УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО АНТИПЛОСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА

В. Д. Бондарь

Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск
E-mail: bond@hydro.nsc.ru

Исследовано антиплоское деформирование цилиндрического упругого тела с учетом геометрической и физической нелинейности и действия потенциальных сил. Решается нелинейная краевая задача для двух независимых деформаций. Для квадратичного упругого потенциала Ривлина — Сондерса, моделирующего конечные упругие деформации, найдены аналитическое решение и соответствующая ему нагрузка. Решена задача при задании смещений на границе. Рассмотрен случай слабой физической нелинейности.

Ключевые слова: перемещение, деформации, напряжения, потенциал, нелинейность, краевая задача, аналитическое решение.

При исследовании деформирования упругого тела, когда деформации конечны, а поведение материала отклоняется от закона Гука, для обеспечения достаточной точности необходимо отказаться от ограничений линейной теории и рассматривать деформацию с учетом геометрической и физической нелинейности. В настоящей работе данный подход реализуется применительно к нелинейному антиплоскому деформированию изотропного цилиндрического тела с учетом действия объемных сил, рассматриваемому в переменных актуального состояния.

При антиплоском деформировании цилиндрического тела перемещение параллельно образующей и не меняется вдоль тела [1, 2]. Рассмотрим эту деформацию в рамках модели несжимаемого нелинейно-упругого тела, которую составляют уравнения равновесия, закон Мурнагана, зависимость упругого потенциала от базисных инвариантов деформации, выражение для компонент и инвариантов деформации в зависимости от перемещений и условие несжимаемости. В актуальных переменных x_1, x_2, x_3 ($x_1 = x$, $x_2 = y$ — поперечные, $x_3 = z$ — продольная координаты) эти соотношения имеют вид [3, 4]

$$F_k + \frac{\partial P_{kl}}{\partial x_l} = 0; \tag{1}$$

$$P_{kl} = -q_* \delta_{kl} + (\delta_{km} - 2E_{km}) \frac{\partial U}{\partial E_{lm}}; \tag{2}$$

$$U = U(E_1, E_2, E_3); \tag{3}$$

$$2E_{kl} = \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \frac{\partial u_m}{\partial x_l}; \tag{4}$$

$$E_1 = E_{nn}, \qquad 2E_2 = E_{nn}E_{mm} - E_{nm}E_{mn}, \qquad E_3 = |E_{kl}|; \tag{5}$$

$$2E_1 - 4E_2 + 8E_3 = 0, \tag{6}$$

где q_* — лагранжев множитель; U — упругий потенциал; E_1, E_2, E_3 — базисные инварианты деформации; F_k, u_k — компоненты объемной силы и перемещения; P_{kl}, E_{kl} —

компоненты напряжений Коши, деформаций Альманси; δ_{kl} — символ Кронекера (индексы принимают значения 1, 2, 3; по повторяющимся индексам проводится суммирование).

Предполагается, что перемещение имеет только осевую составляющую, не меняющуюся вдоль тела, а объемные силы потенциальны с потенциальной энергией V, которая, как и перемещение, зависит только от поперечных координат:

$$u_1 = 0, \qquad u_2 = 0, \qquad u_3 = w(x,y); \tag{7}$$

$$F_1 = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad F_2 = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad F_3 = -\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \qquad V = V(x,y). \tag{8}$$

При перемещениях (7) деформации (4) выражаются через осевое смещение нелинейными формулами (геометрическая нелинейность) и являются функциями поперечных координат:

$$\begin{gathered} 2E_{11} = -\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2, \qquad 2E_{22} = -\Big(\frac{\partial w}{\partial y}\Big)^2, \qquad 2E_{33} = 0, \\ 2E_{12} = -\frac{\partial w}{\partial x}\,\frac{\partial w}{\partial y}, \qquad 2E_{31} = \frac{\partial w}{\partial x}, \qquad 2E_{32} = \frac{\partial w}{\partial y} \qquad (E_{kl} = E_{kl}(x,y)). \end{gathered} \tag{9}$$

Из (9) после исключения смещения следуют уравнения совместности антиплоской деформации

$$2E_{11} = -(2E_{31})^2, \qquad 2E_{22} = -(2E_{32})^2, \qquad 2E_{33} = 0, \qquad 2E_{12} = -2E_{31}2E_{32}; \tag{10}$$

$$\frac{\partial E_{32}}{\partial x} - \frac{\partial E_{31}}{\partial y} = 0. \tag{11}$$

Конечные уравнения (10) выражают деформации через независимые компоненты E_{31}, E_{32}, а дифференциальное уравнение (11) связывает независимые компоненты между собой.

Базисные инварианты деформации (5) представляются через перемещение:

$$2E_1 = -|\nabla w|^2, \qquad 4E_2 = -|\nabla w|^2, \qquad 8E_3 = 0. \tag{12}$$

Инварианты (12) не зависят от продольной координаты, неположительные, представимы через линейный инвариант и удовлетворяют условию несжимаемости (6):

$$E_k = E_k(x,y), \qquad E_k \leqslant 0, \qquad E_k = E_k(E_1), \qquad 2E_1 - 4E_2 + 8E_3 = 0, \tag{13}$$

т. е. при антиплоской деформации материал ведет себя как несжимаемый, что оправдывает использование модели несжимаемого тела.

