

РАЗРУШЕНИЕ ПРИ КРУЧЕНИИ КРУГЛОГО СТЕРЖНЯ С ТРЕЩИНОЙ ПО ДУГЕ ОКРУЖНОСТИ

Н. Б. Ромалис

(Воронеж)

Рассматривается задача о распространении трещины, имеющей форму дуги окружности, при кручении круглого стержня.

Получено выражение для коэффициента интенсивности напряжений в вершине трещины. Определяется локальное направление распространения трещины из надреза, перпендикулярного боковой поверхности стержня; используется подход, предложенный в работе [1].

1. Рассмотрим распространение трещины в круглом стержне единичного радиуса (фиг. 1).

Известно, что характеристикой, определяющей неустойчивое развитие трещины, является коэффициент интенсивности напряжений в вершине трещины. Условие неустойчивого роста трещины является условие Гриффита — Ирвина [2] $k = k_c$, т. е. неустойчивый рост трещины возникает тогда, когда коэффициент интенсивности напряжений k достигает некоторой критической величины k_0 , являющейся константой материала.

Согласно [3] при кручении

$$k = i \sqrt{2\tau\mu} \frac{f'(\zeta_0)}{\sqrt{\omega''(\zeta_0)}} \quad (1.1)$$

Здесь τ — угол закручивания на единицу длины; μ — модуль сдвига; $\omega(\zeta_0)$ — значение функции, отображающей данную область на круг $|\zeta| \leq 1$, в точке ζ_0 , соответствующей вершине трещины; $f(\zeta_0)$ — функция напряжений в точке ζ_0 .

Отображение области, представленной на фиг. 1, на круг $|\zeta| \leq 1$ осуществляется функцией

$$\omega(\zeta) = \frac{c}{a} \frac{1 + 2ai\zeta - \zeta^2 - 2b(1+i\zeta)\sqrt{2(1-\zeta^2)}}{\zeta^2 + 2ci\zeta - 1} \quad (1.2)$$

$$a = \frac{(1+\alpha)(1+\bar{\alpha})}{3-(\alpha+\bar{\alpha})+3\alpha\bar{\alpha}}, \quad b = \frac{1-\alpha\bar{\alpha}}{3-(\alpha+\bar{\alpha})+3\alpha\bar{\alpha}}, \quad \alpha = \alpha_0 + i\alpha_1, \quad \bar{\alpha} = \alpha_0 - i\alpha_1, \quad |\alpha| \leq 1$$

$$c = \frac{(1+\bar{\alpha})^2}{1-6\alpha+\bar{\alpha}^2}, \quad \alpha = \beta \frac{1-\bar{\beta}}{1-\beta}, \quad \beta = \beta_0 + i\beta_1, \quad \bar{\beta} = \beta_0 - i\beta_1, \quad |\beta| \leq 1$$

Координаты вершины трещины β_0 и β_1 связаны с длиной трещины s и ее радиусом r следующим образом:

$$\beta_0 = 1 - r \sin(s/r), \quad \beta_1 = r - r \cos(s/r)$$

При отображении вершина трещины $z = \beta$ переходит в точку $\zeta_0 = -i$. Знаменатель функции $\omega(\zeta)$ имеет корни

$$\zeta_1 = -i \frac{1-\bar{\alpha}-2(\bar{\alpha})^{1/2}}{1-\bar{\alpha}+2(\bar{\alpha})^{1/2}}, \quad \zeta_2 = -\frac{1}{\zeta_1}, \quad |\zeta_1| \leq 1, \quad |\zeta_2| \geq 1$$

Ветвь корня, входящего в (1.2), выбираем так, чтобы при $\zeta = \zeta_1$ числитель (1.2) обращался в нуль. Функция напряжений имеет вид [4]

$$f(\zeta) = -\frac{2bc\bar{c}}{a^2} \frac{i(1+i\zeta)(1+2ai\zeta-\zeta^2)\sqrt{2(1-\zeta^2)}}{(\zeta^2+2ci\zeta-1)(\zeta^2+2\bar{c}i\zeta-1)} + \frac{8b^2c\bar{c}}{\pi a^2} \frac{(1+i\zeta)^2(1-\zeta^2)}{(\zeta^2+2ci\zeta-1)(\zeta^2+2\bar{c}i\zeta-1)} \log \frac{1-\zeta}{1+\bar{\zeta}} + \frac{p}{\zeta-\zeta_1} + \frac{\bar{p}}{\zeta+\bar{\zeta}_1} \quad (1.3)$$

