

4. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1965.
5. Kern J. Zur Hydrodynamik der Rinnsale // Verfahrenstechnik. — 1969. — N 10.
6. Towell G. D., Rothfeld L. B. Hydrodynamics of rivulet flow // Amer. Inst. Chem. Engng J. — 1966. — V. 12, N 5.

Поступила 21/VIII 1986 г.

УДК 551.466

РАСЧЕТ МЕТОДОМ ВОЗМУЩЕНИЙ МАКСИМАЛЬНЫХ ГРУППОВЫХ СКОРОСТЕЙ ВНУТРЕННИХ ВОЛН В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ СО СРЕДНИМИ СДВИГОВЫМИ ТЕЧЕНИЯМИ

В. А. Боровиков, Е. С. Левченко

(Москва)

Распространение внутренних гравитационных волн, возбуждаемых в слое $-H < z < 0$, $-\infty < x, y < \infty$ стратифицированной жидкости со средними горизонтальными сдвиговыми течениями, описывается [1] уравнением

$$(1) \quad Lu(t, x, y, z, z_0) = Q(t, x, y, z, z_0), \quad u = 0(z = 0, -H),$$

где оператор

$$L = \frac{D^2}{Dt^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] - \frac{D}{Dt} \left[U''_{zz} \frac{\partial}{\partial x} + V''_{zz} \frac{\partial}{\partial y} \right] + N^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right];$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} + V \frac{\partial}{\partial y};$$

$U = U(z)$, $V = V(z)$ — компоненты скорости среднего течения $\mathbf{U} = \{U, V, 0\}$ на горизонте z ; $N(z)$ — частота Брента — Вайсяля. Используется приближение Буссинеска и твердой крышки. Предполагается выполненным условие устойчивости Майлса $Ri(z) = N^2(z)/[(U'_z)^2 + (V'_z)^2] > 1/4$, гарантирующее, что внутренние волны не могут обмениваться со средними сдвиговыми течениями энергией.

В [2] найдена функция Грина граничной задачи (1), т. е. ее решение $\Gamma(t, x, y, z, z_0)$ при $Q = \delta(t)\delta(x)\delta(y)\delta(z - z_0)$, тождественно обращающееся в нуль при $t < 0$, и определена асимптотика Γ при $t \rightarrow \infty$ и фиксированных $x/t = U_x$, $y/t = U_y$. Чтобы найти Γ , использовалось преобразование Фурье по переменным t, x, y , сводящее задачу к определению вертикальной функции Грина $G(\omega, \lambda, \mu, z, z_0)$: $L_0 \left(\omega, \lambda, \mu, z, \frac{\partial}{\partial z} \right) G = (\omega - f)^2 \delta(z - z_0)$, $G = 0(z = 0, -H)$. Здесь L_0 — оператор Тейлора — Гольдштейна: $L_0 u = (\omega - f)^2 u''_{zz} + [k^2(N^2 - (\omega - f)^2) + f''_{zz}(\omega - f)]u$; $f = f(z) = \lambda U(z) + \mu V(z)$; $k^2 = \lambda^2 + \mu^2$. Функция G как функция ω имеет простые полюсы при вещественных $\omega = \omega_n(\lambda, \mu)$, являющихся собственными числами граничной задачи

$$(2) \quad L_0 \left(\omega_n, \lambda, \mu, z, \frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi_n = 0, \quad \varphi_n = 0(z = 0, -H),$$

и разрез на вещественной оси ω , соединяющий точки ветвления $\omega = \min f$ и $\omega = \max f$.

* Переход посредством обратного преобразования Фурье к функции Γ дает выражение

$$(3) \quad \Gamma = \sum_n \Gamma_n + \Gamma_H,$$

где Γ_n соответствует вкладу от n -го полюса $\omega = \omega_n(\lambda, \mu)$ функции G , а

Γ_H — интегралу по разрезу функции G . Функция Γ_H оказывается при $t \gg 1$ пренебрежимо малой по сравнению с Γ_n , имеющей вид

$$(4) \quad \Gamma_n = \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \int A_n(\lambda, \mu, z, z_0) \exp i [\lambda x + \mu y - \omega_n(\lambda, \mu) t] d\lambda d\mu.$$

Выражение для A_n приведено в [2] (далее оно не потребуется), ω_n — собственное число граничной задачи (2). В (3) берется суммирование по всем $\omega_n(\lambda, \mu) < \min_z f(z)$; эти собственные числа перенумерованы в порядке возрастания.