Упругий потенциал (3), являющийся функцией базисных инвариантов деформации, в силу свойств инвариантов (13) зависит только от первого инварианта, при этом тензорный градиент потенциала по деформациям является шаровым тензором:

$$\begin{gathered} U(E_1, E_2, E_3) = U(E_1), \qquad E_1 = E_{lm}\delta_{ml}, \\ \frac{\partial E_1}{\partial E_{lm}} = \delta_{ml}, \qquad \frac{\partial U}{\partial E_{lm}} = U'(E_1)\delta_{ml}. \end{gathered} \tag{14}$$

В условиях (14) закон Мурнагана (2) представляется квазилинейной зависимостью напряжений от деформаций (физическая нелинейность):

$$P_{kl} = -q\delta_{kl} - U'(E_1)2E_{kl}, \qquad q = q_* - U', \tag{15}$$

где q — гидростатическое давление. В дальнейшем принимается, что подобно перемещению и силовому потенциалу давление зависит только от поперечных координат: $q = q(x,y)$. Тогда функциями этих координат будут и напряжения (15): $P_{kl} = P_{kl}(x,y)$.

Согласно уравнениям совместности деформаций (10) компоненты деформации выражаются через две независимые компоненты E_{31}, E_{32}, тем самым через них выражается и линейный инвариант деформации. Следовательно, компоненты напряжений (15) представимы через давление и независимые деформации:

$$\begin{gathered} P_{11} = -q + U'(E_1)(2E_{31})^2, \qquad P_{22} = -q + U'(E_1)(2E_{32})^2, \qquad P_{33} = -q, \\ P_{12} = U'(E_1)2E_{31}2E_{32}, \qquad P_{31} = -U'(E_1)2E_{31}, \qquad P_{32} = -U'(E_1)2E_{32}; \end{gathered} \tag{16}$$

$$2E_1 = 2E_{nn} = -(2E_{31})^2 - (2E_{32})^2. \tag{17}$$

Покажем, что при антиплоском деформировании давление может быть представлено через силовой и упругий потенциалы, а независимые деформации определены из нелинейной краевой задачи. Для этого, учитывая выражения для сил (8) и напряжений (16), а также зависимость этих величин только от поперечных координат, запишем уравнения равновесия (1) в развернутом виде. С учетом третьего уравнения равновесия

$$\frac{\partial P_{31}}{\partial x} + \frac{\partial P_{32}}{\partial y} = -\frac{\partial U' 2E_{31}}{\partial x} - \frac{\partial U' 2E_{32}}{\partial y} = 0 \tag{18}$$

первые два уравнения представим в виде

$$\begin{gathered} \frac{\partial\,(P_{11} - V)}{\partial x} + \frac{\partial P_{12}}{\partial y} = -\frac{\partial\,(q+V)}{\partial x} + \frac{\partial 2E_{31}(U' 2E_{31})}{\partial x} + \frac{\partial 2E_{31}(U' 2E_{32})}{\partial y} = \\ = -\frac{\partial\,(q+V)}{\partial x} + U'\Big(2E_{31}\,\frac{\partial 2E_{31}}{\partial x} + 2E_{32}\,\frac{\partial 2E_{31}}{\partial y}\Big) = 0; \end{gathered} \tag{19}$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial P_{12}}{\partial x} + \frac{\partial\,(P_{22} - V)}{\partial y} = -\frac{\partial\,(q+V)}{\partial y} + \frac{\partial 2E_{32}(U' 2E_{32})}{\partial y} + \frac{\partial 2E_{32}(U' 2E_{31})}{\partial x} = \\ = -\frac{\partial\,(q+V)}{\partial y} + U'\Big(2E_{32}\,\frac{\partial 2E_{31}}{\partial y} + 2E_{31}\,\frac{\partial 2E_{32}}{\partial x}\Big) = 0. \end{gathered} \tag{20}$$

Преобразуя равенства (19) и (20) с использованием уравнения совместности деформаций (11), имеем

$$-\frac{\partial(q+V)}{\partial x} + \frac{U'}{2}\,\frac{\partial}{\partial x}\big[(2E_{31})^2 + (2E_{32})^2\big] = 0,$$

$$-\frac{\partial(q+V)}{\partial y} + \frac{U'}{2}\,\frac{\partial}{\partial y}\big[(2E_{31})^2 + (2E_{32})^2\big] = 0.$$

Учитывая представление линейного инварианта деформации (17), запишем вторые слагаемые в этих уравнениях в виде

$$\frac{U'}{2}\,\frac{\partial}{\partial x}\big[(2E_{31})^2 + (2E_{32})^2\big] = -U'\,\frac{\partial E_1}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x},$$

$$\frac{U'}{2}\,\frac{\partial}{\partial y}\big[(2E_{31})^2 + (2E_{32})^2\big] = -U'\,\frac{\partial E_1}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

и придадим уравнениям окончательный вид

$$\frac{\partial}{\partial x}(q + V + U) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial y}(q + V + U) = 0.$$

