

УДК 539.3, 620.179.1

ДИНАМИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ПЛОСКОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ГОРИЗОНТАЛЬНО ПОЛЯРИЗОВАННОЙ ВОЛНЫ СДВИГА В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ МАТЕРИАЛЕ С НЕКРУГОВОЙ ПОЛОСТЬЮ

С. Л. Ван, С. Ц. Ян, Ж. Чзан

Колледж гражданского строительства и транспорта Университета Бэйхуа,
132013 Цзилинь, Китай
E-mails: tumuwxl@126.com, xujiaoyangtju@163.com, zr290360994@163.com

Изучаются динамические напряжения при распространении плоской гармонической горизонтально поляризованной волны в пьезоэлектрическом материале с некруговым отверстием. С использованием конформного преобразования задача для материала с некруговым отверстием сводится к задаче для материала с круговым отверстием. Для определения неизвестных коэффициентов в аналитическом выражении для коэффициента концентрации динамических напряжений используются краевые условия. Исследовано влияние волнового числа набегающей волны, пьезоэлектрической константы материала и коэффициента эксцентриситета полости на распределение коэффициента концентрации динамических напряжений. Установлено, что распределение коэффициента динамических напряжений в окрестности полости со стороны, обращенной к набегающей волне, существенно отличается от распределения коэффициента динамических напряжений в области, находящейся на противоположной стороне.

Ключевые слова: пьезоэлектрический материал, некруговая полость, концентрация динамических напряжений, горизонтально поляризованная волна, комплексная переменная, конформное отображение.

DOI: 10.15372/PMTF20200421

Введение. Пьезоэлектрические материалы обладают уникальными механическими и электрическими свойствами и широко используются при изготовлении актуаторов, управляющих трансдюсеров и других устройств. В процессе синтеза и эксплуатации пьезоэлектрических материалов в них возникают различные дефекты типа трещин и полостей. При наличии механических и электрических нагрузок в окрестности дефектов происходит концентрация динамических напряжений, что может привести к разрушению диэлектрика или возникновению электрического пробоя.

В настоящее время существует большое количество работ, посвященных исследованию возникновения концентрации напряжений в диэлектриках в окрестности трещин [1–5]. Менее изучено напряженное состояние в окрестности полостей. С использованием метода изображений и метода разложения по волновым функциям в работах [6–8] исследовано

распределение динамических напряжений в диэлектрике в окрестности цилиндрической полости, в [9] — в окрестности цилиндрической полости, находящейся в функционально-градиентном материале. Влияние волнового числа набегающей волны и параметра неоднородности материала на распределение динамических напряжений в диэлектрике в окрестности цилиндрической полости изучено в работе [10]. В [11] исследовано распределение напряжений и электрического поля в пьезоэлектрическом твердом теле с круговой полостью. С использованием граничного интегрального уравнения и декомпозиции области в [12] решена задача для пьезоэлектрической пластины с круговой полостью. В действительности форма полости отличается от формы кругового цилиндра. В работе [13] с использованием комплексной переменной и метода конформных отображений исследована концентрация динамических напряжений в пьезоэлектрическом материале при наличии в нем полости, имеющей сложную геометрическую форму.

В данной работе получено аналитическое решение динамической задачи о концентрации динамических напряжений в диэлектрическом материале в окрестности некруговой полости при распространении горизонтально поляризованной волны сдвига. Исследовано влияние волнового числа набегающей волны, пьезоэлектрической константы и коэффициента эксцентриситета полости на коэффициент концентрации динамических напряжений.

1. Основные уравнения задачи и их решение. Уравнения антиплоской динамической задачи имеют вид

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

где τ_{xz} , τ_{yz} — компоненты тензора напряжений; D_x , D_y — компоненты вектора электрической индукции; w — компонента вектора смещений; ρ — плотность материала.

При наличии в теле упругих и электрических нагрузок определяющие соотношения можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= c_{44} \frac{\partial w}{\partial x} + e_{15} \frac{\partial \phi}{\partial x}, & \tau_{yz} &= c_{44} \frac{\partial w}{\partial y} + e_{15} \frac{\partial \phi}{\partial y}, \\ D_x &= e_{15} \frac{\partial w}{\partial x} - \varkappa_{11} \frac{\partial \phi}{\partial x}, & D_y &= e_{15} \frac{\partial w}{\partial y} - \varkappa_{11} \frac{\partial \phi}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь ϕ — электрический потенциал; c_{44} — жесткость упругого материала; e_{15} — пьезоэлектрический коэффициент; \varkappa_{11} — диэлектрическая постоянная.

