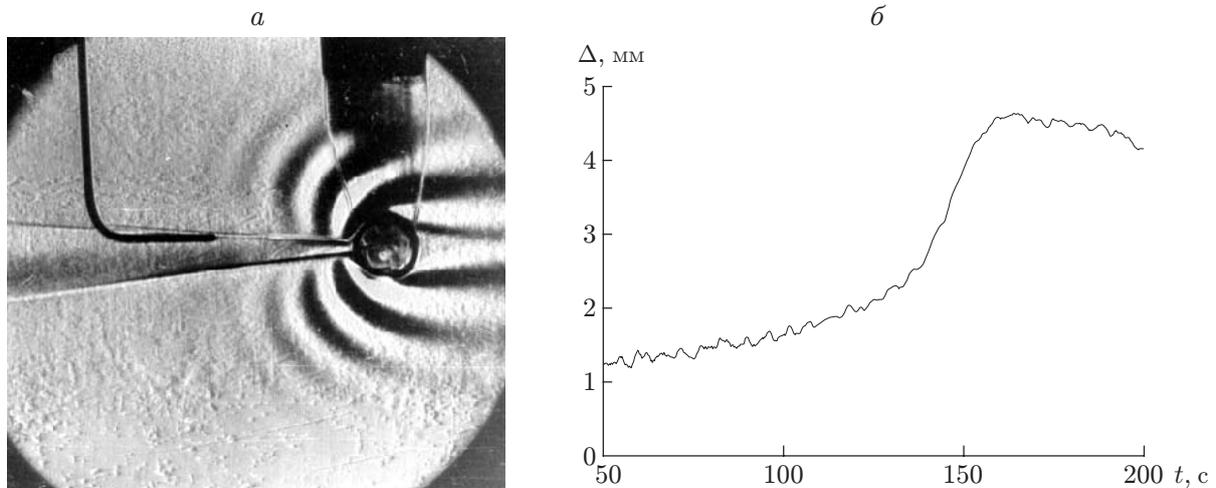


Рис. 4. Визуализация прослоек на границе следа (а) и результаты измерения вариаций плотности в процессе формирования течения за цилиндром (б) ( $D = 2,5$  см;  $U = 0,1$  см/с;  $T_b = 25,2$  с;  $Fr = 0,16$ ;  $Re = 25$ )

рис. 2). По мере удаления от цилиндра скачок плотности постепенно сглаживается за счет диффузии. Величина скачка плотности на оси движения в ближайших к цилиндру вертикальных сечениях, полученная в результате расчетов (см. рис. 3), соответствует смыканию слоев, разнесенных в невозмущенной жидкости по вертикали на расстояние  $h \approx 0,7$  см. Этот результат согласуется с результатами измерений вариаций плотности на высокоградиентной оболочке спутного следа.

Измерения проводились на начальной стадии формирования течения, когда оболочка плотностного следа за препятствием является расщепленной (рис. 4,а). В процессе формирования течения оболочки движутся навстречу друг другу с почти постоянной скоростью, после их смыкания на оси движения в плотностном следе формируется центральная прослойка. Медленное равномерное движение оболочек в процессе формирования течения позволяет непосредственно измерять величину скачка плотности одноэлектродным датчиком электропроводности жидкости с большей точностью, чем при обычном зондировании, вследствие отсутствия электрических помех и дополнительных вибраций.

Пространственное разрешение датчика составляет 2,5 мм, что превышает толщину прослойки. Однако высокая чувствительность датчика позволяет оценить толщину и изменение плотности. С этой целью датчик устанавливался на каретке и двигался вместе с цилиндром на фиксированном расстоянии от него. При формировании течения смыкающиеся наклонные оболочки следа образуют клиновидную область позади цилиндра (рис. 4,а). По мере движения цилиндра слева направо движущаяся сверху вниз наклонная прослойка пересекает установленный на фиксированном горизонте датчик.

Статическая и динамическая градуировка датчика в таких измерениях производится непосредственно перед началом опыта методом подъема — погружения на высоту  $0,5 \div 1,0$  см. Результаты градуировки позволяют непосредственно определять отклонение слоев жидкости от начального уровня в исходном поле плотности (параметр  $\Delta$ ). Пример записи сигнала датчика электропроводности приведен на рис. 4,б.