$$-\frac{p\zeta_2^2}{\zeta-\zeta_2}-\frac{\bar{p}\bar{\zeta}_2^2}{\zeta+\bar{\zeta}_2}+\text{const}, \quad \log \frac{1-\zeta}{1+\bar{\zeta}}=-2\left(\zeta+\frac{1}{3}\zeta^3+\frac{1}{5}\zeta^5+\dots\right)$$

$$p=\frac{8b^2c\bar{c}}{\pi a^2} \frac{(1+i\zeta_1)^2(1-\zeta_1^2)}{(\zeta_1-\zeta_2)(\zeta_1+\bar{\zeta}_1)(\zeta_1+\bar{\zeta}_2)} \log \frac{-1-\zeta_1}{1-\zeta_1}$$

Для величины τ в (1.1) имеем [5]

$$\tau = M/D, \quad D = \mu I + \mu D_0 \quad (1.4)$$

Здесь M — момент приложенных внешних сил, D — жесткость при кручении, I — полярный момент инерции площади поперечного сечения стержня относительно центра, величина D_0 определяется выражением (γ — окружность круга $|\zeta| \leq 1$)

$$D_0 = -\frac{1}{4} \int_{\gamma} \{f(\sigma) + \bar{f}(\bar{\sigma})\} d\{\omega(\sigma) \bar{\omega}(\bar{\sigma})\} =$$

$$= -\frac{1}{4} \int_{\gamma} \left\{ -\frac{2b^2c\bar{c}}{a^2} \frac{(1+i\sigma)(1+2ai\sigma-\sigma^2)}{(\sigma^2+2ci\sigma-1)(\sigma^2+2\bar{c}i\sigma-1)} (V\sqrt{2(\sigma^2-1)} + iV\sqrt{2(1-\sigma^2)}) + \right.$$

$$+ \frac{16b^2c\bar{c}}{\pi a^2} \frac{(1+i\sigma)^2(1-\sigma^2)}{(\sigma^2+2ci\sigma-1)(\sigma^2+2\bar{c}i\sigma-1)} \log \frac{1-\sigma}{1+\bar{\sigma}} +$$

$$+ \frac{2p}{\sigma-\zeta_1} + \frac{2\bar{p}}{\sigma+\bar{\zeta}_1} - \frac{2p\zeta_2^2}{\sigma-\zeta_2} - \frac{2\bar{p}\bar{\zeta}_2^2}{\sigma+\bar{\zeta}_2} - 2p\zeta_2 + 2\bar{p}\bar{\zeta}_2 \left. \right\} \times$$

$$\times d \left\{ \frac{c\bar{c}}{a^2} \frac{(1+2ai\sigma-\sigma^2)^2}{(\sigma^2+2ci\sigma-1)(\sigma^2+2\bar{c}i\sigma-1)} + \frac{4b^2c\bar{c}i(1+i\sigma)^2 V\sqrt{2(1-\sigma^2)} V\sqrt{2(\sigma^2-1)}}{a^2(\sigma^2+2ci\sigma-1)(\sigma^2+2\bar{c}i\sigma-1)} - \right.$$

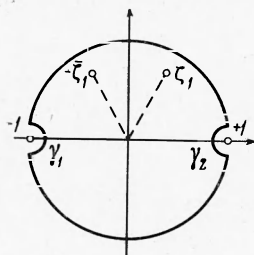
$$\left. - \frac{2b\bar{c}c}{a^2} \frac{(1+i\sigma)(1+2ai\sigma-\sigma^2)}{(\sigma^2+2ci\sigma-1)(\sigma^2+2\bar{c}i\sigma-1)} (V\sqrt{2(1-\sigma^2)} + iV\sqrt{2(\sigma^2-1)}) \right\}$$

В подынтегральном выражении точки $\sigma = \pm 1$ являются точками разветвления функций $V\sqrt{2(\sigma^2-1)}$ и $V\sqrt{2(1-\sigma^2)}$. Представим интеграл по γ в виде суммы трех интегралов