В результате интегрирования этих уравнений давление выражается через силовой и упругий потенциалы с точностью до аддитивной постоянной

$$q = h - V - U, \qquad h = \mathrm{const}\,. \tag{21}$$

Согласно (16), (21) постоянная может быть найдена по заданным потенциалам и осевой составляющей результирующей нагрузки в торцевом сечении S цилиндра

$$P_3 = \int\limits_S P_{33}\, dS = -\int\limits_S q\, dS = -Sh + \int\limits_S (V+U)\, dS, \qquad h = \frac{1}{S}\Big(\int\limits_S (V+U)\, dS - P_3\Big).$$

В отсутствие результирующей осевой нагрузки эта постоянная равна среднему значению потенциалов в поперечном сечении тела

$$h = \frac{1}{S}\int\limits_S (V+U)\, dS \qquad \text{при} \quad P_3 = 0, \tag{22}$$

а давление (21) в этом случае совпадает с отклонением суммы потенциалов от ее среднего значения.

Уравнение равновесия (18) и уравнение совместности деформаций (11) составляют нелинейную систему для независимых деформаций, определенную в сечении S тела:

$$\begin{gathered} \frac{\partial\,(U'E_{31})}{\partial x} + \frac{\partial\,(U'E_{32})}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial E_{32}}{\partial x} - \frac{\partial E_{31}}{\partial y} = 0, \\ U' = U'(E_1), \qquad E_1 = -2(E_{31}^2 + E_{32}^2). \end{gathered} \tag{23}$$

Представим эти уравнения в развернутом виде

$$H_1 = (U' - 4U''E_{31}^2)\,\frac{\partial E_{31}}{\partial x_1} - 4U''E_{31}E_{32}\Big(\frac{\partial E_{32}}{\partial x_1} + \frac{\partial E_{31}}{\partial x_2}\Big) + (U' - 4U''E_{32}^2)\,\frac{\partial E_{32}}{\partial x_2} = 0,$$

$$H_2 = \frac{\partial E_{32}}{\partial x_1} - \frac{\partial E_{31}}{\partial x_2} = 0$$

и поставим им в соответствие характеристическую матрицу второго порядка с элементами и определителем [5]

$$B_{kl} = \frac{\partial H_k}{\partial\,(\partial E_{3l}/\partial x_m)}\, v_m, \qquad B = \det\,(B_{kl}).$$

В данном случае

$$\begin{gathered} B_{11} = (U' - 4U''E_{31}^2)v_1 - 4U''E_{31}E_{32}v_2, \qquad B_{22} = v_1, \\ B_{12} = -4U''E_{31}E_{32}v_1 + (U' - 4U''E_{32}^2)v_2, \qquad B_{21} = -v_1, \\ B = B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21} = U'(v_1^2 + v_2^2) - 4U''(E_{31}v_1 + E_{32}v_2)^2. \end{gathered} \tag{24}$$

Из (24) следует, что когда первые две производные от упругого потенциала имеют разные знаки, определитель отличен от нуля:

$$\begin{aligned} B < 0 \qquad &\text{при} \quad U' < 0, \quad U'' \geqslant 0, \\ B > 0 \qquad &\text{при} \quad U' > 0, \quad U'' \leqslant 0. \end{aligned} \tag{25}$$

В этих случаях характеристическое уравнение $B = 0$ не имеет вещественных корней, следовательно, система уравнений (23) эллиптического типа. Для такой системы краевая задача с заданными граничными деформациями корректна.

Условие $B < 0$ в (25) выполняется, в частности, для квадратичного потенциала Ривлина — Сондерса, моделирующего большие упругие деформации несжимаемых резиноподобных материалов [2]:

$$U = aE_1^2 - bE_1 + c \qquad (a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0, \quad E_1 < 0),$$

$$U' = 2aE_1 - b < 0, \qquad U'' = 2a > 0. \tag{26}$$

(Этот потенциал обобщает линейный потенциал Муни $U = -bE_1 + c$ для тех же материалов, которому соответствует линейный закон Мурнагана.)

Если на границе L сечения S цилиндра заданы усилия p_k, то можно определить граничные значения независимых деформаций. Используя напряжения (16) и внешнюю боковую нормаль $(n_k) = (n_1, n_2, 0)$, из равенств $p_k = P_{kl} n_l$ получаем для этих деформаций нелинейную систему уравнений

$$\begin{gathered} p_1 = -qn_1 + 4U'E_{31}(E_{31}n_1 + E_{32}n_2), \qquad p_2 = -qn_2 + 4U'E_{32}(E_{31}n_1 + E_{32}n_2), \\ p_3 = -2U'(E_{31}n_1 + E_{32}n_2), \qquad q = h - V - U, \\ U = U(E_1), \qquad U' = U'(E_1), \qquad E_1 = -2(E_{31}^2 + E_{32}^2) \qquad \text{на} \quad L. \end{gathered} \tag{27}$$

