

УДК 532.546

## **СВЧ-нагрев потока жидкости при вынужденном обтекании плоской пластины в условиях нестационарного радиационно-конвективного теплообмена\***

**В.В. Саломатов<sup>1,2</sup>, Е.М. Пузырев<sup>3</sup>, А.В. Саломатов<sup>4</sup>**

<sup>1</sup>*Институт теплофизики им. С.С.Кутателадзе СО РАН, Новосибирск*

<sup>2</sup>*Новосибирский государственный университет*

<sup>3</sup>*Алтайский государственный технический университет, Барнаул*

<sup>4</sup>*ОАО «АК Транснефть», Москва*

E-mail: salomatov.vv@mail.ru, pem-energo@list.ru, salomatov@ak.transneft.ru

Исследован класс нелинейных задач нестационарного радиационно-конвективного теплообмена при вынужденном ламинарном обтекании плоской пластины потоком жидкости в условиях микроволнового воздействия с малой глубиной проникновения. Решения этих задач осуществлено с применением эффективных асимптотических процедур на последовательных стадиях нестационарного и стационарного радиационно-конвективного теплообмена на теплоизлучающей поверхности горизонтальной пластины. «Сшивка» нестационарной и установившейся частей решений выполнена на характеристике «продольная координата–время». Построенные на этих принципах решения надежно согласуются с точными решениями при предельных значениях таких параметров, как малая и большая интенсивность внешнего теплового воздействия, малые и большие времена и др. Погрешность решений не выходит за пределы 1–7 %. По мере удаления от передней кромки пластины за счет теплоизлучения происходит вырождение конвективного теплообмена от значений, характерных для граничного условия второго рода, до величин, свойственных граничному условию первого рода. Отмечено сильное влияние на характер изменения поверхностной температуры и числа Нуссельта комплексного параметра СВЧ и теплового излучений. Важным достоинством развиваемого метода решения данного класса внешних задач является то, что еще до проведения сложных расчетов удастся провести исчерпывающий анализ фундаментальных закономерностей изучаемых процессов. При этом, несмотря на ряд вводимых исходных упрощений, последние существенно не сказываются на точности конечных результатов, гарантируя надежную количественную информацию. Разработанный метод может быть расширен также на режимы вынужденной конвекции с линейной зависимостью физических свойств от температуры при помощи преобразования А.А. Дородницына. Для подтверждения адекватности построенной математической модели проведено экспериментальное исследование стационарного радиационно-конвективного теплообмена при вынужденном обтекании плоской пластины. Результаты сравнения теоретических и опытных данных показывают их достаточное соответствие. Это еще раз подтверждает эффективность разработанного метода построения теоретических решений нелинейных задач вынужденной конвекции с использованием асимптотических процедур.

**Ключевые слова:** СВЧ-излучение, нестационарный радиационно-конвективный нагрев, число Нуссельта, число Старка, число Фурье, число Рейнольдса, пограничный слой, вынужденное течение.

---

\* Работа выполнена за счет средств, полученных от ФАНО России.

### Введение

В современных условиях сверхвысокочастотное (СВЧ) излучение, обладающее специфическими и уникальными свойствами, находит все возрастающее применение в различных областях техники и технологиях. Еще более многообещающими являются перспективы дальнейшего расширения наиболее востребованных направлений развития исследований по тематике СВЧ [1, 2]. Создание и успешная эксплуатация новых высокоинтенсивных и высокотемпературных конструкций СВЧ-назначения невозможны без знания фундаментальных закономерностей протекающих в них процессов. Исключительно актуальной является проблема отвода поглощенной СВЧ-энергии в условиях нестационарного радиационно-конвективного теплообмена. Особую сложность представляет учет радиационной составляющей теплового потока, так как она является нелинейным элементом в математических моделях. Комбинированный теплообмен на сегодняшний день рассматривается как взаимодействие теплоизлучения с другими видами переноса тепла. Типы такого взаимодействия подразделяются следующим образом [3]:

- а) теплоизлучение проявляет свое действие во всех точках излучающе-поглощающе-рассеивающего объема;
- б) взаимосвязь теплоизлучения с другими составляющими переноса тепла имеет место на граничных поверхностях теплообмена.

Задачи вида «а» являются наиболее сложными в теории теплообмена. Они исследуются в основном с помощью численных методов. Аналитические приемы пока мало распространены при решении таких задач. Применение аналитических методов оказывается более успешным к задачам типа «б». Наиболее распространенным приемом при их решении является рассмотрение нестационарного теплообмена на двух последовательных стадиях: неустановившейся и установившейся со сшивкой этих решений на характеристике «координата–время»

Теоретическому рассмотрению задач микроволнового нагрева при вынужденном движении потока жидкости около горизонтальной поверхности в условиях нестационарного радиационно-конвективного теплообмена посвящена настоящая статья.

### 1. Постановка задачи

Плоская пластина с малым термическим сопротивлением обтекается под нулевым углом атаки стабилизированным потоком вязкой, теплопроводной, диэлектрической жидкости с постоянными физическими свойствами при отсутствии диссипации (рис. 1).



Рис. 1. Схема микроволнового нагрева вынужденного потока жидкости при сбросе поглощенной СВЧ-энергии в условиях нестационарного радиационно-конвективного теплообмена.

Как показывают исследования, для большинства реальных задач этого класса, выполненных методом возмущений [4], достаточно ограничиться при теоретических подходах моделью пограничного слоя [5].

Во внешней зоне гидродинамического и теплового пограничных слоев поток обладает скоростью  $U_\infty$  и температурой  $T_\infty$ . Подводимая к жидкости поверхностная плотность теплового потока  $q_w$  формируется за счет поглощения микроволновой энергии поверхностным слоем по причине малой глубины проникновения. Она выражается в виде произведения

$$q_w = A \cdot S, \quad (1)$$

где  $S$  — плотность потока СВЧ-излучения, Вт/м<sup>2</sup>;  $A$  — коэффициент поглощения СВЧ-излучения. Глубина проникновения электромагнитной энергии  $h$  рассчитывается по зависимости [1]

$$h = 9,55 \cdot 10^9 / (f \sqrt{\varepsilon \operatorname{tg} \delta}), \quad (2)$$

где  $f$  — частота электромагнитного поля, Гц;  $\operatorname{tg} \delta = \varepsilon''/\varepsilon'$  — тангенс угла диэлектрических потерь,  $\varepsilon'$  — действительная часть комплексной диэлектрической проницаемости,  $\varepsilon''$  — мнимая часть комплексной диэлектрической проницаемости. Подводимое тепло  $q_w$  рассеивается конвекцией в теплоносителе и излучением через диатермичную среду к окружающей среде с температурой  $T_e$ . Начально-краевая задача сохранения массы, импульса и энергии при ламинарном течении в приближении пограничного слоя имеет вид [5]