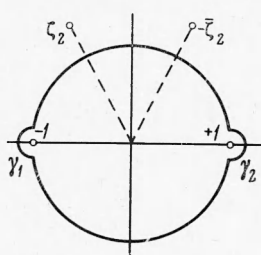
$$D_0 = -\frac{1}{4} \left[\int_{\gamma} \{\Phi_1(\sigma) V\sqrt{2(1-\sigma^2)} + \Phi_0(\sigma)\} d\sigma + \int_{\gamma} \Phi_2(\sigma) V\sqrt{2(\sigma^2-1)} d\sigma + \right.$$

$$\left. + \int_{\gamma} \Phi_3(\sigma) V\sqrt{2(1-\sigma^2)} V\sqrt{2(\sigma^2-1)} d\sigma \right]$$

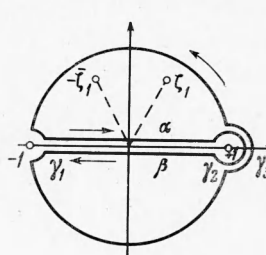
Подынтегральная функция в первом интеграле однозначна внутри круга (фиг. 2), где точки разветвления $\sigma = \pm 1$ исключены из области. Дуги γ_1 и γ_2 бесконечно малы.



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Первый интеграл вычисляется с помощью теоремы о вычетах. Вычеты берутся в точках $\sigma = \zeta_1$ и $\sigma = -\bar{\zeta}_1$.

Подынтегральная функция во втором интеграле однозначна во внешности круга γ (фиг. 3). Он вычисляется аналогично первому. Подынтегральная функция имеет полюса в точках $\sigma = \zeta_2$ и $\sigma = -\bar{\zeta}_2$.

Рассмотрим третий интеграл. Подынтегральная функция будет однозначна в области, ограниченной γ и разрезанной так, как показано на фиг. 4. Окружности $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ бесконечно малы. Функция $\varphi_3(\sigma)$ имеет полюса в точках $\sigma = \zeta_1$ и $\sigma = -\zeta_1$; следовательно [5]

$$\frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\gamma} + \int_{\alpha} + \int_{\beta} + \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} \right] = A_1 + A_2$$

где A_1 и A_2 — вычеты, соответствующие точкам $\sigma = \zeta_1$ и $\sigma = -\zeta_1$.