Чтобы найти асимптотику Γ_n при $t, |x|, |y| \gg 1$, положим $x = \alpha t$, $y = \beta t$, $t \gg 1$, т. е. будем искать асимптотику Γ_n при $t \gg 1$ в точке наблюдения x, y , удаляющейся от начала координат со скоростью $U = (\alpha, \beta)$. Тогда фазовая функция в (4) запишется в форме $S = t(\alpha\lambda + \beta\mu - \omega_n(\lambda, \mu))$ и ее стационарные точки определяются из уравнений

$$(5) \quad \alpha = \frac{x}{t} = \frac{\partial \omega_n}{\partial \lambda}, \quad \beta = \frac{y}{t} = \frac{\partial \omega_n}{\partial \mu}.$$

Множество точек $\alpha = x/t, \beta = y/t$ на плоскости α, β (т. е. область $\alpha = x/t, \beta = y/t$ в пространстве t, x, y), для которых $t \gg 1$ и система (5) имеет решение, естественно назвать волновой зоной; если $x/t, y/t$ находятся в волновой зоне, то фазовая функция S в (4) имеет стационарные точки и Γ_n убывает при $t \rightarrow \infty$ как t^{-1} . Вне волновой зоны интеграл (4) не имеет стационарных точек и Γ_n экспоненциально убывает при $t \rightarrow \infty$.

Как указано в [2], во всяком случае, для приближающихся к реальным распределениям $N(z), U(z), V(z)$ волновая зона ограничена двумя замкнутыми кривыми — передним и задним фронтами. Положим $\lambda = k \cos \psi, \mu = k \sin \psi$. Тогда передний фронт — это кривая, которую описывает точка $\alpha = \partial \omega_n(\lambda, \mu) / \partial \lambda, \beta = \partial \omega_n(\lambda, \mu) / \partial \mu$ при $k \rightarrow 0$ и $0 < \psi < 2\pi$; задний фронт — предел этой кривой при $k \rightarrow \infty$ и $0 < \psi < 2\pi$. При отсутствии течений (когда $\omega_n(\lambda, \mu) = \omega_n(k), k^2 = \lambda^2 + \mu^2$) передний фронт — окружность $\alpha^2 + \beta^2 = C_n^2$, где C_n — максимальная групповая скорость n -й моды ($C_n = \max_k \partial \omega_n / \partial k$), а задний фронт стягивается в начало координат $\alpha = \beta = 0$, так как $\partial \omega_n / \partial k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Для заднего фронта в [2] найдены аналитические выражения. Определение формы переднего фронта требует численных расчетов. В настоящей работе предлагается приближенный метод расчета положения переднего фронта, имеющий достаточную точность и на порядок сокращающий объем вычислений.

Подставляя в (5) $\lambda = k \cos \psi, \mu = k \sin \psi, \omega_n = k \xi_n(k, \psi)$, получим при $k \rightarrow 0$ выражение для переднего фронта [2]

$$(6) \quad \alpha = \frac{x}{t} = \xi(\psi) \cos \psi - \xi'_\psi(\psi) \sin \psi, \quad \beta = \frac{y}{t} = \xi(\psi) \sin \psi + \xi'_\psi(\psi) \cos \psi,$$

где $\xi(\psi) = \xi_n(\psi)$ — n -е собственное число зависящей от параметра ψ спектральной задачи

$$(7) \quad \frac{d}{dz} [(\xi_n - F(z))^2 \varphi'_z] + N^2(z) \varphi = 0; \quad \varphi_n = 0 \quad (z = 0, -H).$$

Здесь $F(z) = U \cos \psi + V \sin \psi$; $N(z)$ — частота Брента — Вайселя. Производная ξ'_ψ выражается квадратурой через собственную функцию φ_n :

$$\xi'_\psi(\psi) = - \int_{-H}^0 (\xi - F) [U \sin \psi - V \cos \psi] (\varphi'_z)^2 dz \left[\int_{-H}^0 (\xi - F) (\varphi'_z)^2 dz \right]^{-1}.$$