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (5)$$

при следующих граничных условиях:

для  $y = 0$

$$u = v = 0, \quad (6)$$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} = \tau_w, \quad (7)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = q_w - \varepsilon \delta_0 (T_w^4 - T_e^4) \equiv q_k; \quad (8)$$

для  $y = \delta$

$$u = U_\infty; \quad (9)$$

$$\partial u / \partial y = 0; \quad (10)$$

для  $y = \delta_T$

$$T = T_\infty, \quad (11)$$

$$\partial T / \partial y = 0; \quad (12)$$

и начальных условиях:

$$t = 0, \quad (13)$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad T = T_\infty, \quad u = U_\infty. \quad (14)$$

Здесь  $x$  — продольная координата, м;  $y$  — поперечная координата, м;  $t$  — время, с;  $u, v$  — продольная и поперечная составляющие скорости, м/с;  $T, T_\infty, T_w, T_e$  — температура текущая, внешняя, на стенке и окружающей среды соответственно, К;  $q_w, q_k$  — плотность потока тепла поверхностная и конвективная соответственно, Вт/м<sup>2</sup>;  $U_\infty$  — скорость набегающего потока, м/с;  $\tau_w$  — касательное напряжение трения, н/м<sup>2</sup>;  $\delta_r, \delta_t$  — толщина пограничного слоя гидродинамического и теплового соответственно, м;  $g$  — ускорение земного притяжения, м/с<sup>2</sup>;  $\beta_t$  — коэффициент объемного расширения, К<sup>-1</sup>;  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности, Вт/м·К;  $a$  — коэффициент температуропроводности, м<sup>2</sup>/с;  $\sigma_0$  — постоянная Стефана–Больцмана, Вт/(м<sup>2</sup>·К<sup>4</sup>);  $\varepsilon$  — степень черноты поверхности,  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости, м<sup>2</sup>/с;  $\Theta = T/T_\infty, \Theta_w = T_w/T_\infty, \Theta_e = T_e/T_\infty$  — безразмерная температура текущая, на стенке и окружающей среды;  $Sk = \varepsilon\sigma_0 T_\infty^3 x / \lambda$  — число Старка,  $Re = U_\infty x / \nu$  — число Рейнольдса,  $Fo = at/x^2$  — число Фурье,  $Nu = q_k x / (\lambda(T_w - T_\infty))$  — число Нуссельта,  $Pr = \nu/a$  — число Прандтля,  $l$  — длина пластины, м;  $\beta = AS + \varepsilon\sigma_0 T_e^4 / (\varepsilon\sigma_0 T_e^4)$  — комплексный параметр СВЧ и теплового излучений,  $X = x/l$  — безразмерная продольная координата,  $Y = y/l$  — безразмерная поперечная координата,  $\Delta_r = \delta_r/l$  — безразмерная толщина гидродинамического пограничного слоя,  $\Delta_t = \delta_t/l$  — безразмерная толщина теплового пограничного слоя,  $U = u/U_\infty$  — безразмерная продольная скорость,  $V = v/U_\infty$  — безразмерная поперечная скорость,  $Ki_k = q_k x / (\lambda T_\infty)$  — число Кирпичева конвективное,  $Ki_w = ASx / (\lambda T_\infty)$  — число Кирпичева поверхностное.

Отметим, что аналогичную постановку имеет задача и для жидкости, не пропускающей теплового излучения, которая нагревается СВЧ-поверхностным тепловым потоком в связи с малой глубиной проникновения электромагнитного излучения (рис. 2). Точное аналитическое решение сформулированной задачи (3)–(14) из-за присущих ей нелинейностей не представляется возможным. Наиболее востребованным в этом случае считается построение приближенных решений. Будем считать, что сложный процесс теплопереноса проходит через определенные последовательные стадии [3], а именно:

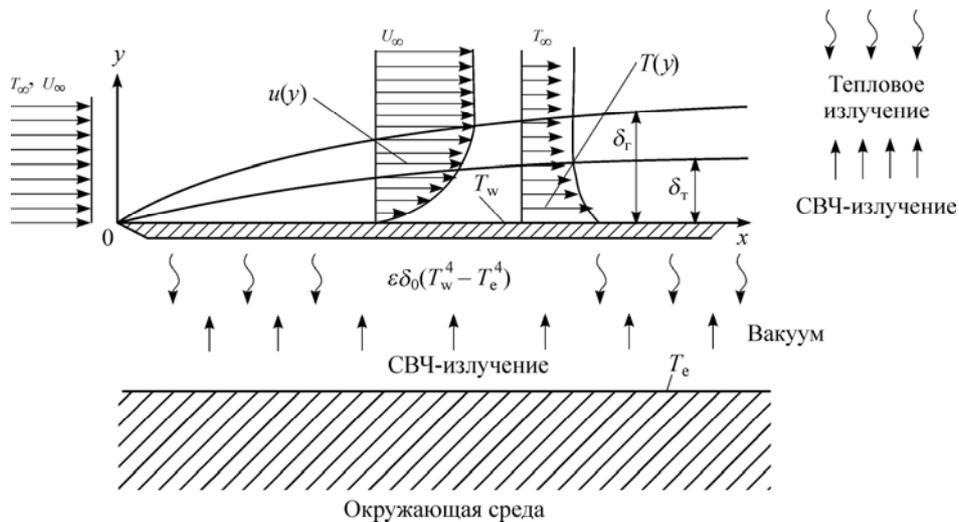


Рис. 2. Схема микроволнового нагрева вынужденного потока жидкости, не пропускающей теплового излучения, при сбросе поглощенной СВЧ-энергии в условиях нестационарного радиационно-конвективного теплообмена.

неустановившуюся:

$$\frac{DT}{Dt} \equiv \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (15)$$

переходную:

$$\frac{DT}{Dt} \equiv \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (16)$$

и стационарную:

$$\frac{DT}{Dt} \equiv u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \quad (17)$$

с соответствующими начальными и граничными условиями. При этом на первой стадии теплообмен будет управляться чисто молекулярным механизмом теплопереноса и описываться как процесс нестационарной теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (18)$$

Конвективные члены в начальной фазе нестационарного процесса не играют решающей роли и такое приближение вполне оправдано [6]. В заключительной стадии теплообмен контролируется молярным механизмом переноса. Здесь нестационарный член имеет малый вес. Уравнение энергии для этой стадии приобретает вид

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (19)$$

Переходная область из-за ее сложности и непродолжительности «стягивается в точку». Такой прием широко распространен в исследованиях конвективного теплообмена [7]. Общее решение определится после «сшивки» этих двух частных решений вдоль характеристики, проходящей в плоскости  $x-t$ .