Далее без ограничения общности рассматривается установившееся решение задачи. Пусть

$$w = \tilde{w} e^{-i\omega t}, \quad \phi = \tilde{\phi} e^{-i\omega t} \quad (3)$$

(ω — круговая частота набегающей волны). Знак “ \sim ” в обозначениях амплитуд смещения и электрического потенциала и коэффициент, зависящий от времени, далее опущены. Подставляя соотношения (2) в уравнения (1) и вводя обозначения для лапласиана $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, получаем

$$c_{44} \nabla^2 w + e_{15} \nabla^2 \phi + \rho \omega^2 w = 0, \quad e_{15} \nabla^2 w - \varkappa_{11} \nabla^2 \phi = 0. \quad (4)$$

Рассмотрим связанные уравнения для смещения в антиплоской задаче и электрического потенциала. В предположении, что $\varphi = \phi - w e_{15}/\varkappa_{11}$, уравнения (4) сводятся к уравнениям

$$\nabla^2 w + k^2 w = 0, \quad \nabla^2 \varphi = 0, \quad (5)$$

где k — волновое число ($k^2 = \rho \omega^2 / c^*$); $c^* = c_{44} + e_{15}^2 / \varkappa_{11}$.

Переходя в уравнениях (5) к комплексным переменным: $\zeta = x + iy$, $\bar{\zeta} = x - iy$, получаем

$$4 \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} + k^2 w = 0, \quad 4 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} = 0. \quad (6)$$

Внешность области с некруговой границей в комплексной плоскости ζ можно отобразить во внутренность единичного круга в плоскости η с помощью конформного отображения:

$$\zeta = \Omega(\eta) = c\eta + \psi(\eta) \quad (7)$$

($\psi(\eta)$ — голоморфная функция).

С учетом (7) компоненты тензора напряжений и вектора электрической индукции в (2) в полярной системе координат записываются в виде

$$\begin{aligned} \tau_{\rho z} &= c_{44} \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta} e^{i\theta} + \frac{\partial w}{\partial \bar{\zeta}} e^{-i\theta} \right) + e_{15} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \zeta} e^{i\theta} + \frac{\partial \phi}{\partial \bar{\zeta}} e^{-i\theta} \right), \\ \tau_{\theta z} &= ic_{44} \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta} e^{i\theta} - \frac{\partial w}{\partial \bar{\zeta}} e^{-i\theta} \right) + ie_{15} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \zeta} e^{i\theta} - \frac{\partial \phi}{\partial \bar{\zeta}} e^{-i\theta} \right), \\ D_\rho &= e_{15} \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta} e^{i\theta} + \frac{\partial w}{\partial \bar{\zeta}} e^{-i\theta} \right) - \varkappa_{11} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \zeta} e^{i\theta} + \frac{\partial \phi}{\partial \bar{\zeta}} e^{-i\theta} \right), \\ D_\theta &= ie_{15} \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta} e^{i\theta} - \frac{\partial w}{\partial \bar{\zeta}} e^{-i\theta} \right) - i\varkappa_{11} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \zeta} e^{i\theta} - \frac{\partial \phi}{\partial \bar{\zeta}} e^{-i\theta} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

где $e^{i\theta} = (\eta/\rho)\Omega'(\eta)/|\Omega'(\eta)|$.

2. Поля смещения и электрического потенциала. Рассмотрим горизонтально поляризованную волну сдвига, распространяющуюся в положительном направлении оси x . Поля смещений и электрического потенциала, индуцированные наличием некругового отверстия, определяются следующим образом:

$$w^{(i)} = w_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(k|\Omega(\eta)|) \left(\frac{\Omega(\eta)}{|\Omega(\eta)|} \right)^n, \quad \phi^{(i)} = \frac{e_{15}}{\varkappa_{11}} w^{(i)}. \quad (9)$$

Здесь w_0 — амплитуда набегающей волны; $J_n(\cdot)$ — функция Бесселя первого рода порядка n ; верхний индекс “(i)” соответствует набегающей волне.