Представим систему уравнений (27) в другой форме. Рассмотрим орты нормали (n_k), касательной (t_k) и бинормали (b_k) контура L и линейные комбинации независимых деформаций f_n, f_t, взаимно однозначно связанные с независимыми деформациями:

$$(n_k) = (n_1, n_2, 0), \qquad (t_k) = (t_1, t_2, 0) = (-n_2, n_1, 0), \qquad (b_k) = (0, 0, 1); \tag{28}$$

$$f_n = E_{31}n_1 + E_{32}n_2, \qquad f_t = E_{31}t_1 + E_{32}t_2 = -E_{31}n_2 + E_{32}n_2; \tag{29}$$

$$E_{31} = f_n n_1 - f_t n_2, \qquad E_{32} = f_n n_2 + f_t n_1 \qquad \text{на} \quad L. \tag{30}$$

Для естественных компонент контурной нагрузки (p_n, p_t, p_b) согласно (21), (27)–(29) имеем выражения

$$\begin{gathered} p_n = p_k n_k = V + U - h + 4U' f_n^2, \quad p_t = p_k t_k = 4U' f_n f_t, \quad p_b = p_k b_k = -2U' f_n, \\ U = U(E_1), \qquad U' = U'(E_1), \qquad E_1 = -2(E_{31}^2 + E_{32}^2) = -2(f_n^2 + f_t^2) \qquad \text{на} \quad L. \end{gathered} \tag{31}$$

Следовательно, на границе деформации E_{31}, E_{32} можно определить через f_n, f_t по формулам (30), а величины f_n, f_t — из второго и третьего соотношений в (31):

$$f_t = -p_t/(2p_b), \qquad p_b + 2f_n U'(E_1) = 0 \qquad (E_1 = -2f_n^2 - p_t^2/(2p_b^2)). \tag{32}$$

Первое равенство в (31) (с учетом решения f_t, f_n системы (32)) является ограничением на боковую нагрузку для реализации антиплоской деформации. В формулах (32) величина f_t определяется только нагрузкой, а f_n — как нагрузкой, так и видом упругого потенциала.

Для квадратичного потенциала (26) производная потенциала согласно (32) равна

$$U' = 2aE_1 - b = -b - a(4f_n^2 + p_t^2/p_b^2),$$

и второе равенство в (32) является неполным кубическим уравнением

$$f_n^3 + sf_n + t = 0, \qquad s = \frac{ap_t^2 + bp_b^2}{4ap_b^2}, \qquad t = -\frac{p_b}{8a} \qquad \Big(T = \frac{s^3}{27} + \frac{t^2}{4}\Big). \tag{33}$$

Так как $T > 0$, то (33) имеет единственный вещественный корень [6]

$$f_n = J_+ + J_-, \qquad J_\pm = \sqrt[3]{-t/2 \pm \sqrt{T}}. \tag{34}$$

При слабой физической нелинейности, когда в потенциале (26) коэффициент при квадратичном члене существенно меньше коэффициента при линейном: $k = a/b \ll 1$, выражение (34) можно линеаризировать по этому малому параметру. Для этого в уравнении (33) полагаем $a = kb$, $f_n = f_n^0 + kf_n^1$ и удерживаем в нем свободный и линейный по k члены:

$$8kbp_b^2(f_n^0)^3 + 2bp_b^2 f_n^0 + 2kb(p_b^2 f_n^1 + p_t^2 f_n^0) - p_b^3 = 0 \qquad (k = a/b).$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при k^0, k^1, получим уравнения, определяющие искомое приближение в виде

$$f_n = \frac{p_b}{2b}\Big(1 - k\,\frac{p_b^4 + b^2 p_t^2}{b^2 p_b^2}\Big). \tag{35}$$

Таким образом, при квадратичном потенциале (26) краевую задачу для независимых деформаций составляют уравнения (23) и краевые условия (30), правые части которых определяются формулами (32) и (34) (при слабой физической нелинейности (34) заменяется на (35)). Соотношения задачи не содержат силового потенциала, тем самым влияние потенциальных объемных сил сказывается на давлении и не сказывается на независимых деформациях.

Краевую задачу для независимых деформаций наряду с декартовыми можно представить в полярных координатах r, v, z ($x = r\cos v$, $y = r\sin v$, $z = z$). Компоненты нормали и деформации в этих системах координат связаны формулами

$$\begin{gathered} n_1 = n_r\cos v - n_v\sin v, \qquad n_2 = n_r\sin v + n_v\cos v, \qquad n_3 = n_z, \\ E_{11} = E_{rr}\cos^2 v + E_{vv}\sin^2 v - E_{rv}\sin 2v, \qquad E_{22} = E_{rr}\sin^2 v + E_{vv}\cos^2 v + E_{rv}\sin 2v, \\ E_{33} = E_{zz}, \qquad E_{31} = E_{zr}\cos v - E_{zv}\sin v, \qquad E_{32} = E_{zr}\sin v + E_{zv}\cos v, \\ E_{12} = (E_{rr} - E_{vv})\sin v\cos v + E_{rv}\cos 2v \qquad (E_{31}^2 + E_{32}^2 = E_{zr}^2 + E_{zv}^2). \end{gathered} \tag{36}$$

С учетом (10) и (36) цилиндрические компоненты деформации представляются через независимые компоненты E_{zr}, E_{zv} в виде

$$E_{rr} = -2E_{zr}^2, \qquad E_{vv} = -2E_{zv}^2, \qquad E_{zz} = 0, \qquad E_{rv} = -2E_{zr}E_{zv}. \tag{37}$$