Основная трудность при математическом построении решений задач типа (3)–(14) связана с нелинейностями. В связи с этим возникает необходимость применения приближенного анализа. Во-первых, такие решения имеют весьма компактную форму, не содержащую суммы бесконечных рядов, что востребовано при экспресс-анализе и оперативных расчетах. Во-вторых, нет необходимости в нахождении собственных чисел и собственных функций.

## 2. Нестационарная стадия теплообмена

Постановка начально-краевой задачи для нестационарной стадии в безразмерных переменных имеет вид

$$\frac{\partial \Theta}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2}, \quad (20)$$

$$Fo = 0, \quad \Theta = 1, \quad (21)$$

$$Y = 0, \quad \partial \Theta / \partial Y = Ki_k \equiv Ki_w - Sk(\Theta_w^4 - \Theta_e^4), \quad (22)$$

$$Y = \Delta_T, \quad \partial \Theta / \partial Y = 0. \quad (23)$$

Будем решать систему уравнений (20)–(23) с помощью асимптотических процедур. Схема построения асимптотических разложений базируется на анализе трансформированных по Лапласу уравнений (20)–(23). Используется следующее свойство преобразования Лапласа: малым числам  $Fo$  соответствуют большие значения параметра преобразования  $s$ , и наоборот, для больших чисел  $Fo$  свойственны малые значения параметра преобразования  $s$ .

Переведем систему уравнений (20)–(23) в пространство изображений, используя интегральное соотношение

$$\Theta_L(s) = \int_0^{\infty} \Theta e^{-sFo} dFo. \quad (24)$$

В результате получим

$$\Theta_L - \frac{1}{s} = \frac{d}{dY} \left( \frac{d\Theta_L}{dY} \right), \quad (25)$$

$$\frac{\partial \Theta_L}{\partial Y} = \text{Ki}_{\text{rL}}(s), \quad \text{при } Y = 0, \quad (26)$$

$$\partial \Theta_L / \partial Y = 0 \quad \text{при } Y = \Delta_r. \quad (27)$$

Решение (25) с учетом (26), (27) запишем следующим образом:

$$\Theta_L - (1/s) = \text{Ki}_k(s) F(Y, s), \quad (28)$$

где  $F(Y, s)$  — передаточная функция.

### 2.1. Асимптотика решений для малых чисел Fo (большие $s$ )

На начальной стадии нестационарного теплообмена процесс переноса из-за конечной скорости распространения теплового возмущения развивается, как в полубесконечном массиве. Тогда систему дифференциальных уравнений в изображениях (25)–(27) можно представить следующим образом:

$$\Theta_L - \frac{1}{s} = \frac{d}{dY} \left( \frac{d\Theta_L}{dY} \right), \quad (29)$$

$$\frac{d\Theta_L}{dY} = \text{Ki}_{\text{rL}}(s) \quad \text{при } Y = 0, \quad (30)$$

$$d\Theta_L / dY = 0 \quad \text{при } Y \rightarrow \infty. \quad (31)$$

Перепишем решение системы уравнений (29)–(31) в виде (28), где передаточная функция  $F(Y, s)$  представляется в виде асимптотического разложения

$$F(Y, s) \approx \varphi_1(Y, s) \frac{e^{-\sqrt{s}Y}}{\sqrt{s}} + \varphi_2 \frac{e^{-2\sqrt{s}Y}}{s} + \dots + \varphi_n \frac{e^{-n\sqrt{s}Y}}{s^n}. \quad (32)$$

Подставляя (32) в основное уравнение (29), используя уравнения граничных условий (30) и (31) и приравнявая члены при одинаковых степенях с экспонентой, получим следующую цепочку уравнений для определения  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ :

$$\varphi_1''(Y, s) - s\varphi_1(Y, s) = 0, \quad (a)$$

$$\varphi_2''(Y, s) - s\varphi_2(Y, s) = 0, \quad (b)$$

.....

$$\varphi_1'(0, s) = \sqrt{s}, \quad \varphi_1'(\infty, s) = 0, \quad (c)$$

$$\varphi_2'(0, s) = 0, \quad \varphi_2'(\infty, s) = 0, \quad (d)$$

.....

Очевидно, при больших  $s$  основная роль принадлежит первому члену разложения. Вес последующих членов постоянно уменьшается. Тогда при известных найденных выражениях  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  можно записать решение для изображения температурного поля:

$$\Theta - 1/s \approx \text{Ki}_{\text{rL}}(s) e^{-\sqrt{s}(Y-2)} + \dots \quad (33)$$

Возвращаясь в пространство оригиналов, используя теорему о свертке, можем выразить температурную функцию

$$\Theta - 1 \approx \int_0^{Fo} Ki_k(\eta) \frac{(Y-2)}{\sqrt{\pi}(Fo-\eta)} \exp\left[-\frac{(Y-2)}{4(Fo-\eta)}\right] d\eta + \dots \quad (34)$$

Так как число  $Ki_k$  под интегралом содержит нелинейность в виде закона Стефана–Больцмана, то возможно получение лишь приближенного решения уравнения (34). С этой целью аппроксимируем  $Ki_k(\eta)$  в окрестности  $\eta \approx Fo$  рядом Тейлора:

$$Ki_k(\eta) \approx Ki_k(Fo) + (\eta - Fo)Ki'_k(Fo) + \dots, \quad (35)$$

где ' означает производную по времени. После интегрирования (34) получим выражение для расчета температурного поля с учетом двух членов асимптотического разложения

$$\begin{aligned} \Theta(Y, Fo) - 1 \approx & Ki_k(Fo)\sqrt{\pi Fo} \operatorname{erfc}\left(\frac{Y-2}{2\sqrt{Fo}}\right) + Ki'_k(Fo)\frac{(Y-2)}{2\sqrt{\pi}} \times \\ & \times \left\{ 2\sqrt{Fo} \exp\left[-\frac{Y-2}{4\sqrt{Fo}}\right]^2 - (Y-2)\sqrt{\pi} \operatorname{erfc}\left(\frac{Y-2}{2}\sqrt{Fo}\right) \right\} + \dots \end{aligned} \quad (36)$$

Из (36) видно, что каждый последующий член имеет более высокий порядок малости. Тогда, ограничиваясь первым членом, получим алгебраическое уравнение четвертой степени относительно  $\Theta_w$

$$\frac{\Theta_w - 1}{Ki_w - Sk(\Theta_w^4 - \Theta_e^4)} \approx 2\sqrt{Fo} \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} + 2i \operatorname{erfc} \frac{1}{\sqrt{Fo}} \right) + \dots, \quad (37)$$

действительный положительный корень которого выражается в радикалах.