Производя вычисление всех вычетов и интегралов, получаем

$$\begin{aligned} \frac{D}{\mu} = & \frac{\pi}{2} + \frac{a_1^2}{8\pi\alpha_1^2 \sqrt{\alpha_0^2 + \alpha_1^2}} \left[\left\{ \frac{\alpha_1^2 a_1^2}{64(\alpha_0^2 + \alpha_1^2)^{3/2}} - \frac{[(1-\alpha_0)^2 + \alpha_1^2][(1+\alpha_0)^2 + \alpha_1^2]^2}{32a_2} \right\} (\ln|d|)^2 + \right. \\ & + \left\{ -\frac{[(1-\alpha_0)^2 + \alpha_1^2][(1+\alpha_0)^2 + \alpha_1^2]^2}{8\alpha_0} + \frac{a_3^2}{16(\alpha_0^2 + \alpha_1^2)^{3/2}} - \frac{a_1^2 \alpha_1^2}{16(\alpha_0^2 + \alpha_1^2)^{3/2}} \right\} (\arctg f)^2 + \\ & + \frac{\alpha_1 a_1 a_3}{8(\alpha_0^2 + \alpha_1^2)^{3/2}} \ln|d| \arctg f + \left\{ -\frac{\sqrt{2} a_{10} a_7 [(1-\alpha_0)^2 + \alpha_1^2]}{4a_4 [(1-\alpha_0)a_6 + \alpha_1 a_5]} + \right. \\ & + \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{[\alpha_1 a_7 a_8 - 8a_1 a_9] a_5 - [a_7 a_9 + 8\alpha_1^2 a_8 a_1] a_6}{a_4 (\alpha_0^2 + \alpha_1^2)^{3/2}} - \\ & - \frac{16\sqrt{2} [\alpha_1 (1-\alpha_0) a_5 - \alpha_1^2 a_6] a_1}{a_1} \left. \right\} \ln|d| + \left\{ -32\sqrt{2} \frac{a_1 [\alpha_1^2 a_5 + \alpha_1 (1-\alpha_0) a_6]}{a_1} - \right. \\ & - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{[(1-\alpha_0)^2 + \alpha_1^2][(1-\alpha_0)^2 + 4(\alpha_0^2 + \alpha_1^2)^{1/2}] a_7}{[(1-\alpha_0)a_5 - \alpha_1 a_6] a_1} + \\ & + \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{[a_9 a_7 + 8\alpha_1^2 a_1 a_8] a_5 + \alpha_1 [a_8 a_7 - 8a_1 a_9] a_6}{a_4 (\alpha_0^2 + \alpha_1^2)^{3/2}} \left. \right\} \arctg f - \\ & - \frac{\alpha_0 (1 + \alpha_0^2 + \alpha_1^2) - 2(\alpha_0^2 + \alpha_1^2)}{(\alpha_0^2 + \alpha_1^2)^{1/2}} \Big] \end{aligned} \quad (1.5)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_0 (1 + \alpha_0^2 + \alpha_1^2) - 2(\alpha_0^2 + \alpha_1^2) + [(1-\alpha_0)^2 + \alpha_1^2] (\alpha_0^2 + \alpha_1^2)^{1/2} &= a_0 \\ 1 - \alpha_0^2 - \alpha_1^2 &= a_1 \\ \alpha_0 (1 + \alpha_0^2 + \alpha_1^2) - 2(\alpha_0^2 + \alpha_1^2) - [(1-\alpha_0)^2 + \alpha_1^2] (\alpha_0^2 + \alpha_1^2)^{1/2} &= a_2 \\ (\alpha_0^2 + \alpha_1^2) (2 + \alpha_0) + \alpha_0 &= a_3, \quad (1-6\alpha_0 + \alpha_0^2 - \alpha_1^2)^2 + (6\alpha_1 - 2\alpha_0 \alpha_1)^2 = a_4 \\ [(\alpha_0^2 + \alpha_1^2)^{1/2} + \alpha_0]^{1/2} &= a_5, \quad [(\alpha_0^2 + \alpha_1^2)^{1/2} - \alpha_0]^{1/2} = a_6 \\ a_1^2 - 4\alpha_0 (1 + \alpha_0^2 + \alpha_1^2) - 8(\alpha_0^2 + \alpha_1^2) - 4\alpha_1^2 &= a_7, \quad 2\alpha_0 + (\alpha_0^2 + \alpha_1^2) + (\alpha_0^2 + \alpha_1^2)^2 = a_8 \\ \alpha_0^2 - \alpha_1^2 - (\alpha_0^2 + \alpha_1^2)^2 + \alpha_0 (\alpha_0^2 + \alpha_1^2) a_1 &= a_9, \quad (1-\alpha_0)^2 + \alpha_1^2 - 4(\alpha_0^2 + \alpha_1^2)^{1/2} = a_{10} \\ d = \frac{(1-\alpha_0)^2 + \alpha_1^2 + 4(\alpha_0^2 + \alpha_1^2)^{1/2} - 2\sqrt{2}(1-\alpha_0)a_3 - 2\sqrt{2}\alpha_1 a_5}{(1-\alpha_0)^2 + \alpha_1^2 + 4(\alpha_0^2 + \alpha_1^2)^{1/2} + 2\sqrt{2}(1-\alpha_0)a_3 + 2\sqrt{2}\alpha_1 a_5} \\ f = \frac{4\sqrt{2} [\alpha_1 a_6 - (1-\alpha_0) a_5]}{8(\alpha_0^2 + \alpha_1^2)^{1/2} - (\alpha_0 - 1 - \alpha_1)^2 - (\alpha_0 - 1 + \alpha_1)^2} \end{aligned}$$

Подставляя в (1.4) значения $f'(\zeta_0)$, $\omega''(\zeta_2)$ и τ , получаем

$$\begin{aligned} k = & -\frac{(a_1)^{1/2} M}{2\pi\alpha_1 D} \left\{ \frac{\sqrt{2} (a_1)^{3/2} \alpha_1}{\alpha_0^2 + \alpha_1^2} + \frac{\sqrt{2} [b_1 a_5 - a_1 b_2 a_6]}{32(\alpha_0^2 + \alpha_1^2)^{3/2}} \ln|d| - \right. \\ & \left. - \frac{\sqrt{2} \alpha_1 b_2 a_5 + b_1 a_6}{16(\alpha_0^2 + \alpha_1^2)^{3/2}} \arctg f \right\} \end{aligned} \quad (1.6)$$