В цилиндрических координатах закон Мурнагана связывает компоненты напряжений и деформаций формулами, аналогичными (15). Преобразование их с использованием соотношений (37) позволяет выразить компоненты напряжений через давление и независимые деформации в виде

$$\begin{gathered} P_{rr} = -q + U'(2E_{zr})^2, \qquad P_{vv} = -q + U'(2E_{zv})^2, \qquad P_{zz} = -q, \\ P_{rv} = U'2E_{zr}2E_{zv}, \qquad P_{zr} = -U'2E_{zr}, \qquad P_{zv} = -U'2E_{zv}, \\ U' = U'(E_1), \qquad E_1 = E_{rr} + E_{vv} + E_{zz} = -2(E_{zr}^2 + E_{zv}^2). \end{gathered} \tag{38}$$

Давление определяется выражением (21). Независимые цилиндрические деформации определяются уравнениями (23) после перехода к дифференцированию по полярным координатам по формулам

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos v\,\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin v}{r}\,\frac{\partial}{\partial v}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \sin v\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos v}{r}\,\frac{\partial}{\partial v}$$

и замены E_{31}, E_{32} на E_{zr}, E_{zv} согласно (36). В результате уравнения для независимых цилиндрических деформаций принимают вид

$$\begin{gathered} \frac{\partial\,(rU'E_{zr})}{\partial r} + \frac{\partial\,(U'E_{zv})}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial\,(rE_{zv})}{\partial r} - \frac{\partial E_{zr}}{\partial v} = 0, \\ U' = U'(E_1), \qquad E_1 = -2(E_{zr}^2 + E_{zv}^2). \end{gathered} \tag{39}$$

Из (29) и (36) следует, что величины f_n, f_t в цилиндрических координатах равны

$$f_n = E_{zr}n_r + E_{zv}n_v, \qquad f_t = -E_{zr}n_r + E_{zv}n_v. \tag{40}$$

Обращением этих формул устанавливаем, что краевые деформации выражаются соотношениями

$$E_{zr} = f_n n_r - f_t n_v, \qquad E_{zv} = f_n n_v + f_t n_r \qquad \text{на} \quad L, \tag{41}$$

в которых f_n, f_t определяются контурной нагрузкой и упругим потенциалом по формулам (32), (34) (или (32), (35) при слабой физической нелинейности).

Соотношения (39), (41) составляют краевую задачу для независимых цилиндрических деформаций. В ряде случаев она допускает простые аналитические решения.

Пусть деформации являются функциями одного полярного радиуса: $E_{zr}(r)$, $E_{zv}(r)$. Тогда функцией радиуса будет и производная упругого потенциала $U'(r)$. В этом случае уравнения (39) упрощаются:

$$\frac{d\,(rU'E_{zr})}{dr} = 0, \qquad \frac{d\,(rE_{zv})}{dr} = 0.$$

Эти уравнения интегрируются при любом виде упругого потенциала, и их решение содержит две произвольные постоянные

$$rE_{zv} = A, \qquad rU'E_{zr} = B, \qquad A = \text{const}, \qquad B = \text{const}, \tag{42}$$

при этом только E_{zr} зависит от вида потенциала.

При упругом потенциале (26) и его производной

$$U' = -b(1 - 2kE_1) = -b[1 + 4k(E_{zr}^2 + E_{zv}^2)] \qquad (k = a/b) \tag{43}$$

(b, k — упругие постоянные) деформация E_{zr} согласно (42), (43) должна определяться из неполного кубического уравнения (где вместо B введена постоянная $C = B/b$)

$$E_{zr}^3 + E_{zr}d + e = 0, \qquad d = \frac{r^2 + 4kA^2}{4kr^2}, \qquad e = \frac{C}{4kr} \qquad \Big(E = \frac{d^3}{27} + \frac{e^2}{4} > 0\Big), \tag{44}$$

имеющего единственное вещественное решение [6]. Таким образом, независимые деформации равны

$$E_{zv} = A/r, \qquad E_{zr} = I_+ + I_-, \qquad I_\pm = \sqrt[3]{-e/2 \pm \sqrt{E}}. \tag{45}$$

При слабой физической нелинейности ($k \ll 1$) величину E_{zr} в (45) в линейном по k приближении можно найти из приближенного уравнения (44):

$$E_{zr} = E_{zr}^0 + kE_{zr}^1, \qquad 4kr^2(E_{zr}^0)^3 + (r^2 + 4kA^2)(E_{zr}^0 + kE_{zr}^1) + Cr = 0,$$

приравняв к нулю коэффициенты при нулевой и первой степенях параметра. В итоге деформации (45) приближенно равны

$$E_{zv} = \frac{A}{r}, \qquad E_{zr} = -\frac{C}{r}\Big(1 - 4k\,\frac{A^2 + C^2}{r^2}\Big). \tag{46}$$

Решение (46) применим к задаче об относительном равновесии равномерно вращающегося с угловой скоростью ω полого цилиндра $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$ плотности ρ в отсутствие результирующей осевой торцевой нагрузки $P_3 = 0$ и с объемными силами (центробежными силами инерции) $F_1 = \rho\omega^2 x$, $F_2 = \rho\omega^2 y$ и определим в рассматриваемом приближении соответствующие давление, напряжения и боковую нагрузку.