Для построения решений повышенной точности можно учесть следующий член асимптотического разложения с производной  $Ki'_k(\Theta_w)$ . Знание температурного поля (36) позволяет записать число Нуссельта в виде

$$Nu(Fo) \approx \frac{1}{\sqrt{\frac{Fo}{\pi}} + 2\sqrt{Fo} + i \operatorname{erfc} \frac{1}{\sqrt{Fo}} - \frac{Fo}{2} - \left[ \left( \frac{Fo}{3\pi} + \frac{Fo\sqrt{Fo}}{4\pi} \right) \frac{dKi_k}{d\Theta_w} \right] / \left( 1 - \sqrt{\frac{Fo}{\pi}} \cdot \frac{dKi_k}{d\Theta_w} \right)}. \quad (38)$$

Анализируя полученное решение (38), можно констатировать, что с ростом интенсивности внешнего теплообмена  $dKi_k/d\Theta_w$  происходит уменьшение числа Нуссельта. Так, в начальные моменты времени ( $Fo \rightarrow 0$ ) получаются предельные решения, соответствующие теплопроводности полуограниченного массива:

$$Nu(Fo) = \sqrt{\frac{\pi}{Fo}} \quad \text{при} \quad \frac{dKi_k}{d\Theta_w} \rightarrow 0 \quad (39)$$

и

$$Nu(Fo) = \frac{1,3}{\sqrt{Fo}} \quad \text{при} \quad \frac{dKi_k}{d\Theta_w} \rightarrow \infty. \quad (40)$$

Эти результаты демонстрируют, что с увеличением величины  $dKi_k/d\Theta_w$  процесс конвективного теплообмена вырождается от граничных условий второго рода к граничным условиям первого рода. Погрешность полученных формул не превышает 3 % от точных значений, приведенных в работе [8]. Случай радиационного охлаждения в среду нулевой

температуры при малых Fo допускает автомодельное решение как для поверхностной температуры

$$\frac{\Theta_w - 1}{\Theta_w} = 2Z + \frac{8}{3} \cdot \frac{Z^2}{1+4Z}, \quad (41)$$

так и для числа Нуссельта

$$\text{Nu}(\text{Fo}) \sqrt{\frac{\text{Fo}}{\pi}} = \frac{1}{1+4Z/[3(1+4Z)]}, \quad (42)$$

где  $Z = \text{Sk} \sqrt{\frac{\text{Fo}}{\pi}} \Theta_w^3$  — автомодельная переменная. Отметим, что с ростом  $Z$  уменьшаются как поверхностная температура, так и число Нуссельта.

## 2.2. Асимптотика решений при больших числах Fo (малые s)

Построим решение задачи нестационарного теплообмена для больших чисел Фурье. Выразим для этого передаточную функцию  $F(x, s)$  в (28) в виде разложения по малому параметру  $s$

$$F(Y, s) \approx \gamma_0(Y, s) + s\gamma_1(Y, s) + s^2\gamma_2(Y, s) + \dots \quad (43)$$

Подставляя выражение (43) в основное уравнение (20), приравнивая члены при одинаковых степенях  $s$ , получим связанную систему уравнений для нахождения  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ :

$$\frac{d}{dY} \left( \frac{d\gamma_0}{dY} \right) = 0, \quad \frac{d}{dY} \left( \frac{d\gamma_1}{dY} \right) = \gamma_0, \quad \frac{d}{dY} \left( R \frac{d\gamma_2}{dY} \right) = \gamma_1 \dots \quad (44)$$

Каждому уравнению из (44) требуется два граничных условия для нахождения двух констант интегрирования. Первую константу найдем из условия (23):

$$\gamma'_0(Y = \Delta_m) = 0, \quad \gamma'_1(Y = \Delta_m) = 0, \quad \gamma'_2(Y = \Delta_m) = 0 \dots \quad (45)$$

Вторую константу найдем из интегральных соотношений:

$$\int_0^{\Delta_T} \frac{d}{dY} \left( R \frac{d\gamma_0}{dY} \right) dY = 0, \quad \int_0^{\Delta_T} \frac{d}{dY} \left( \frac{d\gamma_1}{dY} \right) dY = \int_0^{\Delta_T} \gamma_0 dY, \quad \int_0^{\Delta_T} \frac{d}{dY} \left( \frac{d\gamma_2}{dY} \right) dY = \int_0^{\Delta_T} \gamma_1 dx. \quad (46)$$

По найденным выражениям  $\gamma_0(Y, s), \gamma_1(Y, s), \gamma_2(Y, s) \dots$  и общему решению (28) в изображениях можно вернуться в область оригиналов. В результате температурная функция с учетом трех членов асимптотического разложения примет вид

$$\begin{aligned} \Theta - 1 \approx & \int_0^{\text{Fo}} \text{Ki}_k(\eta) d\eta + \text{Ki}_k(\text{Fo}) \left[ \frac{(Y - \Delta_T)^2}{2} - \frac{\Delta_T^2}{6} \right] + \\ & + \frac{1}{12} \cdot \frac{d\text{Ki}_k}{d\text{Fo}} \left[ \frac{(Y - \Delta_T)^4}{2} - (Y - \Delta_T)^2 + \frac{7}{30} \right] + \dots \end{aligned} \quad (47)$$

Используя граничные условия при  $Y = \Delta_T, \Theta = 1$ , а также принимая  $Y = 0, \Theta = \Theta_w$ , выразим безразмерную толщину теплового пограничного слоя  $\Delta_T$  через конвективный тепловой поток  $\text{Ki}_k$  и температуру поверхности, ограничиваясь двумя членами разложения:

$$\Delta_T = 2/\text{Ki}_k, \quad (48)$$

где  $\text{Ki}_k = q_k x / (\lambda(T_w - T_\infty))$ .

Полагая в (47), что  $Y = 0$ ,  $\Theta = \Theta_w$ , приходим к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно температуры поверхности  $\Theta_w$ , решив которое, получим

$$3Sk^2Fo \approx \frac{(\Theta_w - 1)}{(\beta - \Theta_w^4)^2} + 2 \int_1^{\Theta_w} \frac{(\Theta_w - 1)d\Theta_w}{(\beta - \Theta_w^4)^2}. \quad (49)$$

Смысл параметра  $\beta = (AS + \varepsilon\sigma_0 T_e^4) / (\varepsilon\sigma_0 T_e^4)$  можно выяснить, рассматривая условие на поверхности пластины

$$q_w = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} + \varepsilon\sigma_0(T_w^4 - T_e^4) \equiv q_k + \varepsilon\sigma_0(T_w^4 - T_e^4) \quad (50)$$