Из уравнения (6) следуют общие решения для полей смещения и электрического потенциала в волне рассеяния (в рассеянной волне)

$$w^{(s)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(k|\Omega(\eta)|) \left(\frac{\Omega(\eta)}{|\Omega(\eta)|} \right)^n, \quad \phi^{(s)} = \frac{e_{15}}{\varkappa_{11}} w^{(s)} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n k^{-n} (\overline{\Omega(\eta)})^{-n}, \quad (10)$$

где $H_n^{(1)}(\cdot)$ — функция Хенкеля первого рода порядка n ; A_n , B_n — неизвестные константы, которые определяются с использованием граничных условий на границе полости. Верхний индекс “(s)” соответствует рассеянной волне.

Полные поля смещения и электрического потенциала для антиплоской задачи есть суперпозиция полей (9) и (10), соответствующих набегающей и рассеянной волнам:

$$w = w^{(i)} + w^{(s)}, \quad \phi = \phi^{(i)} + \phi^{(s)}. \quad (11)$$

Внутри полости отсутствует поле упругих смещений и имеется только конечное поле электрического потенциала ϕ^c (плотность заряда внутри полости равна нулю):

$$\phi^c = \sum_{n=0}^{\infty} C_n k^n (\Omega(\eta))^n. \quad (12)$$

Здесь C_n — неизвестные коэффициенты, которые определяются с использованием условий на границе полости.

Подставляя (11), (12) в (8), получаем соотношения

$$\begin{aligned} \tau_{\rho z} = & \frac{k}{2} c_{44}(1 + \lambda) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ w_0 i^n \left[\frac{\eta}{\rho} \frac{\Omega'(\eta)}{|\Omega'(\eta)|} J_{n-1}(k|\Omega(\eta)|) \left(\frac{\Omega(\eta)}{|\Omega(\eta)|} \right)^{n-1} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\bar{\eta}}{\rho} \frac{\overline{\Omega'(\eta)}}{|\Omega'(\eta)|} J_{n+1}(k|\Omega(\eta)|) \left(\frac{\Omega(\eta)}{|\Omega(\eta)|} \right)^{n+1} \right] + \right. \\ & \left. + A_n \left[\frac{\eta}{\rho} \frac{\Omega'(\eta)}{|\Omega'(\eta)|} H_{n-1}^{(1)}(k|\Omega(\eta)|) \left(\frac{\Omega(\eta)}{|\Omega(\eta)|} \right)^{n-1} - \frac{\bar{\eta}}{\rho} \frac{\overline{\Omega'(\eta)}}{|\Omega'(\eta)|} H_{n+1}^{(1)}(k|\Omega(\eta)|) \left(\frac{\Omega(\eta)}{|\Omega(\eta)|} \right)^{n+1} \right] \right\} - \\ & - e_{15} \sum_{n=0}^{\infty} B_n n k^{-n} \frac{\bar{\eta}}{\rho} \frac{\overline{\Omega'(\eta)}}{|\Omega'(\eta)|} (\overline{\Omega(\eta)})^{-n-1}, \\ D_\rho = & \varkappa_{11} \sum_{n=0}^{\infty} B_n n k^{-n} \frac{\bar{\eta}}{\rho} \frac{\overline{\Omega'(\eta)}}{|\Omega'(\eta)|} (\overline{\Omega(\eta)})^{-n-1}, \\ D_\rho^c = & -\varkappa_0 \phi^c = -\varkappa_0 \sum_{n=0}^{\infty} C_n n k^n \frac{\eta}{\rho} \frac{\Omega'(\eta)}{|\Omega'(\eta)|} (\Omega(\eta))^{n-1}, \end{aligned}$$

где $\lambda = e_{15}^2 / (c_{44} \varkappa_{11})$ — безразмерная пьезоэлектрическая константа; D_ρ^c — электрический потенциал в полости; \varkappa_0 — диэлектрическая постоянная в полости.

3. Краевые условия и коэффициент концентрации динамических напряжений. В плоскости η на границе полости ставятся следующие условия:

$$\tau_{\rho z} \Big|_{\rho=a} = 0, \quad D_\rho \Big|_{\rho=a} = D_\rho^c \Big|_{\rho=a}, \quad \phi \Big|_{\rho=a} = \phi^c. \quad (13)$$