В этом случае упругий и силовой потенциалы являются функциями полярного радиуса:

$$U = c + 2b\,\frac{A^2 + C^2}{r^2}\Big(1 + 2k\,\frac{A^2 - 3C^2}{r^2}\Big), \quad U' = -b\Big(1 + 4k\,\frac{A^2 + C^2}{r^2}\Big), \quad V = e - \frac{\rho\omega^2}{2}\,r^2. \tag{47}$$

Здесь $e = \mathrm{const}$, а постоянная h в (21), вычисленная при $P_3 = 0$, $c = 0$, $e = 0$ (что соответствует $U = 0$ при $E_1 = 0$ и $V = 0$ при $r = 0$), согласно (22) равна

$$h = 2b(A^2 + C^2)\Big(\frac{\lg(r_2^2/r_1^2)}{r_2^2 - r_1^2} + 2k\,\frac{A^2 - 3C^2}{r_1^2 r_2^2}\Big) - \frac{\rho\omega^2}{4}\,(r_1^2 + r_2^2).$$

При этом давление (21) выражается в виде

$$q = h + \frac{\rho\omega^2}{2}\,r^2 - 2b\,\frac{A^2 + C^2}{r^2}\Big(1 + 2k\,\frac{A^2 - 3C^2}{r^2}\Big). \tag{48}$$

В рассматриваемой задаче цилиндрические компоненты напряжений (38) с учетом (48) зависят только от полярного радиуса:

$$\begin{gathered}
P_{rr} = -\Big(h + \frac{\rho\omega^2}{2}\,r^2\Big) + \frac{2b}{r^2}\Big(A^2 - C^2 + 2k\,\frac{(A^2 + C^2)^2}{r^2}\Big), \qquad P_{rv} = AC\,\frac{4b}{r^2},\\
P_{vv} = -\Big(h + \frac{\rho\omega^2}{2}\,r^2\Big) + \frac{2b}{r^2}\Big(A^2 - C^2 - 6k\,\frac{(A^2 + C^2)^2}{r^2}\Big), \qquad P_{zr} = -C\,\frac{2b}{r},\\
P_{zz} = -\Big(h + \frac{\rho\omega^2}{2}\,r^2\Big) + \frac{2b}{r^2}\,(A^2 + C^2)\Big(1 + 2k\,\frac{A^2 - 3C^2}{r^2}\Big), \qquad P_{zv} = A\,\frac{2b}{r}\Big(1 + 4k\,\frac{A^2 + C^2}{r^2}\Big),
\end{gathered} \tag{49}$$

и, следовательно, они постоянны на боковой границе круговой трубы. Из формул (49) следует также, что влияние объемных сил сказывается на напряжениях растяжений-сжатий и не сказывается на напряжениях сдвигов. При этом физическая нелинейность ($k \neq 0$) влияет на напряжения как первого, так и второго вида.

Внешняя нормаль трубы направлена вдоль радиуса, поэтому компоненты нормали и граничные величины (40) имеют вид

$$\begin{gathered}
(n_r^{(1)}, n_v^{(1)}, n_z^{(1)}) = (-1, 0, 0), \quad r = r_1, \qquad (n_r^{(2)}, n_v^{(2)}, n_z^{(3)}) = (1, 0, 0), \quad r = r_2,\\
f_n^{(1)} = -E_{zr}^{(1)} = \frac{C}{r_1}\Big(1 - 4k\,\frac{A^2 + C^2}{r_1^2}\Big), \qquad f_t^{(1)} = -E_{zv}^{(1)} = -\frac{A}{r_1} \qquad \text{при} \quad r = r_1,\\
f_n^{(2)} = E_{zr}^{(2)} = -\frac{C}{r_2}\Big(1 - 4k\,\frac{A^2 + C^2}{r_2^2}\Big), \qquad f_t^{(2)} = E_{zv}^{(2)} = \frac{A}{r_2} \qquad \text{при} \quad r = r_2.
\end{gathered}$$

Этим деформациям и производной упругого потенциала (47) соответствует боковая нагрузка (31)

$$\begin{gathered}
p_b^{(1)} = \frac{2bC}{r_1}, \qquad p_t^{(1)} = \frac{4bAC}{r_1^2} \qquad \text{при} \quad r = r_1,\\
p_b^{(2)} = -\frac{2bC}{r_2}, \qquad p_t^{(2)} = \frac{4bAC}{r_2^2} \qquad \text{при} \quad r = r_2,
\end{gathered} \tag{50}$$

которая в рассматриваемом случае нечувствительна к нелинейности упругого потенциала. Компоненты нагрузки связаны соотношениями

$$p_b^{(1)}/p_b^{(2)} = -r_2/r_1, \qquad p_t^{(1)}/p_t^{(2)} = r_2^2/r_1^2,$$

в силу которых независимое значение имеет нагрузка на одной, например внутренней, границе. По этой нагрузке постоянные интегрирования A, C определяются в виде

$$A = r_1 p_t^{(1)}/(2p_b^{(1)}), \qquad C = r_1 p_b^{(1)}/(2b). \tag{51}$$

Таким образом, осесимметрической деформации (46) полого цилиндра соответствует поле напряжений (49), зависящее от полярного радиуса, и боковая нагрузка (50), в которой осевая и окружная составляющие обратно пропорциональны соответственно первой и второй степеням радиуса. Фигурирующие в этих формулах постоянные интегрирования определены равенствами (51).