при  $q_k = 0$ . Рассмотрение показывает, что величина  $\sqrt[4]{\beta}$  представляет собой предельную температуру при описанных условиях. Температура поверхности при нестационарном теплообмене изменяется в пределах  $\Theta_w = 1 \div \sqrt[4]{\beta}$ . На базе теоретического решения (49) существует возможность проведения более глубокого анализа при рассмотрении предельных случаев теплообмена, в частности, при малых и больших Fo. С этой целью оценим вклад отдельных составляющих решения. При малых Fo термическое сопротивление прогретого теплового пограничного слоя мало, поэтому  $\Theta_w \rightarrow 1$ . Во втором предельном случае, когда рассматриваемое термическое сопротивление пограничного слоя значительно, теплообмен осуществляется преимущественно теплоизлучением и  $\Theta_w \rightarrow \sqrt[4]{\beta}$ . В соответствии с указанным, будем использовать правило Лопиталья [9]:

$$\lim_{\Theta_w \rightarrow 1} 2 \int_0^{\Theta_w} \frac{\Theta_w - 1}{(\beta - \Theta_w^4)^2} d\Theta_w \Big/ \left( \frac{(\Theta_w - 1)^2}{(\beta - \Theta_w^4)^2} \right) = \begin{cases} \frac{0}{0} \\ \frac{\infty}{\infty} \end{cases} = \lim_{\Theta_w \rightarrow 1} 1 / \left( 1 - \frac{4\Theta_w^3(\Theta_w - 1)}{\beta - \Theta_w^4} \right) \begin{cases} 1, & \Theta_w \rightarrow 1 \\ 0, & \Theta_w \rightarrow \sqrt[4]{\beta} \end{cases}. \quad (51)$$

Из (51) следует, что относительный вклад интеграла с течением времени падает от 1 до 0. Специфическое поведение решения для температуры влияет также и на число Нуссельта:

$$Nu(Fo) \approx \frac{1}{\sqrt{3Fo}} \left[ 1 + \int_1^{\Theta_w} \frac{(\Theta_w - 1)}{(\beta - \Theta_w^4)^2} d\Theta_w \Big/ \left( \frac{(\Theta_w - 1)^2}{(\beta - \Theta_w^4)^2} \right) \right]^{1/2}. \quad (52)$$

Это влияние сводится к следующему. Нестационарный теплообмен при граничных условиях второго рода  $Nu\sqrt{Fo} = \sqrt{2/3}$  при малых Fo вырождается постепенно к граничным условиям первого рода  $Nu\sqrt{Fo} = 1/\sqrt{3}$  при больших Fo. Важно отметить, что эти предельные решения с погрешностью до 7% совпадают с соответствующими точными решениями, приведенными в монографии [10].

Отметим, что встречающийся в (51), (52) интеграл выражается в элементарных функциях [11]:

$$\int \frac{(\Theta_w - 1)d\Theta_w}{(\beta - \Theta_w^4)^2} = \frac{\Theta_w(\Theta_w - 1)}{4\beta(\beta - \Theta_w^4)} + \frac{1}{8\beta\sqrt{\beta}} \ln \frac{\sqrt{\beta} + \Theta_w^2}{\sqrt{\beta} - \Theta_w^2} - \frac{3\sqrt[4]{\beta}}{16\beta^2} \left[ \ln \frac{\sqrt[4]{\beta} - \Theta_w}{\sqrt[4]{\beta} + \Theta_w} + 2\text{arctg} \frac{\Theta_w}{\sqrt[4]{\beta}} \right]. \quad (53)$$

Наиболее простой вид имеют решения при нестационарном охлаждении жидкости излучением в окружающую среду нулевой температуры. Такие задачи встречаются, например, в криогенной технике. В этом случае  $\beta = 0$  и выражения (49), (52) примут вид

$$3Sk^2Fo \approx \frac{1}{21} + \frac{1 + 4\Theta_w - 6\Theta_w^2}{21\Theta_w^8}, \quad (54)$$

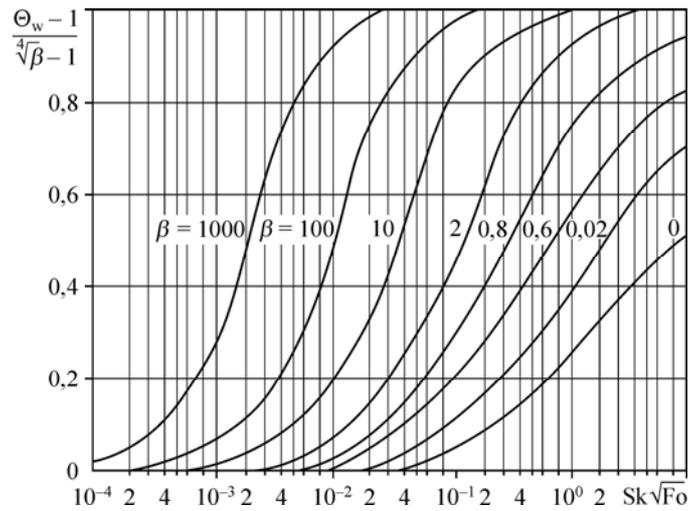


Рис. 3. Влияние комплексного параметра СВЧ и теплового излучения  $\beta$  на температуру поверхности при вынужденном обтекании пластины.

$$\text{Nu}(\text{Fo})\sqrt{3\text{Fo}} = \sqrt{\frac{6\Theta_w - 7\Theta_w^2 + \Theta_w^8}{21(1 - \Theta_w)}} + 1. \quad (55)$$

На рис. 3, 4 приведены расчетные графики, построенные на основе зависимостей (49), (52). На них демонстрируются изменения поверхностной температуры и числа Нуссельта во времени. Из графиков также следует, что комплексный параметр воздействия СВЧ-излучения и теплового излучения  $\beta$  существенно влияет на динамику процесса: с ростом его величины переходная область сужаясь, смещается в сторону малых значений  $\text{Sk}^2\text{Fo}$ . На координатных осях отложены температурный комплекс  $(\Theta_w - \Theta_0) / (\sqrt[4]{\beta} - \Theta_0)$  и комплекс по Нуссельтам  $(\text{Nu} - \text{Nu}_T) / (\text{Nu}_q - \text{Nu}_T)$ , где  $\text{Nu}_T$  и  $\text{Nu}_q$  — числа Нуссельта при граничных условиях первого и второго рода соответственно.