С использованием условий (13) получаем выражения для неизвестных коэффициентов

$$\begin{aligned} A_n - w_0 \varepsilon_n i^n & \frac{k(1 + \lambda) P_n - 2\lambda(\varkappa_0 / (\varkappa_{11} + \varkappa_0)) J_n(k|\Omega(\eta)|)}{k(1 + \lambda) Q_n - 2\lambda(\varkappa_0 / (\varkappa_{11} + \varkappa_0)) H_n^{(1)}(k|\Omega(\eta)|)}, \\ B_n = \frac{e_{15}}{\varkappa_{11}} \frac{\varkappa_0}{\varkappa_{11} + \varkappa_0} & [w_0 \varepsilon_n i^n J_n(k|\Omega(\eta)|) + A_n H_n^{(1)}(k|\Omega(\eta)|)], \\ C_n = -\frac{\varkappa_{11}}{\varkappa_0} B_n \frac{\bar{\eta}}{\eta} \frac{\overline{\Omega'(\eta)}}{\Omega'(\eta)} \frac{\Omega(\eta)}{|\Omega(\eta)|} & (k|\Omega(\eta)|)^{-2n}, \end{aligned}$$

где

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 2, & n \neq 0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P_n & = \frac{\eta}{\rho} \frac{\Omega'(\eta)}{|\Omega'(\eta)|} J_{n-1}(k|\Omega(\eta)|) - \frac{\bar{\eta}}{\rho} \frac{\overline{\Omega'(\eta)}}{|\Omega'(\eta)|} J_{n+1}(k|\Omega(\eta)|) \left(\frac{\Omega(\eta)}{|\Omega(\eta)|} \right)^2, \\ Q_n & = \frac{\eta}{\rho} \frac{\Omega'(\eta)}{|\Omega'(\eta)|} H_{n-1}^{(1)}(k|\Omega(\eta)|) - \frac{\bar{\eta}}{\rho} \frac{\overline{\Omega'(\eta)}}{|\Omega'(\eta)|} H_{n+1}^{(1)}(k|\Omega(\eta)|) \left(\frac{\Omega(\eta)}{|\Omega(\eta)|} \right)^2. \end{aligned}$$

Коэффициент концентрации динамических напряжений определяется следующим образом [14]:

$$K_d = \tau_{\theta z}^* = |\tau_{\theta z} / \tau_0|. \quad (14)$$

Здесь $\tau_0 = c^*kw_0$ — максимальное напряжение, индуцированное набегающей волной,

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z} = \frac{ik}{2} c_{44}(1 + \lambda) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \varepsilon_n \left[\frac{\eta}{\rho} \frac{\Omega'(\eta)}{|\Omega'(\eta)|} J_{n-1}(k|\Omega(\eta)|) \left(\frac{\Omega(\eta)}{|\Omega(\eta)|} \right)^{n-1} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\bar{\eta}}{\rho} \frac{\overline{\Omega'(\eta)}}{|\overline{\Omega'(\eta)}|} J_{n+1}(k|\Omega(\eta)|) \left(\frac{\Omega(\eta)}{|\Omega(\eta)|} \right)^{n+1} \right] + \right. \\ \left. + A_n \left[\frac{\eta}{\rho} \frac{\Omega'(\eta)}{|\Omega'(\eta)|} H_{n-1}^{(1)}(k|\Omega(\eta)|) \left(\frac{\Omega(\eta)}{|\Omega(\eta)|} \right)^{n-1} + \frac{\bar{\eta}}{\rho} \frac{\overline{\Omega'(\eta)}}{|\overline{\Omega'(\eta)}|} H_{n+1}^{(1)}(k|\Omega(\eta)|) \left(\frac{\Omega(\eta)}{|\Omega(\eta)|} \right)^{n+1} \right] \right\} + \\ + ie_{15} \sum_{n=0}^{\infty} B_n n k^{-n} \frac{\bar{\eta}}{\rho} \frac{\overline{\Omega'(\eta)}}{|\overline{\Omega'(\eta)}|} (\overline{\Omega(\eta)})^{-n-1}. \end{aligned}$$

4. Результаты численного решения задач и их анализ. Рассматривается пьезоэлектрический материал с эллиптическим отверстием. Исследуется влияние волнового числа набегающей волны, пьезоэлектрической постоянной и относительного эксцентриситета полости (отношения длин осей эллипса a/b) на коэффициент концентрации динамических напряжений (14). Безразмерное волновое число набегающей волны $\bar{k} = ka$ изменялось в диапазоне $0,1 \div 5,0$, пьезоэлектрическая постоянная λ — в диапазоне $0 \div 2,0$. Принималась следующая отображающая функция:

$$\zeta = \Omega(\eta) = r_0(\eta + m/\eta).$$

Здесь $r_0 = (a + b)/2$; $m = (a - b)/(a + b)$.