При задании на границе тела перемещения задачу удобно решать в перемещениях. В декартовых координатах задача исследовалась в [7]; рассмотрим ее в полярных переменных.

Исходя из представлений декартовых компонент деформации через градиенты перемещения (9) и зависимостей между компонентами деформации в декартовой и полярной системах координат (36), получим

$$2E_{zr} = 2E_{31}\cos v + 2E_{32}\sin v = \frac{\partial w}{\partial x}\cos v + \frac{\partial w}{\partial y}\sin v,$$

$$2E_{zv} = -2E_{31}\sin v + 2E_{32}\cos v = -\frac{\partial w}{\partial x}\sin v + \frac{\partial w}{\partial y}\cos v.$$

Переходя в этих равенствах к дифференцированию по полярным координатам согласно формулам

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r}\cos v - \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\sin v}{r}, \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial r}\sin v + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\cos v}{r},$$

получим представление цилиндрических компонент деформации через градиенты перемещения

$$E_{zr} = \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial r}, \qquad E_{zv} = \frac{1}{2r}\frac{\partial w}{\partial v}. \tag{52}$$

Если подставить (52) в соотношения для деформаций (39), то второе соотношение обратится в тождество, а первое станет искомым уранением для перемещения в полярных координатах:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial r}\Big(rU'\frac{\partial w}{\partial r}\Big) + \frac{\partial}{\partial v}\Big(\frac{1}{r}U'\frac{\partial w}{\partial v}\Big) = 0,\\ U' = U'(E_1), \qquad E_1 = -\frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{\partial w}{\partial r}\Big)^2 + \frac{1}{r^2}\Big(\frac{\partial w}{\partial v}\Big)^2\Big].\end{gathered} \tag{53}$$

Получим осесимметричное решение этого уравнения. В этом случае перемещение зависит только от полярного радиуса, поэтому

$$w = w(t), \qquad t = r^2, \qquad \frac{\partial w}{\partial r} = 2r\frac{dw}{dt}, \qquad \frac{\partial w}{\partial v} = 0,$$

$$E_1 = -2t\Big(\frac{dw}{dt}\Big)^2, \qquad U' = U'(E_1) = U'(t), \qquad \frac{\partial U'}{\partial v} = 0$$

и уравнение (53) примет вид

$$\frac{d}{dt}\Big(tU'\frac{dw}{dt}\Big) = 0.$$

В результате интегрирования получим интеграл

$$tU'\frac{dw}{dt} = B, \qquad B = \mathrm{const}. \tag{54}$$

После использования квадратичного упругого потенциала (26) и замены постоянной B на C

$$U' = -b(1-2kE_1) = -b\Big[1+4kt\Big(\frac{dw}{dt}\Big)^2\Big], \qquad k=\frac{a}{b}, \qquad B=-bC=\mathrm{const}$$

интеграл (54) становится неполным кубическим уравнением для w_t

$$\Big(\frac{dw}{dt}\Big)^3 + u\,\frac{dw}{dt} + s = 0, \qquad u=\frac{1}{4kt}, \qquad s=-\frac{C}{4kt^2} \qquad \Big(S=\frac{u^3}{27}+\frac{s^2}{4}>0\Big), \tag{55}$$

которое имеет единственное вещественное решение [6]

$$\frac{dw}{dt} = N_+(t,C)+N_-(t,C), \qquad N_\pm(t,C) = \sqrt[3]{-s/2\pm\sqrt{S}}.$$

Отсюда само перемещение находится квадратурой

$$w=\int(N_+(t,C)+N_-(t,C))\,dt + D, \qquad C=\mathrm{const}, \quad D=\mathrm{const}\,. \tag{56}$$

Входящие в (56) постоянные определяются по граничным перемещениям, задаваемым на боковых поверхностях тела. В частности, когда упругий потенциал слабонелинейный ($k \ll 1$), для производной перемещения приближенное выражение можно получить из приближенного уравнения (55)

$$w_t = w_t^0 + kw_t^1, \qquad 4kt^2(w_t^0)^3 + t(w_t^0+kw_t^1) - C = 0$$

в виде

$$\frac{dw}{dt} = \frac{C}{t}\Big(1-4k\,\frac{C^2}{t}\Big),$$

откуда интегрированием находим перемещение

$$w = D + C\ln t + \frac{4kC^3}{t}, \qquad C=\mathrm{const}, \quad D=\mathrm{const}\,. \tag{57}$$

Применим решение (57) к задаче о деформировании круговой цилиндрической трубы $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, на боковых поверхностях которой заданы постоянные смещения

$$w=w_1 \quad \text{при} \quad t=t_1, \qquad w=w_2 \quad \text{при} \quad t=t_2. \tag{58}$$