Изменение во времени сигнала на выходе датчика электропроводности свидетельствует о перестройке поля плотности во всем бассейне одновременно с началом движения цилиндра. К моменту появления цилиндра в “поле зрения” теневого прибора ( $t = 50$  с) смещение частиц жидкости, свидетельствующее об уменьшении плотности на горизон-

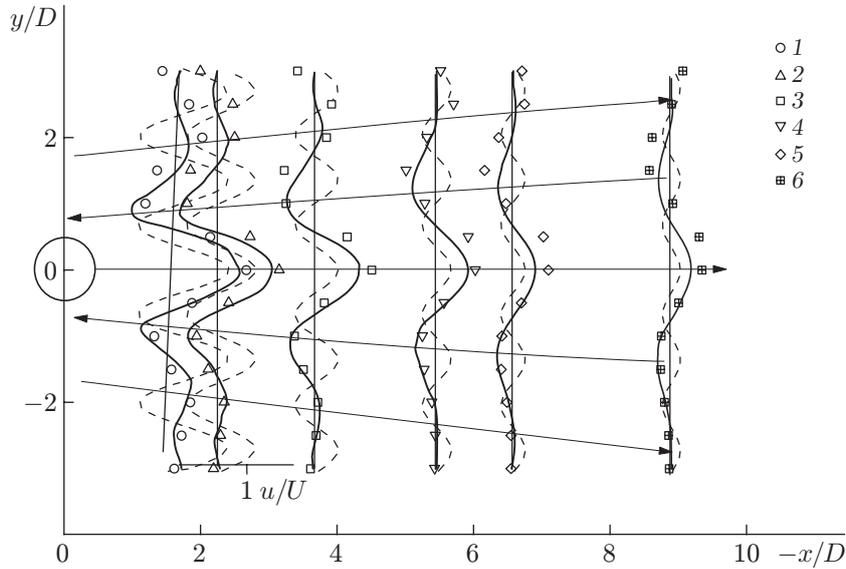


Рис. 5. Профили скорости перед цилиндром в различных вертикальных сечениях ( $D = 2,5$  см;  $U = 0,135$  см/с;  $T_b = 25,2$  с;  $Fr = 0,22$ ;  $Re = 33,8$ ):

сплошные линии — экспериментальные данные; штриховые — расчет по формуле (5.1); точки — результаты численного расчета (1 —  $x/D = 1,75$ ; 2 —  $x/D = 2,3$ ; 3 —  $x/D = 3,7$ ; 4 —  $x/D = 5,5$ ; 5 —  $x/D = 6,6$ ; 6 —  $x/D = 8,9$ ); стрелки — направление скорости жидкости

те установки датчика, достигает  $\Delta = 1,4$  мм. Медленное нарастание сигнала сменяется его быстрым изменением при  $t = 150$  с. Именно этому моменту (пересечение оболочкой следа рабочего объема датчика) соответствует рис. 4,а. Поскольку масштаб разрешения датчика значительно больше толщины оболочки, сигнал с его выхода сглаживается. Тем не менее определенные указанным выше способом смещения слоев составляют  $2 \div 3$  мм, что согласуется с результатами расчетов, приведенными на рис. 3. При этом градиент плотности на оболочке в зависимости от параметров движения увеличивается в несколько раз по сравнению с фоновым [12]. При движении цилиндра профили плотности за телом постепенно сглаживаются из-за диффузии, что соответствует уменьшению контрастности изображения оболочек на теневой фотографии (см. рис. 4,а) и подтверждается непосредственными измерениями электропроводности. Далее сигнал на выходе датчика начинает плавно уменьшаться, что свидетельствует о восстановлении исходного распределения плотности после прохождения цилиндра.

Результаты измерений, численных и аналитических расчетов профилей скорости перед цилиндром представлены на рис. 5. На дополнительной оси приведены распределения скорости по вертикали. Для аналитических вычислений возмущения горизонтальной компоненты скорости  $u$  использованы результаты работы [5]. Преобразуя полученные в [5] выражения, горизонтальную компоненту скорости можно представить в следующем виде:

$$\frac{u}{Uk_0^2 D^2} = -2\pi \frac{Y_1(k_0 r)}{k_0 r} \cos 2\theta - 2\pi Y_0(k_0 r) \sin^2 \theta + 8 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n - 1}{(4n^2 - 1)(2n + 3)} J_{2n+1}(k_0 r) \cos(2n + 1)\theta. \quad (3)$$

Здесь  $r, \theta$  — радиус-вектор и полярный угол в цилиндрической системе координат, связанной с цилиндром;  $k_0 = N/U$ ;  $Y_n(k_0 r)$ ,  $J_n(k_0 r)$  — цилиндрические функции Неймана и

Бесселя. Выражение (3) существенно упрощается на оси движения, где  $\theta = 0$  и тригонометрические функции исчезают:

$$\frac{u}{Uk_0^2 D^2} = \frac{2\pi}{k_0|x|} [H_1(k_0|x|) \operatorname{sgn} x - Y_1(k_0|x|)]. \quad (4)$$

Здесь  $H_1(k_0|x|)$  — полная функция Струве;  $Y_1(k_0|x|)$  — функция Неймана первого порядка.