На рис. 1 показано распределение коэффициента концентрации динамических напряжений (ККДН) в окрестности полости при $a/b = 5/4$ и различных значениях волнового числа набегающей волны и пьезоэлектрической константы. При увеличении волнового числа набегающей волны коэффициент динамических напряжений в окрестности полости со стороны, обращенной к набегающей волне, увеличивается более существенно, чем в окрестности полости, находящейся на противоположной стороне.

При малых значениях волнового числа ККДН уменьшается с увеличением пьезоэлектрической константы. Однако с увеличением волнового числа набегающей волны и пьезоэлектрической константы ККДН уменьшается в направлении распространения гармонической горизонтально поляризованной волны сдвига.

На рис. 2 показано распределение ККДН в окрестности полости при $a/b = 7/5$ и различных значениях волнового числа набегающей волны и пьезоэлектрической константы. Распределение ККДН при $a/b = 7/5$ аналогично распределению ККДН при $a/b = 5/4$ (см. рис. 1), однако при $a/b = 7/5$ ККДН больше, чем при $a/b = 5/4$.

На рис. 3 представлены зависимости ККДН от волнового числа при $a/b = 5/4, 7/5$ и различных значениях пьезоэлектрической константы. Максимальное значение ККДН имеет место при малых значениях волнового числа, затем ККДН быстро уменьшается с увеличением волнового числа до значений, приближенно равных единице, а при дальнейшем увеличении волнового числа ($\bar{k} > 1$) ККДН медленно возрастает.

В случае $a/b = 7/5$ значения ККДН больше, чем в случае $a/b = 4/5$.

Заключение. С использованием метода конформных отображений разработан метод определения коэффициента концентрации динамических напряжений в окрестности некруговой полости в пьезоэлектрическом материале при распространении гармонической поляризованной волны сдвига. Установлено, что при увеличении эксцентриситета полости коэффициент концентрации динамических напряжений увеличивается. При увеличении волнового числа коэффициент концентрации динамических напряжений сначала резко уменьшается, а затем медленно увеличивается. При малых значениях волнового числа

