УДК 532.135 + 532.137

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ МАКСВЕЛЛА

С. В. Мелешко, А. Г. Петрова*, В. В. Пухначев**,***

Технический университет Суранари, 30000 Након Ратчасима, Таиланд
* Алтайский государственный университет, 656049 Барнаул, Россия
** Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
*** Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия
E-mails: sergey@math.sut.ac.th, annapetrova07@mail.ru, pukhnachev@gmail.com

Вычислены характеристики системы уравнений, описывающей трехмерное движение несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла в случаях использования в реологическом соотношении верхней, нижней конвективных производных и вращательной производной Яуманна. Для системы, линеаризованной в окрестности состояния покоя, поставлена начально-краевая задача и установлена ее однозначная разрешимость.

Ключевые слова: несжимаемая вязкоупругая среда Максвелла, объективная производная, характеристики, линейная модель.

DOI: 10.15372/PMTF20170504

1. Постановка задачи. Модели поведения вязкоупругой среды Максвелла исследуются во многих работах (см., например, монографии [1–4], статьи [5, 6] и библиографию к ним). При естественных термодинамических ограничениях уравнения движения сжимаемой вязкоупругой среды являются уравнениями гиперболического типа [4]. Важное свойство гиперболичности отсутствует, если среда несжимаема. Материальными характеристиками вязкоупругой среды являются ее плотность ρ, динамическая вязкость μ и время релаксации τ. Эти величины далее полагаются постоянными. Кроме того, считается, что на среду не действуют внешние объемные силы. Случай, когда внешние силы имеют потенциал, сводится к указанному выше случаю стандартным преобразованием давления.

С учетом принятых предположений движение несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла описывают следующие уравнения:

— уравнения импульса и неразрывности

$$\begin{gathered}\rho(\boldsymbol{v}_t + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}) = -\nabla p + \operatorname{div} S,\\ \nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0;\end{gathered} \tag{1}$$

— уравнение состояния, или реологическое соотношение

$$\tau\,\frac{\tilde{d}S}{dt} + S = 2\mu D. \tag{2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16-01-00127) и Совета по грантам Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ РФ (грант № НШ-8146.2016.1).

В (1), (2) $\boldsymbol{v}$ — вектор скорости; p — отклонение давления от некоторого среднего значения $p_0 > 0$; D — тензор скоростей деформаций; S — вязкоупругая составляющая тензора напряжений; $\tilde{d}S/dt$ — одна из инвариантных, или объективных, производных тензора S [1, 2]. В общем случае

$$\frac{\tilde{d}S}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla S + \frac{1+\alpha}{2}\big(-\nabla\boldsymbol{v}\cdot S - S\cdot\nabla\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\big) + \frac{1-\alpha}{2}\big(\nabla\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\cdot S + S\cdot\nabla\boldsymbol{v}\big), \qquad (3)$$
$$-1 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

При $\alpha = -1$ инвариантная производная является нижней конвективной производной и обозначается $\overset{\Delta}{S}$, в случае $\alpha = 0$ — вращательной производной Яуманна (обозначается $\overset{0}{S}$), при $\alpha = 1$ — верхней конвективной производной (обозначается $\overset{\nabla}{S}$). Выбор такой производной неоднозначен, он зависит от свойств моделируемой среды. Важно, чтобы при таком выборе соотношение (2) было инвариантно относительно вращения с произвольной угловой скоростью. Заметим, что

$$\overset{0}{S} = \big(\overset{\Delta}{S} + S\big)/2, \qquad \overset{\nabla}{I} = -2D, \qquad \overset{\Delta}{I} = 2D, \qquad \overset{0}{I} = 0 \qquad (4)$$

(I — единичный тензор).

Случай двумерного движения с верхней конвективной производной изучался аналитически и численно в многочисленных публикациях (см., например, [6–9]). Исследованию двумерной модели с производной Яуманна посвящены работы [10–12]. Трехмерная модель, изучение которой начато в [13], рассматривается в данной работе.