где

$$b_1 = \alpha_0 (1 + \alpha_0) (1 - \alpha_0^2) + \alpha_1^2 (1 - \alpha_0 + \alpha_1^2), \quad b_2 = 1 + \alpha_0^2 + 2\alpha_0^3 + \alpha_1^2 + 2\alpha_1^2 \alpha_0$$

Заметим, что в том случае, когда трещина направлена по радиусу

$$(r \rightarrow \infty), \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = 0, \quad \alpha_0 = \beta_0 = 1 - s$$

Устремляя в выражении (1.6) α_1 к нулю и раскрывая неопределенности, после некоторых преобразований получаем выражение для коэффициента интенсивности в вершине радиальной трещины [3]

$$k = - \frac{(2-s)^{3/2} s^{1/2} M}{(1-s)^2} \frac{2s + (1-s)^{1/2} (mI_0 + I_1)}{2\pi^2 - [2s^2 A^2 + (1-s)(A+B)^2]} \quad (1.7)$$

где

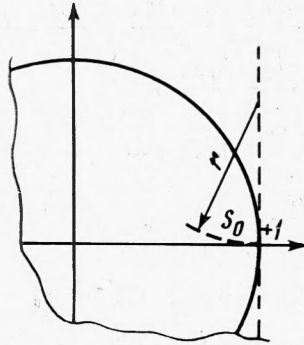
$$A = \frac{1}{1-s} \left[\frac{(2-s)^2}{(1-s)^{1/2} \arctg(1-s)^{1/2}} - s \right], \quad B = \frac{s}{1-s} \left[2 - \frac{3}{4} As \right]$$

$$m = \frac{(1-s)^2 + 1}{2(1-s)}, \quad I_0 = \frac{4}{\arctg(1-s)^{1/2}}, \quad I_1 = - \frac{s}{4(1-s)} [4(1-s)^{1/2-s} I_0]$$

2. В работе [1] исследуется направление развития трещины из надреза при крупном разрушении. Под изменением направления трещины понимается изменение угла наклона трещины к ее первоначальному направлению.

Применим критерий, предложенный в [1], к случаю, когда изменение направления трещины связано с изменением ее радиуса кривизны.

Пусть в круглом стержне имеется надрез малой глубины s_0 , ортогональной к боковой поверхности (фиг. 5). Пусть δs — приращение длины трещины в начальный момент развития трещины из надреза. Будем считать, что трещина распространяется по некоторой дуге, относительно которой линия надреза является касательной. В силу малости δs можно считать, что трещина распространяется по дуге окружности радиуса r , который подлежит определению.



Фиг. 5

Рассматривая поведение коэффициента интенсивности напряжений в вершине трещины, найдем локальное направление распространения трещины, характеризуемое радиусом r . Коэффициент интенсивности k зависит от s_0, r, M . При некотором значении внешней нагрузки M кривая $k(s_0, r, M)$, которая рассматривается как функция r , коснется прямой $k = k_0$. Значение M определяется из критерия Гриффита — Ирвина для стержня с надрезом глубины s_0 и зависит от r .

Направление развития трещины будет определяться значением $r = r_0$, которое соответствует точке касания $k(s_0, r, M)$ и $k = k_0$. Точка r_0 определяется из уравнения

$$\frac{\partial k(s_0, r, M)}{\partial r} = 0 \quad (2.1)$$

Уравнение (2.1) является локальным критерием направления роста трещины из надреза.

Заметим, что величина внешней нагрузки входит в уравнение (2.1) в качестве множителя. Поэтому направление роста трещины не зависит от величины нагрузки M .

Дифференцируя (1.6), вычисляем значение

$$\frac{\partial k}{\partial r} = \frac{\partial k}{\partial \alpha_0} \frac{\partial \alpha_0}{\partial r} + \frac{\partial k}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial r}$$

Величины α_0 и α_1 выражаются через длину трещины s и ее радиус r следующим образом:

$$\alpha_0 = \{1 - 2r^2 + 6r^2 \cos(s/r) + 6r \sin(s/r) - 4[r^2 \cos^2(s/r) + \sin^2(s/r) + r \sin(2s/r)]\}^{1/2}$$

$$\alpha_1 = 2 \sin(s/r) - 2r + 2r \cos(s/r)$$

Учитывая, что глубина надреза s_0 мала, можно принять

$$\sin(s_0/r) = s_0/r, \quad \cos(s_0/r) = 1$$

Тогда

$$\alpha_0 = \left(1 - 2s_0^2 - \frac{4s_0^2}{r^2}\right)^{1/2}, \quad \alpha_1 = \frac{2s}{r}$$

Вычисления, выполненные на ЭВМ «Проминь», показали, что $\partial k / \partial n = 0$ только при $r \rightarrow \infty$.