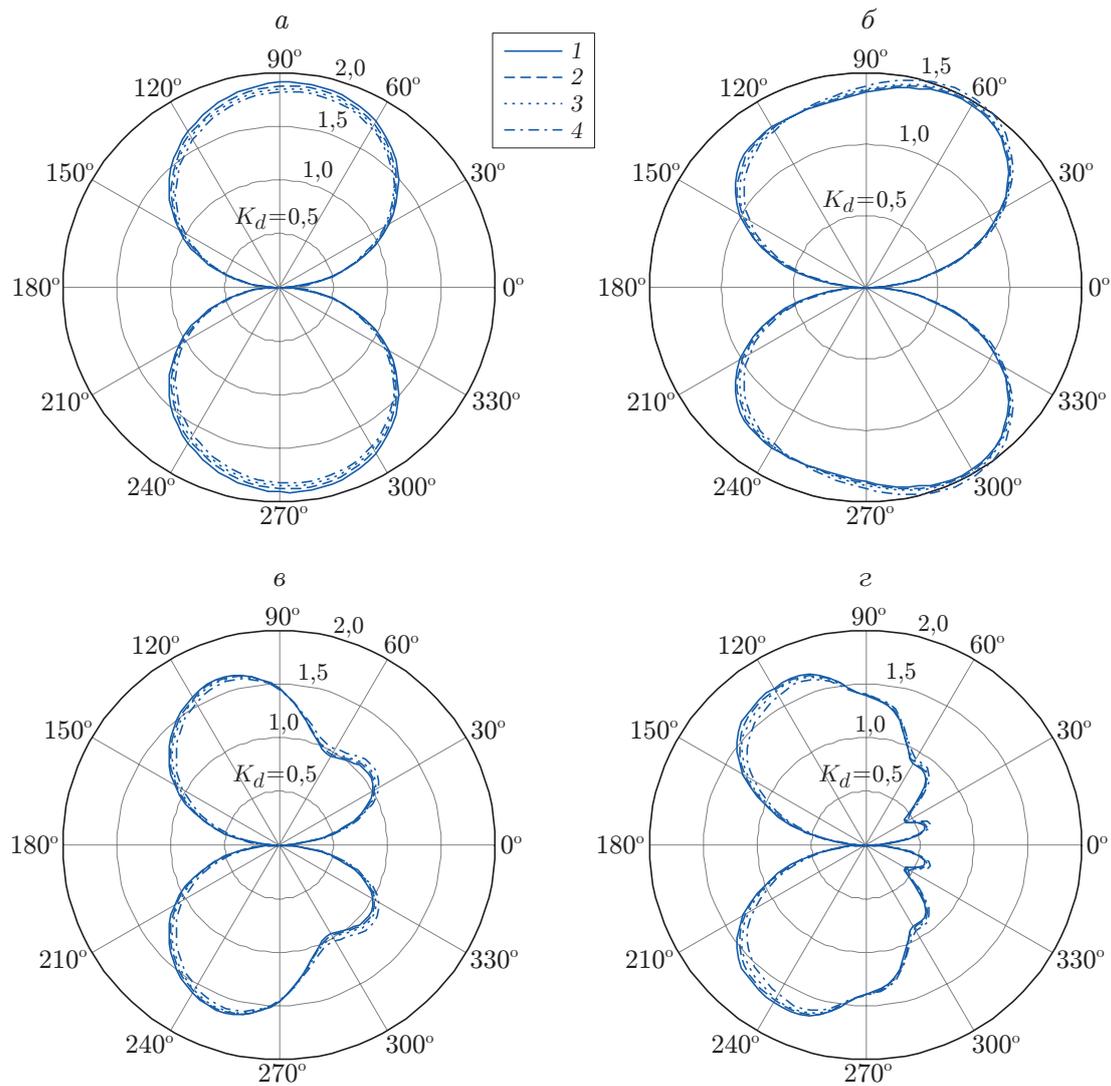


Рис. 1. Распределение коэффициента концентрации динамических напряжений в окрестности полости ($a/b = 5/4$) при различных значениях безразмерного волнового числа \bar{k} и пьезоэлектрической постоянной λ :
a — $\bar{k} = 0,1$, *б* — $\bar{k} = 1,0$, *в* — $\bar{k} = 2,0$, *г* — $\bar{k} = 5,0$; 1 — $\lambda = 0$, 2 — $\lambda = 0,5$, 3 — $\lambda = 1,0$, 4 — $\lambda = 2,0$