Как известно, в предположении о несжимаемости среды давление не является термодинамической переменной и равно $-\operatorname{tr}T/3$, где $T = -pI + S$ — тензор напряжений [14]. Тогда тензор S является девиатором тензора T, поэтому $\operatorname{tr}S = 0$. Пусть последнее равенство выполнено в момент $t = 0$. Выясним, выполняется ли оно при $t > 0$. Оказывается, тождественное выполнение равенства $\operatorname{tr}S = 0$ имеет место лишь в модели с производной Яуманна [10, 15]. В работе [15] предлагается модификация модели с верхней конвективной производной, обеспечивающая равенство нулю следа вязкоупругих напряжений при всех $t > 0$.

2. Вычисление характеристик в трехмерном случае. Пусть

$$S = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & g \\ c & g & h \end{pmatrix}.$$

Запишем систему (1), (2) в виде

$$A\,\frac{\partial\boldsymbol{U}}{\partial t} + B\,\frac{\partial\boldsymbol{U}}{\partial x} + C\,\frac{\partial\boldsymbol{U}}{\partial y} + D\,\frac{\partial\boldsymbol{U}}{\partial z} = 0,$$

где $\boldsymbol{U} = (u, v, w, p, a, b, c, d, g, h)$ — вектор; A, B, C, D — матрицы коэффициентов размерности 10×10.

Характеристическая поверхность $\varphi(t, x, y, z) = 0$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta \equiv \det\left(\varphi_t A + \varphi_x B + \varphi_y C + \varphi_z D\right) = 0.$$

Вычисления показывают, что выражение для Δ можно представить в виде

$$\Delta = X^4(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2)\delta,$$

где $X = \varphi_t + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\varphi$; $4\delta = X^4(4\rho^2\tau^2) + 2X^2(\rho\tau)G + H$; функции G, H не зависят от X.

В общем случае $\alpha \in [-1; 1]$ выражения для G и H весьма громоздки, однако в известных частных случаях имеем

$$\alpha = 1: \qquad \delta = (\tau(\nabla\varphi, S\nabla\varphi) + \mu(\nabla\varphi)^2 - \rho\tau X^2)^2,$$

$$\alpha = 0: \qquad \delta = (\tau(\nabla\varphi, S\nabla\varphi) + \mu(\nabla\varphi)^2 - \rho\tau X^2)^2 + \frac{\tau^2}{16}\,(2J_2(Q^2S) - J_1(Q^2S)^2),$$

$$\alpha = -1: \qquad \delta = \Big(\frac{\tau}{2}\,J_1(Q^2S) + \mu(\nabla\varphi)^2 - \rho\tau X^2\Big)^2 + \frac{\tau^2}{4}\,(2J_2(Q^2S) - J_1(Q^2S)^2),$$

где

$$Q = E\langle\nabla\varphi\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -\varphi_x & \varphi_y \\ \varphi_z & 0 & -\varphi_x \\ -\varphi_y & \varphi_x & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_1(P) = \operatorname{tr}(P), \quad J_2(P) = (\operatorname{tr}(P))^2 - \operatorname{tr}(P)^2,$$

$\operatorname{tr} P$ — след тензора P. В данном случае $P = Q^2S$. Заметим, что

$$2J_2(P) - J_1^2(P) = (2J_1^2(P) - \operatorname{tr}(P^2)) - J_1^2(P) = J_1^2(P) - 2\operatorname{tr}(P^2).$$

Можно показать, что форма δ допускает разложение на множители. Рассмотрим выражение δ как полином относительно $\rho\tau X$. Пусть

$$d = h + \lambda, \qquad a = h + q.$$

Тогда дискриминант полинома имеет вид

$$P = G^2 - 4H = (\alpha - 1)^2 Q,$$

где $Q = \lambda^2(\varphi_x^2 + \varphi_z^2) + 2\lambda q_1 + q_2$ (q_1, q_2 не зависят от λ).