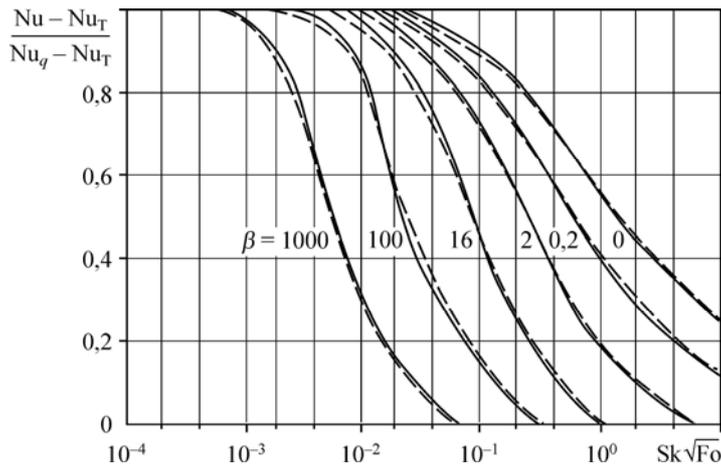


Рис. 4. Изменение числа Нуссельта при вынужденном обтекании плоской пластины при нестационарном режиме теплообмена при разных значениях комплексного параметра СВЧ и тепловых излучений  $\beta$ .

### 3. Стационарный режим теплообмена

Во второй стадии рассматривается режим установившегося теплообмена, который сменяет режим нестационарного теплообмена. В этом случае доминирует молярный механизм переноса, который определяется в основном конвективными членами в (4), (19). Из-за наличия нелинейностей в задаче стационарного конвективного теплообмена, а именно: в уравнении сохранения импульса (4) и граничном условии радиационно-конвективного типа (8), получение строгих решений ограничено, и здесь главный путь — построение приближенных решений. Получение стационарных решений связано с решением следующих уравнений:

— гидродинамическая задача:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (56)$$

при  $y = 0$

$$u = v = 0, \quad (57)$$

$$\mu (\partial u / \partial y) = \tau_w \quad (58)$$

при  $y = \delta_r$

$$u = U_\infty, \text{ если } x \leq 0, \quad (59)$$

$$\partial u / \partial y = 0; \quad (60)$$

— тепловая задача:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (61)$$

при  $y = 0$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = q_w - \varepsilon \delta_0 (T_w^4 - T_e^4) \equiv q_k, \quad (62)$$

$$T = T_\infty, \text{ если } x \leq 0, \quad (63)$$

при  $y = \delta_r$

$$T = T_\infty, \quad (64)$$

$$\partial T / \partial y = 0. \quad (65)$$

Линеаризацию гидродинамической задачи (56)–(60) проведем введением эффективной скорости

$$U_{\text{эф}}(x) \equiv \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) / \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (66)$$

В основе (66) лежит приближение Озеена [5]. Асимптотика решения рассматриваемой задачи не отличается от подхода, изложенного в п. 2.2. С учетом двух членов асимптотического разложения для продольной скорости имеем

$$u - U_\infty \cong \frac{\nu}{\delta_r} \int_0^x \tau_w(\eta) dy - \frac{\tau_w(x)}{\delta_r} \left[ \frac{3(\delta_r - y)^2 - \delta_r^2}{6} \right] + \dots \quad (67)$$

Из (67) следует выражение для касательного напряжения трения по стенке  $\tau_w = 2\mu U_\infty / \delta_r$ , которому соответствует профиль скорости

$$\frac{u}{U_\infty} = \frac{y}{\delta_r} \left( 2 - \frac{y}{\delta_r} \right). \quad (68)$$

Тогда для нахождения толщины динамического пограничного слоя имеем интегральное уравнение

$$\int_0^x \frac{dx}{\delta_T} \cong \frac{\delta_T U_\infty}{18\nu}. \quad (69)$$

Из решения (69) с учетом условия  $\delta_T = 0$  при  $x = 0$  следует

$$\delta_T(x) = 6\sqrt{\nu x/U_\infty}. \quad (70)$$

Построение асимптотического решения стационарной тепловой задачи (61)–(65) не отличается от предыдущей гидродинамической задачи. Оставляя два члена асимптотического разложения для температурного поля, в результате имеем

$$T - T_\infty \cong \frac{a}{\lambda \delta_T} \int_0^x q_k(\eta) d\eta + \frac{q_k}{6\lambda} \left[ \frac{(y - \delta_T)^2}{2} - \frac{\delta_T^2}{6} \right], \quad (71)$$

Из (71) с учетом  $y = \delta_T$  и  $T = T_w$  следует

$$T_w - T_\infty = q_k \delta_T / (2\lambda), \quad (72)$$

а сам профиль температуры внутри теплового пограничного слоя приобретает вид

$$T - T_\infty = \frac{q_k \delta_T}{2\lambda} \left( 1 - \frac{y}{\delta_T} \right)^2.$$

Привлекая интегральное уравнение (71) при условии  $y = \delta_T$ ,  $T = T_\infty$ , получим

$$\int_0^x q_k dx = q_k^2 \delta_T / (6a). \quad (73)$$

Далее с использованием (66) в приближении

$$U_{\text{эф}}(x) = \frac{U_\infty}{2} \left\{ 2 \frac{\delta_T}{\delta_T} - \left( \frac{\delta_T}{\delta_T} \right)^2 - \frac{d\delta_T/dx}{d\delta_T/dx} \left[ \left( \frac{\delta_T}{\delta_T} \right)^2 - \frac{2}{3} \left( \frac{\delta_T}{\delta_T} \right)^3 \right] \right\} \quad (74)$$

преобразуем (73) к виду

$$\int_0^x \frac{(T_w - T_\infty) dx}{\delta_T U_{\text{эф}}(x)} = \frac{(T_w - T_\infty) \delta_T}{6a}, \quad (75)$$

приближенным решением которого является выражение

$$\delta_T(x) = 6 \sqrt{\frac{xa}{U_\infty}} C(\text{Pr}). \quad (76)$$

Здесь  $C(\text{Pr})$  является функцией  $\delta_T/\delta_T$ , которая достаточно точно аппроксимируется следующим образом [5]:

$$\delta_T/\delta_T = \text{Pr}^{-1/3}. \quad (77)$$

Теперь

$$U_{\text{эф}} = U_\infty \frac{1}{2\sqrt{\text{Pr}}} = \frac{U_\infty}{3} H(\text{Pr}), \quad (78)$$

где  $H = 3/(2\sqrt[3]{\text{Pr}})$ .

Решая интегральное уравнение (73) при известной эффективной скорости (78), получим выражение для определения безразмерной поверхностной температуры пластины

$$\frac{9Sk_x^2}{Re_x Pr H(Pr)} = \frac{\Theta_w - 1}{(\beta - \Theta_w^4)^2} + 2 \int_0^{\Theta_w} \frac{(\Theta_w - 1)d\Theta_w}{(\beta - \Theta_w^4)^2}. \quad (79)$$

По известной температуре поверхности пластины можно определить стационарное число Нуссельта по длине пластины:

$$Nu(x) = \frac{1}{3} \sqrt{Re_x Pr H(Pr)} \sqrt{1 + 2 \int_0^{\Theta_w} \frac{(\Theta_w - 1)^2}{(\beta - \Theta_w^4)^2} / \left( \frac{(\Theta_w - 1)^2}{(\beta - \Theta_w^4)^2} \right)}. \quad (80)$$

Нетрудно видеть, что по мере удаления от передней кромки пластины происходит вырождение конвективного теплообмена от значений, характерных для граничных условий второго рода  $Nu = \sqrt{2 Re} \sqrt[3]{Pr} / 3$ , к граничным условиям первого рода  $Nu = 0,333 \sqrt{Re} \sqrt[3]{Pr}$ . Эти предельные решения с отклонениями до 1 % согласуются с точными решениями, приведенными в работе [7].