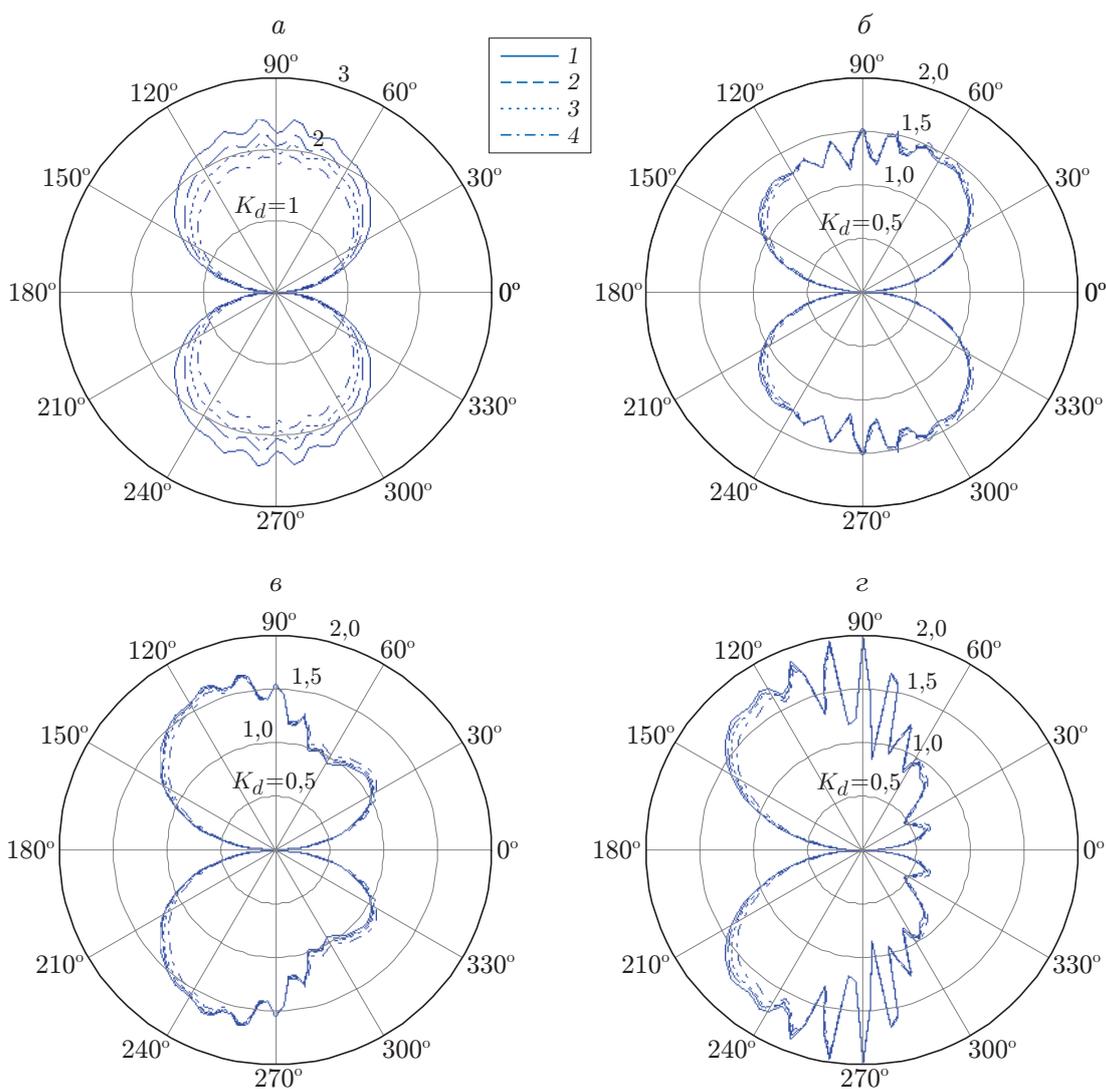


Рис. 2. Распределение коэффициента концентрации динамических напряжений в окрестности полости ($a/b = 7/5$) при различных значениях безразмерного волнового числа \bar{k} и пьезоэлектрической постоянной λ :
 а — $\bar{k} = 0,1$, б — $\bar{k} = 1,0$, в — $\bar{k} = 2,0$, г — $\bar{k} = 5,0$; 1 — $\lambda = 0$, 2 — $\lambda = 0,5$, 3 — $\lambda = 1,0$, 4 — $\lambda = 2,0$

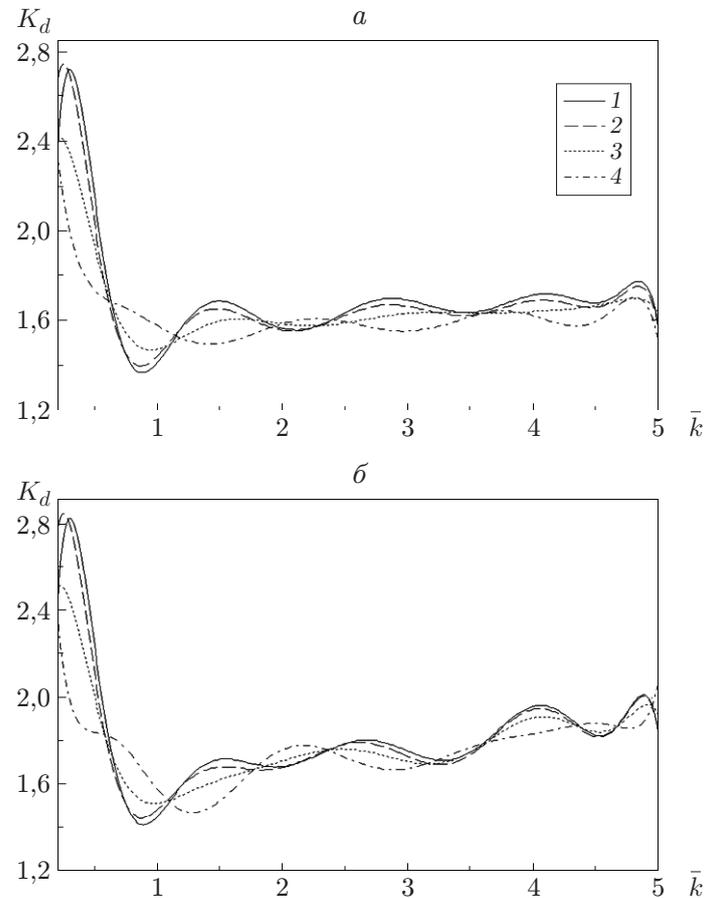


Рис. 3. Зависимость коэффициента концентрации динамических напряжений от волнового числа:

a — $a/b = 5/4$, $б$ — $a/b = 7/5$; 1 — $\lambda = 0$, 2 — $\lambda = 0,5$, 3 — $\lambda = 1,0$, 4 — $\lambda = 2,0$