Дискриминант выражения Q как полинома относительно λ имеет вид

$$q_1^2 - (\varphi_x^2 + \varphi_z^2)q_2 = -4(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2)K^2 \leqslant 0,$$

где

$$K = -g\varphi_x^3 + c\varphi_x^2\varphi_y + b\varphi_x^2\varphi_z - q\varphi_x\varphi_y\varphi_z - g\varphi_x\varphi_z^2 - c\varphi_y\varphi_z^2 + b\varphi_z^3.$$

Так как $\varphi_x^2 + \varphi_z^2 \geqslant 0$, то $Q \geqslant 0$, поэтому

$$\delta = \Big(X^2\rho\tau - \frac{1}{4}\,G - \frac{\alpha - 1}{4}\,\sqrt{Q}\,\Big)\Big(X^2\rho\tau - \frac{1}{4}\,G + \frac{\alpha - 1}{4}\,\sqrt{Q}\,\Big). \tag{5}$$

Следует отметить, что если

$$G + |\alpha - 1|\sqrt{Q} \geqslant 0, \tag{6}$$

то можно продолжать раскладывать полином δ на множители.

В случае производной Яуманна ($\alpha = 0$) и нижней конвективной производной ($\alpha = -1$) разложение (5) принимает более конкретный вид. Так как в главных осях тензор S диагонален (для упрощения сохранены прежние обозначения его компонент):

$$S = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix},$$

то, вводя обозначение $s = 2J_2(Q^2S) - J_1(Q^2S)^2$, получаем

$$s = -(\varphi_x^2 + \varphi_z^2)^2\lambda^2 - 2q(\varphi_x^2(\varphi_y^2 - \varphi_z^2) - \varphi_z^2(\varphi_y^2 + \varphi_z^2)) - q^2(\varphi_y^2 + \varphi_z^2)^2.$$

Дискриминант последнего полинома относительно λ не положителен:

$$-4q^2\varphi_x^2\varphi_y^2\varphi_z^2(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) \leqslant 0.$$

Таким образом,

$$s \leqslant 0$$

и полином δ можно разложить на множители следующим образом:

$$\alpha = 0: \qquad \delta = \big(\rho\tau X^2 - \tau(\nabla\varphi, S\nabla\varphi) - \mu(\nabla\varphi)^2 + (\tau/4)\sqrt{-s}\,\big) \times \\ \times \big(\rho\tau X^2 - \tau(\nabla\varphi, S\nabla\varphi) - \mu(\nabla\varphi)^2 - (\tau/4)\sqrt{-s}\,\big),$$

$$\alpha = -1: \qquad \delta = \big(\rho\tau X^2 - (\tau/2)J_1(Q^2S) - \mu(\nabla\varphi)^2 + (\tau/4)\sqrt{-s}\,\big) \times \\ \times \big(\rho\tau X^2 - (\tau/2)J_1(Q^2S) - \mu(\nabla\varphi)^2 - (\tau/2)\sqrt{-s}\,\big).$$

Заметим, что в главных осях

$$(\nabla\varphi, S\nabla\varphi) = a\varphi_x^2 + d\varphi_y^2 + h\varphi_z^2, \quad J_1(Q^2S) = -a(\varphi_y^2 + \varphi_z^2) - d(\varphi_x^2 + \varphi_z^2) - h(\varphi_x^2 + \varphi_y^2).$$

В случае $\alpha \neq 1$ при выполнении неравенства

$$m = \frac{\mu}{\tau} \geqslant K \max\{|a|, |b|, |c|, |d|, |g|, |h|\}, \qquad K = \mathrm{const} > 0$$

выполнено условие (6), позволяющее разложить полином δ на четыре линейных по X множителя. Следовательно, при достаточно большом по сравнению с компонентами тензора S значении величины m система (1), (2) обладает четырьмя различными вещественными звуковыми характеристиками. Исключение составляет случай $\alpha = 1$. В этом случае система (1), (2) имеет пару двукратных вещественных звуковых характеристик.