В центре области заблокированной жидкости возмущения скорости монотонно затухают по мере удаления от тела. При этом меняется положение нулевой линии тока, на которой скорости жидкости и тела равны, т. е. фактически происходит деформация контура обтекаемого цилиндра [6].

Положение крайней точки пересечения контура полностью заблокированной жидкости и линии центра следа перед цилиндром соответствует параметрам экспериментально наблюдаемой блокировки жидкости при медленном движении цилиндра. Независимо от формы препятствия профиль скорости в опережающем возмущении имеет волновую структуру и является симметричным относительно центральной горизонтальной плоскости [4], что качественно согласуется с результатами расчетов (см. рис. 2). Главный максимум возмущения находится на оси движения, где направление скорости движения жидкости совпадает с направлением движения цилиндра. Выше и ниже областей заблокированной жидкости и следа располагаются струи с чередующимися направлениями скорости. При этом вблизи тела вертикальное расстояние между первыми нулевыми значениями скорости приближенно равно высоте цилиндра.

Расстояние между центрами струй, примыкающих к области блокировки, превышает высоту цилиндра и увеличивается по мере удаления от тела, что не согласуется с моделями идеальной жидкости, не учитывающими реальную форму цилиндра [5]. Кроме того, положение линий максимумов и минимумов струй определяется режимом течения. Расстояния между однонаправленными струями в верхнем и нижнем полупространстве для данного сечения увеличиваются с ростом числа Фруда пропорционально длине присоединенной внутренней волны. Результаты не согласуются с экспериментальными ни по амплитуде, ни по фазе. При этом различие фазовых картин обусловлено тем, что дипольная модель не учитывает размеры цилиндра и положение струй определяется только длиной присоединенной внутренней волны. Из результатов расчетов [6] следует, что при уменьшении числа Фруда происходит сильная деформация контура нулевой функции тока, фактически определяющей форму цилиндра при замене реального тела массовым диполем. Из формулы (4) следует, что при уменьшении числа Фруда обтекаемый контур сильно вытягивается в направлении движения тела и его передняя точка удаляется от источника. При этом обтекаемый контур сжимается и его высота становится меньше высоты обтекаемого цилиндра.

При малых значениях числа Фруда на экспериментальном профиле горизонтальной компоненты скорости вблизи оси движения перед цилиндром наблюдается практически плоский участок размером порядка диаметра цилиндра, т. е. в опытах с телом большого размера ( $D > \lambda$ ) нестационарные внутренние волны не проникают в область полной блокировки потока, что согласуется с данными работы [12].

Численный расчет с высокой точностью предсказывает фазовую структуру поля скорости перед цилиндром, положения линий минимумов и максимумов, при этом рассчитанные и измеренные значения скорости практически совпадают (см. рис. 5). Некоторое различие значений скорости, рассчитанных и измеренных на периферийных струях, обусловлено малостью возмущений скорости в этой области, вследствие чего возрастает погрешность измерений.

Рассчитанные и измеренные распределения скорости на оси движения перед цилиндром в зависимости от расстояния до передней критической точки цилиндра приведены на

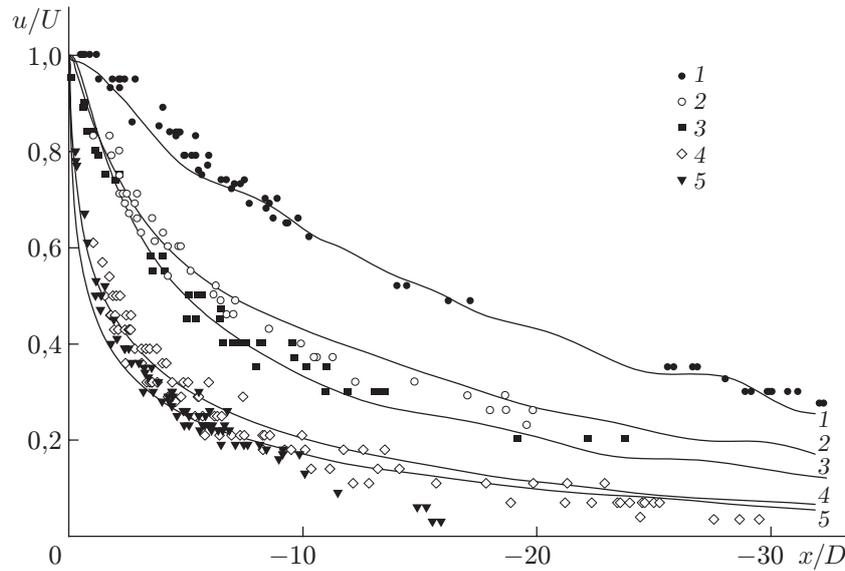


Рис. 6. Рассчитанные (сплошные линии) и измеренные (точки) распределения возмущений скорости на оси движения перед цилиндром ( $D = 2,5$  см;  $T_b = 25,2$  с):