ККДН уменьшается с увеличением пьезоэлектрической константы. Однако с увеличением волнового числа набегающей волны и пьезоэлектрической константы ККДН уменьшается в направлении распространения гармонической горизонтально поляризованной волны сдвига. Результаты исследования могут быть использованы при разработке неразрушающих методов выявления дефектов в элементах, изготовленных из пьезоэлектрических материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wang X. D., Meguid S. A. Modelling and analysis of the dynamic behaviour of piezoelectric materials containing interacting cracks // Mech. Materials. 2000. V. 32, N 12. P. 723–737. DOI: 10.1016/s0167-6636(00)00043-0.
2. Ma L., Wu L. Z., Zhou Z. G., et al. Scattering of harmonic anti-plane shear waves by two collinear cracks in functionally graded piezoelectric materials // Europ. J. Mech. A. Solids. 2004. V. 23, N 4. P. 633–643. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2004.03.002.
3. Chue C. H., Hsu W. H. Antiplane internal crack normal to the edge of a functionally graded piezoelectric/piezomagnetic half plane // Meccanica. 2008. V. 43, N 3. P. 307–325. DOI: 10.1007/s11012-007-9096-0.

4. **Hassan A., Song T. S.** Dynamic anti-plane analysis for two symmetrically interfacial cracks near circular cavity in piezoelectric bi-materials // Appl. Math. Mech. 2014. V. 35, N 10. P. 1261–1270. DOI: 10.1007/s10483-014-1891-9.
5. **Song T. S., Hassan A.** Dynamic anti-plane analysis for symmetrically radial cracks near a non-circular cavity in piezoelectric bi-materials // Acta Mech. 2015. V. 226, N 7. P. 2089–2101. DOI: 10.1007/s00707-015-1303-9.
6. **Fang X. Q., Hu C., Huang W. H.** Dynamic stress of a circular cavity buried in a semi-infinite functionally graded piezoelectric material subjected to shear waves // Europ. J. Mech. A. Solids. 2007. V. 26, N 6. P. 1016–1028. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2007.05.003.
7. **Fang X. Q.** Multiple scattering of electro-elastic waves from a buried cavity in a functionally graded piezoelectric material layer // Intern. J. Solids Structures. 2008. V. 45, N 22/23. P. 5716–5729. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2008.06.014.
8. **Fang X. Q., Liu J. X., Wang D. B., et al.** Dynamic stress from a subsurface cavity in a semi-infinite functionally graded piezoelectric/piezomagnetic material // Appl. Math. Model. 2010. V. 34, N 10. P. 2789–2805. DOI: 10.1016/j.apm.2009.12.013.
9. **Yang Y. H., Wu L. Z., Fang X. Q.** Non-destructive detection of a circular cavity in a finite functionally graded material layer using anti-plane shear waves // J. Nondestruct. Evaluat. 2010. V. 29, N 4. P. 233–240. DOI: 10.1007/s10921-010-0081-5.
10. **Wang X. H., Fang X. Q., Liu J. X., et al.** Dynamic stress from a circular hole in a functionally graded piezoelectric/piezomagnetic material subjected to shear waves // Philos. Mag. 2009. V. 89, N 33. P. 3059–3074. DOI: 10.1080/14786430903179570.
11. **Dineva P., Gross D., Mueller R., et al.** Dynamic stress and electric field concentration in a functionally graded piezoelectric solid with a circular hole // Z. angew. Math. Mech. 2011. Bd 91, N 2. S. 110–124. DOI: 10.1002/zamm.201000140.
12. **Miao X. Y., Li G. Q.** Analysis of piezoelectric plates with a hole using nature boundary integral equation and domain decomposition // Engng Anal. Boundary Elements. 2014. V. 40. P. 71–77. DOI: 10.1016/j.enganabound.2013.11.012.
13. **Liu D. K., Hu C.** Scattering of flexural waves and dynamic stress concentrations in Mindlin thick plates with a cutout // Acta Mech. Sinica. 1996. V. 12, N 2. P. 169–185. DOI: 10.1007/BF02486795.
14. **Pao Y. H.** Diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations / Y. H. Pao, C. C. Mow. N. Y.: Crane Russak, 1973.

*Поступила в редакцию 4/XII 2019 г.,
после доработки — 4/XII 2019 г.
Принята к публикации 2/III 2020 г.*