Эффект кратности звуковых характеристик при $\alpha = 1$ в уравнении состояния (3) имеет место лишь в трехмерном пространстве. В плоском случае система (1), (2) имеет шестой порядок и обладает двумя звуковыми, двумя контактными и двумя комплексными характеристиками [16]. Наличие двух различных скоростей распространения нелинейных волн сдвига в среде Максвелла, описываемой соотношением (3) при $\alpha \neq 1$, также является трехмерным эффектом.

Система (1), (2) с верхней конвективной производной широко используется при описании несжимаемых вязкоупругих сред. Тем не менее эта система обладает существенным недостатком: для нее не выполнено энергетическое тождество, справедливое в модели с вращательной производной Яуманна [10–12]:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega_t} \frac{1}{2}\Big(\rho|\boldsymbol{v}|^2 + \frac{\tau}{2\mu}\,S : S\Big)\,d\Omega = \int\limits_{\Sigma_t} \boldsymbol{v}(-p\boldsymbol{n} + S\cdot\boldsymbol{n})\,d\Sigma - \frac{1}{2\mu}\int\limits_{\Omega_t} S : S\;d\Omega. \tag{7}$$

Здесь $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к поверхности Σ_t, ограничивающей объем Ω_t. Тождество (7) справедливо только для системы с производной Яуманна. В случае если

$$\boldsymbol{v}\big|_{\partial\Omega\times[0,t)} = 0,$$

тождество (7) принимает вид

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega_t} \frac{1}{2}\Big(\rho|\boldsymbol{v}|^2 + \frac{\tau}{2\mu}\,S : S\Big)\,d\Omega = -\frac{1}{2\mu}\int\limits_{\Omega_t} S : S\;d\Omega$$

и из него следуют интегральные оценки

$$\int\limits_0^t \int\limits_{\Omega_t} S : S\;d\Omega\,dt \leqslant (1 - \mathrm{e}^{-2t/\tau})\,\frac{\tau}{2}\int\limits_{\Omega_t} (2\mu\rho|\boldsymbol{v}_0|^2 + S_0 : S_0)\,d\Omega\,d\gamma,$$

$$\int_{\Omega_t} S:S\,d\Omega \leqslant \mathrm{e}^{-2t/\tau}\int_{\Omega_0}(2\mu\rho|\boldsymbol{v}_0|^2+S_0:S_0)\,d\Omega+\frac{2}{\tau}\,\mathrm{e}^{-2t/\tau}\int_0^t \mathrm{e}^{2\gamma/\tau}\int_{\Omega_t}2\mu\rho|\boldsymbol{v}|^2\,d\Omega\,d\gamma,$$

$$\int_{\Omega_t}(2\mu\rho|\boldsymbol{v}|^2+S:S)\,d\Omega \leqslant \int_{\Omega_0}(2\mu\rho|\boldsymbol{v}_0|^2+S_0:S_0)\,d\Omega,$$

где $\boldsymbol{v}\big|_{t=0}=\boldsymbol{v}_0$; $S\big|_{t=0}=S_0$.

3. Линеаризованная задача. В случае линеаризации в окрестности состояния покоя независимо от вида объективной производной уравнения движения принимают следующий вид:

$$\rho\boldsymbol{v}_t=-\nabla p+\operatorname{div}S,\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{v}=0; \tag{8}$$

$$\tau S_t+S=2\mu D. \tag{9}$$

Энергетическое тождество для линеаризованной задачи сохраняет форму (7). Уравнение характеристик упрощается до уравнения

$$\varphi_t^4(\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2)(\rho\varphi_t^2-(\mu/\tau)(\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2))^2=0,$$

и система (8), (9), как и в случае верхней конвективной производной, имеет пару двукратных вещественных звуковых характеристик.