В случае охлаждения жидкости в среду с нулевой температурой решения задачи имеют наиболее простой вид:

$$\frac{9Sk_x^2}{Re_x Pr H(Pr)} = \frac{1}{21} + \frac{1 + 4\Theta_w - 6\Theta_w^2}{21\Theta_w^2}, \quad (81)$$

$$Nu(x) = \sqrt{\left( \frac{Re_x Pr H(Pr)}{3} \right)^{-1}} = \sqrt{\frac{6\Theta_w - 7\Theta_w^2 - \Theta_w^8}{21(\Theta_0 - \Theta_w)^2} + 1}. \quad (82)$$

На рисунках 5 и 6 показано влияние комплексного параметра СВЧ и теплового излучений на распределение поверхностной температуры и числа Нуссельта. Приводится также сопоставление с данными монографии [3]. Полученные результаты позволяют сделать вывод, что комплексный параметр СВЧ и теплового излучений  $\beta$  существенно влияет на характер изменения  $\Theta_w$  и  $Nu$ . Приближение высоких порядков в методике, опубликованной в работе [3], при больших значениях  $\beta$ , как следует из рисунков, дает существенное отклонение от действительных расчетных кривых. Увеличение же порядка точности связано с чрезвычайными трудностями. В случае линеаризованного граничного условия влияние  $\beta$  вообще не ощущается. Используя преобразование А.А. Дородницына [12], полученные решения для вынужденной конвекции можно распространить и на среды с линейной зависимостью свойств от температуры.

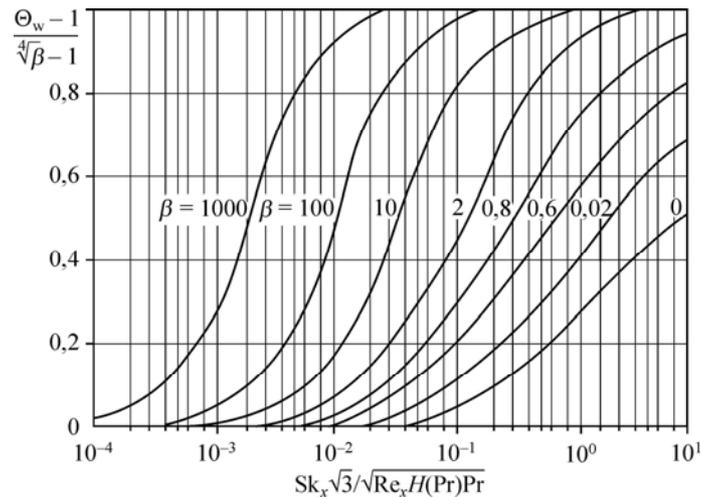


Рис. 5. Влияние СВЧ и теплового излучения на температуру поверхности при вынужденном обтекании пластины.

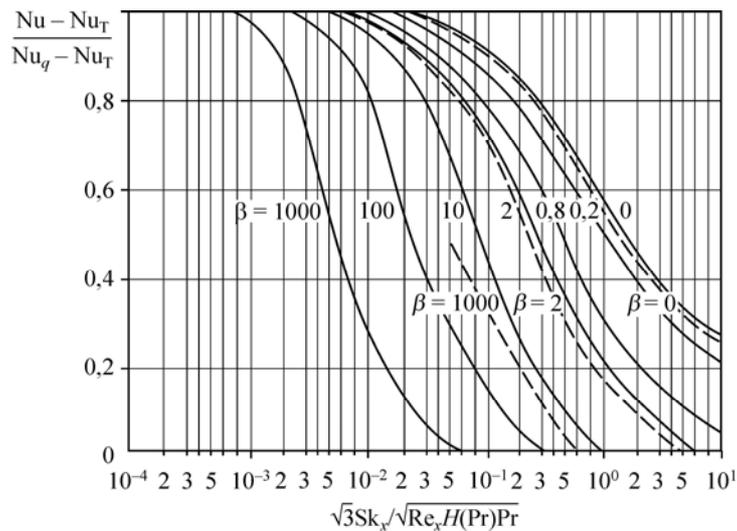


Рис. 6. Влияние СВЧ и теплового излучения на конвективный теплообмен при вынужденном обтекании пластины. Штриховые линии — данные работы [3].

#### 4. Согласование неустановившейся и стационарной стадий теплообмена

Для определения пространственно-временных областей существования неустановившегося и стационарного решений и границы их сшивки будем требовать выполнения равенства поверхностных температур в нестационарном и стационарном решениях, то есть привлекая (49) и (79). В результате можно получить соотношение для точки стабилизации  $x_s$ , в которой происходит переход нестационарного решения в установившееся:

$$x_s = \frac{U_\infty t}{3} H(Pr) Pr \approx \frac{U_\infty t}{\sqrt[3]{Pr^2}}. \quad (83)$$

Таким образом, в задаче СВЧ-нагрева при вынужденной конвекции лучистый теплообмен и микроволновое воздействие практически не влияют на скорость движения границы перехода нестационарного решения в стационарное. Из (83) также видно, что скорость движения фронта тепловой волны в плоскости  $x-t$  определяется числом Прандтля, возрастая с его уменьшением.

#### 5. Экспериментальная проверка адекватности математической модели СВЧ-нагрева потока жидкости в условиях стационарного радиационно-конвективного теплообмена при вынужденной конвекции

Для подтверждения правильности выбранных упрощений математической модели было проведено экспериментальное исследование стационарного радиационно-конвективного теплообмена при вынужденном обтекании. Подробное описание лабораторной установки, опытного стенда, схемы эксперимента, выбранных датчиков и вторичных приборов, техники экспериментальных работ, процедуры измерений, результатов обработки экспериментальных данных, оценки погрешности является предметом отдельной публикации и здесь подробно не рассматривается.