Таким образом, трещина будет распространяться по радиусу. Величина параметра нагрузки, соответствующего началу распространения трещины, определяется из уравнения (1.6).

Поступила 19 I 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Ершов Л. В., Ивлев Д. Д. Об условиях квазихрупкого разрушения. ПММ, 1967, т. 31, вып. 3.
2. Irwin G. R. Fracture. Handbuch der Physik. Bd6, Springer. Berlin, 1958, S. 551—590.
3. Sih G. C. Strenght of stress singularities at crack tips for flexural and torsional Trans. ASME, Ser. E, problems. J. Appl. Mech., 1963, vol. 30, No. 3, pp. 419—425. (Русск. перев.: Тр. Америк. о-ва инж.-механ., Прикл. механ., 1963, № 3.)
4. Ширяев Е. А. О кручении круглого бруса с трещиной по окружности или по радиусу. ПММ, 1956, т. 20, вып. 4.
5. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.

О ПРЕДЕЛЬНОМ РАВНОВЕСИИ ПЛАСТИНЫ, ОСЛАБЛЕННОЙ ДВУМЯ ТРЕЩИНАМИ

Н. В. Пальцун

(Днепропетровск)

В плоской постановке задача о бесконечном теле, ослабленном двумя трещинами одинаковой длины (для случая достаточно большого расстояния между ними), была решена Смитом [1] методом, использующим дислокационное описание трещин. Осесимметричный случай рассматривался Я. С. Уфляндом [2], В. Д. Коллинзом [3], Ю. Н. Кузьминым [4]. Последний исследовал равновесное состояние неограниченного пространства, содержащего две соосные щели разных радиусов. Ниже рассматривается аналогичная плоская задача.

Пусть неограниченная изотропная упругая пластина ослаблена двумя сквозными параллельными трещинами неравной длины ($2a$ и $2b$, $a < b$). Трещины одна от другой расположены на расстоянии h и имеют общую ось симметрии. Ось x направим вдоль меньшей из трещин, ось y — перпендикулярно к плоскости этой трещины в сторону, противоположную расположению другой трещины. Предположим, что на поверхностях трещин заданы произвольные разрывающие нормальные $\sigma_a(x)$, $\sigma_b(x)$ и касательные $\tau_a(x)$, $\tau_b(x)$ напряжения. На бесконечности нагрузка отсутствует. Требуется найти зависимость между нагрузкой и параметрами трещин, если известны все упругие константы материала пластины.

Таким образом, задача сводится к интегрированию уравнений теории упругости при граничных условиях

$$\begin{aligned} \sigma_y &= -\sigma_a(x), & \tau_{xy} &= \tau_a(x) & (y=0, |x| < a) \\ \sigma_y &= -\sigma_b(x), & \tau_{xy} &= \tau_b(x) & (y=-h, |x| < b) \end{aligned} \quad (1)$$

Для решения поставленной задачи будем пользоваться бигармонической функцией Эри $U(x, y)$ и интегральным косинус-преобразованием ее $G(\xi, y)$.

Напряжения и упругие перемещения выражаются через $G(\xi, y)$ формулами [5]

$$\begin{aligned} \sigma_y &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \xi^2 G(\xi, y) \cos \xi x d\xi, & \tau_{xy} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \xi \frac{\partial G}{\partial y} \sin \xi x d\xi \\ v &= \frac{2(1+\nu)}{\pi E} \int_0^\infty \left[(1-\nu) \frac{\partial^3 G}{\partial y^3} - (2-\nu) \xi^2 \frac{\partial G}{\partial y} \right] \frac{\cos \xi x}{\xi^2} d\xi \\ u &= \frac{2(1+\nu)}{\pi E} \int_0^\infty \left[(1-\nu) \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \nu \xi^2 G \right] \frac{\sin \xi x}{\xi} d\xi \end{aligned} \quad (2)$$