Тогда условия (58) с учетом (57) приводятся к уравнениям для постоянных C, D

$$w_1 = D + C\ln t_1 + 4kC^3/t_1, \qquad w_2 = D + C\ln t_2 + 4kC^3/t_2.$$

Сложение и вычитание этих равенств дает соотношения, первое из которых определяет D через C, а второе является кубическим уравнением для C:

$$D = \frac{w_1+w_2}{2} - \frac{C}{2}\,\ln(t_1t_2) - 2kC^3\,\frac{t_1+t_2}{t_1t_2},$$

$$4k\,\frac{t_2-t_1}{t_1t_2}\,C^3 - C\ln\frac{t_2}{t_1} + w_2 - w_1 = 0.$$

В линейном по параметру k приближении постоянные имеют значения

$$C = \frac{w_2-w_1}{\ln(t_2/t_1)}\Big(1+4k\,\frac{t_2-t_1}{t_1t_2}\,\frac{(w_2-w_1)^2}{\ln^3(t_2/t_1)}\Big), \qquad t=r^2,$$

$$D = \frac{w_1+w_2}{2} - \frac{w_2-w_1}{2}\,\frac{\ln(t_1t_2)}{\ln(t_2/t_1)} - 2k\,\frac{t_1+t_2}{t_1t_2}\,\frac{(w_2-w_1)^3}{\ln^3(t_2/t_1)}\Big(1+\frac{t_2-t_1}{t_2+t_1}\,\frac{\ln(t_1t_2)}{\ln(t_2/t_1)}\Big).$$

Когда перемещение зависит от обеих полярных координат, упругий потенциал квадратичен, а $k \ll 1$, линейное по малому параметру приближение $w = w^0 + kw^1$ можно находить из приближенного уравнения (53)

$$\frac{\partial}{\partial r}\Big[r\,\frac{\partial w^0}{\partial r} + kr\Big(\frac{\partial w^1}{\partial r} - 2E_1^0\,\frac{\partial w^0}{\partial r}\Big)\Big] + \frac{\partial}{\partial v}\Big[\frac{1}{r}\,\frac{\partial w^0}{\partial v} + \frac{k}{r}\Big(\frac{\partial w^1}{\partial v} - 2E_1^0\,\frac{\partial w^0}{\partial v}\Big)\Big] = 0,$$

$$2E_1^0 = -\Big(\frac{\partial w^0}{\partial r}\Big)^2 - \Big(\frac{1}{r}\,\frac{\partial w^0}{\partial v}\Big)^2.$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при k^0, k^1, после соответствующих упрощений находим уравнения для составляющих перемещения

$$r\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\frac{\partial w^0}{\partial r}\Big) + \frac{\partial^2 w^0}{\partial v^2} = 0; \tag{59}$$

$$r\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\frac{\partial w^1}{\partial r}\Big) + \frac{\partial^2 w^1}{\partial v^2} = r^2\,\frac{\partial w^0}{\partial r}\,\frac{\partial 2E_1^0}{\partial r} + \frac{\partial w^0}{\partial v}\,\frac{\partial 2E_1^0}{\partial v}, \tag{60}$$

которые являются соответственно однородным и неоднородным гармоническими уравнениями. Уравнение (59) имеет решение

$$w^0 = r\sin(v + f), \qquad f = \mathrm{const},$$

которому соответствует $2E_1^0 = -1$. В результате (60) становится однородным уравнением, имеющим, в частности, решение

$$w^1 = gr\sin(v + f), \qquad g = \mathrm{const}, \quad f = \mathrm{const}\,.$$

Таким образом, приближенное решение уравнения (53), содержащее два параметра, имеет вид

$$w = w^0 + kw^1 = (1 + kg)r\sin(v + f) \qquad (g = \mathrm{const}, \quad f = \mathrm{const}). \tag{61}$$

Первое слагаемое в правой части в (61) (не содержащее параметра k) соответствует вкладу в перемещение линейного упругого потенциала, а второе отражает вклад физической нелинейности; при $kg \approx 1$ этот вклад сопоставим с вкладом линейного потенциала.

В задаче о деформировании цилиндрической трубы $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$ решению (61) соответствуют граничные смещения, изменяющиеся по синусоидальному закону:

$$w_1 = (1 + kg)r_1\sin(v + f), \qquad r = r_1, \qquad w_2 = (1 + kg)r_2\sin(v + f), \qquad r = r_2.$$

Граничные смещения пропорциональны радиусам: $w_1/w_2 = r_1/r_2$, поэтому достаточно рассматривать их на одной из границ, например на внутренней. На этой границе постоянная g определяет амплитуду w_1^* смещения, а постоянная f — полярный угол v_* его максимума: $r_1(1 + kg) = w_1^*$, $v_* + f = \pi/2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого тела. М.: Наука, 1988.
2. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
3. **Murnaghan F. D.** Finite deformations of an alastic solid // Amer. J. Math. 1939. V. 59, N 2. P. 235–260.
4. **Снеддон И. Н., Берри Д. С.** Классическая теория упругости. М.: Физматгиз, 1961.
5. **Петровский Н. Г.** Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз, 1961.
6. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике. М.: Наука, 1968.
7. **Бондарь В. Д.** Нелинейная антиплоская деформация упругого тела // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 2. С. 171–179.

Поступила в редакцию 29/XI 2004 г.