Теоретическое решение данной задачи в приближении пограничного слоя позволяет выразить основные характеристики этого процесса в более компактном виде в зависимости только от двух переменных  $\beta$  и  $Sk/\sqrt{Re}$ , то есть

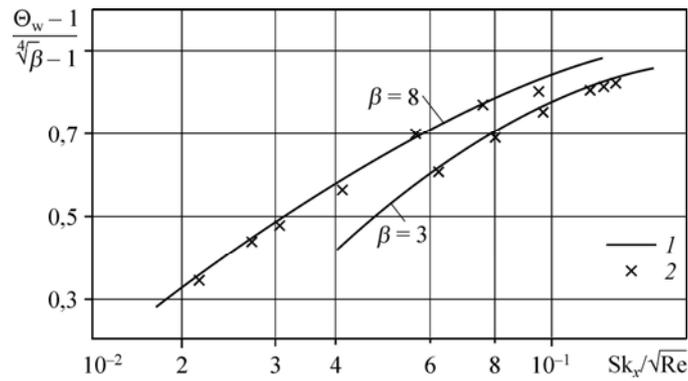


Рис. 7. Расчетные (49) (1) и экспериментальные данные (2) авторов по температуре поверхности пластины в условиях вынужденного обтекания ( $\beta = 3, 8$ ).

$$\frac{Nu}{\sqrt{Re}} = f\left(\frac{Sk}{\sqrt{Re}}, \beta\right), \tag{84}$$

$$\frac{\Theta_w - 1}{\sqrt[4]{\beta - 1}} = f_2\left(\frac{Sk}{\sqrt{Re}}, \beta\right), \tag{85}$$

и нет необходимости в рассмотрении более общих критериальных связей, которые можно получить анализом подобия.

На рис. 7 и 8 приведено сравнение полученных авторами расчетных и экспериментальных значений поверхностной температуры и числа Нуссельта. Графики показывают надежное согласование результатов с погрешностью, не превышающей максимальных значений по температуре

$$6,3 \% > P_\Theta > 2,2 \% \tag{86}$$

и по числу Нуссельта

$$9,3 \% > P_{Nu} > 2,6 \% . \tag{87}$$

Это еще раз подтверждает правильность выбора математической модели и правомерность упрощений, которые вводились при теоретическом анализе задачи.

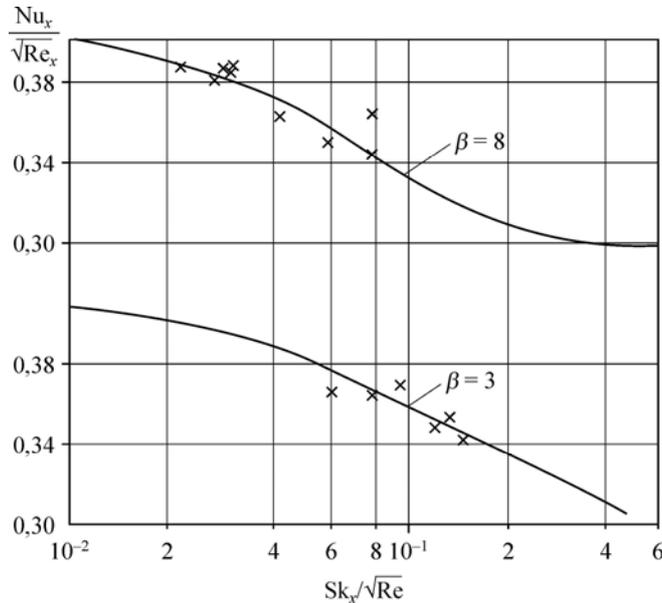


Рис. 8. Расчетные (79) (1) и экспериментальные (2) значения чисел Нуссельта при вынужденном обтекании пластины ( $\beta = 3$  и 8).

### Заключение

Показана важность задач нестационарного радиационно-конвективного теплообмена при внешнем обтекании поверхностей с учетом микроволнового и теплового излучений для ряда технологических режимов, а также при проектировании высокоинтенсивных и высокотемпературных устройств СВЧ. Однако нелинейность уравнений переноса и граничных условий не позволяет применять для решения задач нестационарного радиационно-конвективного теплообмена мощные классические методы математической физики. В то же время численные и экспериментальные исследования встречаются с большими трудностями. Все это требует разработки эффективных приближенных методов.

Анализ нестационарного радиационно-конвективного теплообмена при вынужденном обтекании пластины с целью получения расчетных зависимостей привел к необходимости приближенного представления процесса в виде двух последовательных стадий: неустановившейся и стационарной. На основе такого подхода были разработаны асимптотические методы решения указанных задач при малых и больших временах, малых и больших значениях интенсивности теплообмена и др. Также была проведена «сшивка» этих решений на характеристике «координата–время». Подчеркнем, что полученные решения в предельных случаях находятся в надежном соответствии с точными решениями, приводимыми в литературе, в пределах погрешности 1–7 %.

По полученным зависимостям удалось без проведения сложных и громоздких расчетов выполнить детальный анализ и выявить основные закономерности процессов. Было показано, что теплоизлучение приводит к смене закона конвективного теплообмена от граничных условий второго рода к граничным условиям первого рода. Существенную роль при этом играет комплексный параметр СВЧ и теплового излучений  $\beta^\circ$ .

При разработке математической модели и ее приближенном решении был использован ряд упрощений, таких как линеаризация конвективных членов, нахождение констант интегрирования из интегральных условий, построение асимптотических разложений и ряд других. Сопоставление полученных результатов с экспериментальными и теоретическими данными других исследователей свидетельствует о адекватности этой модели реальному процессу. Полученные результаты решения нестационарных задач радиационно-конвективного теплообмена в пограничном слое при вынужденной конвекции могут быть обобщены также на случай зависимости физических свойств жидкости по линейному закону при помощи преобразования А.А. Дороницына.

### Список литературы

1. Диденко А.Н. СВЧ-энергетика. Теория и практика. М.: Наука, 2003. 446 с.
2. СВЧ-энергетика / Под ред. Э. Окресса. В 3-х томах. М.: Мир, 1971.
3. Сесс Р.Д. Сб. Проблемы теплообмена. М.: Атомиздат, 1967. 523 с.
4. Ван-Дайк. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 296 с.
5. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: ИЛ, 1972. 712 с.
6. Кошкин В.К. Нестационарный теплообмен. М.: Машиностроение, 1973. 249 с.
7. Эккерт Е.Р., Дрейк Р.М. Теория тепло- и массообмена. М.: Госэнергоиздат, 1962. 681 с.
8. Лойцянский Л.Г. Ламинарный пограничный слой. М.: Физматиздат, 1962. 479 с.
9. Гусак А.А., Гусак Е.М. Справочник по высшей математике. Минск: Наука и техника, 1991. 480 с.
10. Цой П.В. Методы расчета отдельных задач тепломассопереноса. М.: Энергия, 1971. 414 с.
11. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: ГИФМЛ, 1962. 1100 с.
12. Дороницын А.А. Сборник теоретических работ по аэродинамике. М.: Оборонгиз, 1957. 604 с.

*Статья поступила в редакцию 3 октября 2017 г.,  
после переработки — 26 октября 2017 г.*