4. Постановка начально-краевой задачи для системы (8), (9). Дополним систему (8), (9) следующими начальными условиями:

$$\boldsymbol{v}\big|_{t=0}=\boldsymbol{\varphi}(x,y,z),\quad \boldsymbol{v}_t\big|_{t=0}=\boldsymbol{\psi}(x,y,z),\qquad \boldsymbol{\varphi}(x,y,z)\big|_{\partial\Omega}=0,\quad \operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}=\operatorname{div}\boldsymbol{\psi}=0; \tag{10}$$

$$S\big|_{t=0}=S_0(x,y,z). \tag{11}$$

В качестве граничных условий выберем условия прилипания для скорости

$$\boldsymbol{v}\big|_{\partial\Omega\times[0,t)}=0 \tag{12}$$

и условие второго рода для давления

$$\frac{\partial p}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}=h(x,y,z)\,\mathrm{e}^{-t/\tau},\qquad \int_{\partial\Omega}h\,d\Sigma+\int_{\Omega}\operatorname{div}\operatorname{div}S_0\,dx\,dy\,dz=0. \tag{13}$$

Здесь $\partial/\partial n$ — производная по направлению внешней нормали к поверхности Ω.

Установим существование и единственность классического решения задачи (8)–(13).

Утверждение 1. *Классическое решение $\boldsymbol{v}$, S, p задачи* (8)–(13) *единственно с точностью до аддитивной постоянной в выражении для давления.*

Действительно, в силу условия (12) тождество (7) принимает вид

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t}\frac{1}{2}\Big(\rho|\boldsymbol{v}|^2+\frac{\tau}{2\mu}\,S:S\Big)\,d\Omega=-\frac{1}{2\mu}\int_{\Omega_t}S:S\,d\Omega.$$

Это тождество справедливо также для разности двух решений. Так как при $t=0$ неотрицательное подынтегральное выражение в левой части равенства равно нулю, то $S\equiv 0$. Следовательно, $\boldsymbol{v}\equiv 0$. Давление определяется с точностью до аддитивной постоянной.

Утверждение 2. *При достаточно гладких граничных и начальных данных существует классическое решение задачи* (8)–(13).

Действительно, дифференцируя первое уравнение (8) по времени и учитывая равенство (9), имеем соотношение

$$\rho(\tau \boldsymbol{v}_{tt} + \boldsymbol{v}_t) = \mu \Delta \boldsymbol{v} - \nabla(\tau p_t + p), \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0. \tag{14}$$

Применяя оператор дивергенции к системе (8), получаем уравнение для давления

$$\Delta p = \operatorname{div}\operatorname{div} S. \tag{15}$$

С учетом (8), (9) лапласиан давления удовлетворяет также уравнению

$$\tau\, \Delta p_t + \Delta p = 0. \tag{16}$$

Из соотношений (15), (16) следует

$$\Delta p = (\operatorname{div}\operatorname{div} S_0)\, \mathrm{e}^{-t/\tau}; \tag{17}$$

$$p = q(x)\, \mathrm{e}^{-t/\tau}\,. \tag{18}$$

Функция q определяется с точностью до аддитивной постоянной из решения задачи Неймана

$$\Delta q = \operatorname{div}\operatorname{div} S_0; \tag{19}$$

$$\frac{\partial q}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = (\operatorname{div} S_0 - \boldsymbol{\psi}) \cdot \boldsymbol{n}, \tag{20}$$

поэтому система (14) для компонент вектора $\boldsymbol{v}$ упрощается и принимает вид

$$\tau \boldsymbol{v}_{tt} + \boldsymbol{v}_t = \nu\, \Delta \boldsymbol{v}; \tag{21}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0. \tag{22}$$

Здесь $\nu = \mu/\rho$ — кинематическая вязкость. Векторное уравнение (21) распадается на три уравнения для компонент вектора скорости, которые связывает уравнение (22). Таким образом, система (21), (22) является переопределенной. Если для системы (21) задать начальные и граничные условия (10), (12), то ее решение будет удовлетворять уравнению (22). Действительно, функция $f(x, y, z, t) = \operatorname{div} \boldsymbol{v}$ удовлетворяет уравнению

$$\tau f_{tt} + f_t = \nu\, \Delta f$$

и условиям

$$f\big|_{t=0} = \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}(x, y, z) = 0, \qquad f_t\big|_{t=0} = \operatorname{div} \boldsymbol{\psi}(x, y, z) = 0, \qquad f\big|_{\partial\Omega\times[0,t)} = 0$$

и в силу теоремы единственности тождественно равна нулю.