1 —  $U = 0,1$  см/с,  $Fr = 16$ ,  $Re = 25$ ; 2 —  $U = 0,17$  см/с,  $Fr = 0,27$ ,  $Re = 43$ ; 3 —  $U = 0,21$  см/с,  $Fr = 0,34$ ,  $Re = 53$ ; 4 —  $U = 0,28$  см/с,  $Fr = 0,46$ ,  $Re = 71$ ; 5 —  $U = 0,4$  см/с,  $Fr = 0,64$ ,  $Re = 101$

рис. 6. Как в численных расчетах, так и в экспериментах возмущение скорости монотонно убывает по мере удаления от тела. В непосредственной близости к цилиндру для самых медленных режимов выделяется область блокировки. Измеренные и рассчитанные значения возмущений скорости хорошо согласуются. Немонотонность и осцилляции скорости в опережающем возмущении при малых скоростях движения цилиндра обусловлены влиянием отражения течения от торцевой стенки бассейна. В численных расчетах осцилляции являются следствием используемого граничного условия на внешнем контуре расчетной области.

**Заключение.** Результаты визуализации картины течения и измерений профилей скорости горизонтального цилиндра, равномерно движущегося в непрерывно стратифицированной жидкости, удовлетворительно согласуются с результатами численных расчетов. В вычислительном и лабораторном экспериментах заблокированная жидкость перед цилиндром окружена полем нестационарных волн, фазовые поверхности которых располагаются на наклонных лучах. В известных аналитических моделях, в которых используются недостаточно строгие дополнительные предположения (приближение Буссинеска, пренебрежение сингулярными компонентами решений, обусловленными вязкостью и (или) диффузией, использование упрощенных граничных условий), фазовые поверхности в опережающем возмущении располагаются горизонтально. Высокоградиентные прослойки в следе позади цилиндра, которые наблюдаются в эксперименте при любых (в том числе минимальных) значениях числа Фруда, в вычислительном эксперименте выявлены впервые.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Байдулов В. Г., Чашечкин Ю. Д. Влияние диффузионных эффектов на пограничные течения в непрерывно стратифицированной жидкости // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1993. Т. 29, № 5. С. 666–672.

2. **Boyer D. L., Davies P. A., Fernando H. J. S., Zhang X.** Linearly stratified flow past a horizontal circular cylinder // Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1989. V. 328. P. 501–528.
3. **Чашечкин Ю. Д., Воейков И. В.** Вихревые системы за цилиндром в непрерывно стратифицированной жидкости // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1993. Т. 29, № 6. С. 821–830.
4. **Миткин В. В., Чашечкин Ю. Д.** Структура стратифицированного течения около цилиндра при малых значениях внутреннего числа Фруда // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 1. С. 80–88.
5. **Long R. R.** Some aspects of the flow of stratified fluids. 1. A theoretical investigation // Tellus. 1953. V. 5, N 1. P. 42–58.
6. **Аксенов А. В., Городцов В. А., Стурова И. В.** Моделирование обтекания цилиндра стратифицированной идеальной несжимаемой жидкостью. М., 1986. (Препр. / АН СССР. Ин-т проблем механики; № 282).
7. **Гущин В. А.** Метод расщепления для задач динамики неоднородной вязкой несжимаемой жидкости // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1981. Т. 21, № 4. С. 1003–1017.
8. **Белоцерковский О. М.** Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Наука, 1984.
9. **Белоцерковский О. М., Гущин В. А., Коньшин В. Н.** Метод расщепления для исследования течений стратифицированной жидкости со свободной поверхностью // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1987. Т. 27, № 4. С. 594–609.
10. **Белоцерковский О. М., Белоцерковский С. О., Гущин В. А. и др.** Численное и экспериментальное моделирование гравитационных внутренних волн при движении тела в стратифицированной жидкости // Докл. АН СССР. 1984. Т. 279, № 3. С. 562–566.
11. **Байдулов В. Г., Чашечкин Ю. Д.** Формирование течения при начале движения горизонтального цилиндра в непрерывно стратифицированной жидкости // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1999. Т. 35, № 6. С. 821–828.
12. **Миткин В. В.** Экспериментальное исследование поля скорости перед двумерным препятствием в непрерывно стратифицированной жидкости // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2001. Т. 37, № 1. С. 85–92.

*Поступила в редакцию 17/X 2005 г.,  
в окончательном варианте — 26/II 2006 г.*

---