В результате решение задачи (8)–(13) сводится к последовательному решению следующих задач:

— начально-краевых задач (21), (10), (12) для компонент скорости;

— задачи Коши (9), (11) для определения компонент тензора S;

— задачи Неймана для уравнения Пуассона (19), (20).

Существование единственного классического решения каждой из указанных задач не вызывает сомнений.

Следует отметить некоторые свойства решения задачи (8), (9). Скорость распространения поперечных волн, описываемых уравнением (21), равна $c = (\nu/\tau)^{1/2}$, а декремент затухания их амплитуды есть $1/\tau$. Поведение тензора S характеризуется двумя слагаемыми, одно из которых монотонно уменьшается с уменьшением амплитуды пропорционально $\mathrm{e}^{-t/\tau}$, а другое уменьшается по закону затухающих колебаний вследствие колебательного характера изменения вектора скорости $\boldsymbol{v}$. Что касается давления, то в силу (18) при $t \to \infty$ его величина монотонно стремится к постоянной величине p_0.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Астарита Дж.** Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей / Дж. Астарита, Дж. Марручи. М.: Мир, 1978.
2. **Joseph D. D.** Fluid dynamics of viscoelastic fluids. N. Y.: Springer, 1990.
3. **Huilgol R. R.** Fluid mechanics of viscoelasticity. V. 6. General principles, constitutive modeling, analytical and numerical techniques / R. R. Huilgol, N. Phan Thien. Amsterdam; Lausanne; N. Y. etc.: Elsevier, 1997.
4. **Годунов С. К.** Элементы механики сплошных сред и законы сохранения / С. К. Годунов, Е. И. Роменский. Новосибирск: Науч. кн., 1998.
5. **Брутян М. А., Крапивский П. Л.** Гидродинамика неньютоновских жидкостей // Комплексные и специальные разделы механики. М.: ВИНИТИ, 1991. Т. 4. С. 3–98. (Итоги науки и техники).
6. **Gerritsma M. I., Phillips T. N.** On the characteristics and compatibility equations for the UCM model fluid // Z. angew. Math. Mech. 2008. Bd 88, N 7. S. 523–539.
7. **Phan Thien N.** Plane and axi-symmetric stagnation flow of a Maxwellian fluid // Rheol. Acta. 1983. V. 22. P. 127–130.
8. **Cruz D. O. A., Pinho F. T.** Analytical solution of steady 2D wall-free extensional flows of UCM fluids // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2015. V. 223. P. 157–164.
9. **Hayat T., Awais M., Qasim M., Hendi A. A.** Effects of mass transfer on the stagnation point of an upper-convected Maxwell (UCM) fluid // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2011. V. 54. P. 3777–3782.
10. **Пухначев В. В.** Математическая модель несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла // ПМТФ. 2010. Т. 51, № 4. С. 116–126.
11. **Liapidevskii V. Yu., Pukhnachev V. V., Tani A.** Nonlinear waves in incompressible viscoelastic Maxwell medium // Wave Motion. 2011. V. 48, iss. 8. P. 727–737.
12. **Ляпидевский В. Ю., Пухначев В. В.** Гиперболические подмодели несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 2013. Т. 281. С. 84–97.
13. **Petrova A. G.** On the characteristics for 3-d system of equations for incompressible viscoelastic Maxwell medium // Abstr. of 2nd Russian-French workshop “Mathematical hydrodynamics”, Novosibirsk, Aug. 22–27, 2016. Novosibirsk: Inst. Hydrodynamics, 2016. P. 48–49.
14. **Серрин Дж.** Математические основы классической механики жидкости. М.: Мир, 1958.
15. **Oliveira P. J.** A traceless formulation for viscoelastic fluid flow // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2000. V. 95. P. 55–65.
16. **Мещерякова Е. Ю.** Групповой анализ уравнений несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла // Изв. Алт. гос. ун-та. 2012. № 1/2. С. 54–58.

Поступила в редакцию 1/VI 2017 г.