Таким образом, для расчета переднего фронта требуется найти численное решение спектральной задачи (7) при всех ψ . Чтобы существенно сократить объем вычислений, воспользуемся методом возмущений. Положим $U = \varepsilon u(z), V = \varepsilon v(z), F(z) = \varepsilon [u \cos \psi + v \sin \psi] = \varepsilon f^*$ и будем

искать решение спектральной задачи (7) в виде рядов $\xi_n(\psi) = \eta_0 + \varepsilon \eta_1 + \varepsilon^2 \eta_2 + \dots$, $\varphi_n(z) = \zeta_0(z) + \varepsilon \zeta_1(z, \psi) + \varepsilon^2 \zeta_2(z, \psi) + \dots$. Подставляя выписанные выражения в (7), получим

$$(8) \quad L^* \zeta_0 = \zeta_{0zz}'' + \frac{N^2(z)}{\eta_0^2} \zeta_0 = 0;$$

$$(9) \quad L^* \zeta_1 = -\frac{2}{\eta_0} [(\eta_1 - f^*) \zeta_{0z}']_z;$$

$$(10) \quad L^* \zeta_2 = -\frac{2}{\eta_0} [(\eta_1 - f^*) \zeta_{1z}']_z - \frac{1}{\eta_0^2} [(\eta_1 + 2\eta_2\eta_0 - 2f^*\eta_1 + f^{*2}) \zeta_{0z}']_z.$$

Из граничных условий в (7) следует $\zeta_n(0) = \zeta_n(-H)$. Однако это условие не определяет однозначно функции ζ_0 , ζ_1 , ζ_2 , так как из (8) вытекает, что ζ_0 определено с точностью до постоянного множителя, а ζ_n — с точностью до решения однородного уравнения $L^* \zeta_n = 0$, т. е. с точностью до слагаемого $\text{const } \zeta_0(z)$. Чтобы снять эту неопределенность, введем дополнительное условие $\varphi_n(0) = 1$. Тогда $\zeta_{0z}'(0) = 1$, а при $\zeta_{nz}'(0) = 0$ для (8)–(10) получим граничные условия

$$(11) \quad \zeta_n = 0 \quad (z = 0, -H), \quad \zeta_{0z}'(0) = 1, \quad \zeta_{nz}'(0) = 0 \quad (n \geq 1).$$

Выражение (8) — уравнение для собственных функций φ_n при отсутствии течения, отсюда $\eta_0 = C_n$, $\zeta_0 = \varphi_n(z)/\varphi_{nz}'(0)$. Условие разрешимости уравнения (9) — ортогональность его правой части к решению $\zeta_0(z)$ однородного уравнения. Из этого условия получаем

$$\varepsilon \eta_1 = \frac{\varepsilon \int_{-H}^0 f^*(z) (\zeta_{0z}')^2 dz}{\int_{-H}^0 (\zeta_{0z}')^2 dz} = A \cos \psi + B \sin \psi,$$

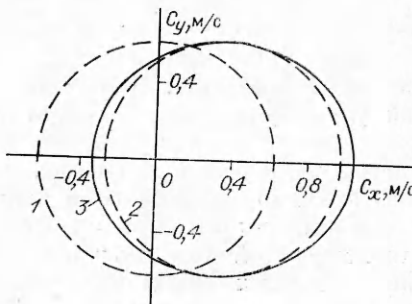
$$A = \frac{1}{M} \int_{-H}^0 U (\zeta_{0z}')^2 dz, \quad B = \frac{1}{M} \int_{-H}^0 V (\zeta_{0z}')^2 dz, \quad M = \int_{-H}^0 (\zeta_{0z}')^2 dz.$$

И, согласно (6), для переднего фронта находим параметрические уравнения

$$(12) \quad C_x = \frac{x}{t} = \eta_0 \cos \psi + A, \quad C_y = \frac{y}{t} = \eta_0 \sin \psi + B.$$

Таким образом, в первом приближении передний фронт представляет собой окружность с радиусом $\eta_0 t$ (т. е. с радиусом $C_n t$) и центром $x = At$, $y = Bt$. Иными словами, в первом приближении невозмущенный передний фронт сносится как единое целое со скоростью $U = (A, B)$, где A и B — средние значения компонент $U(z)$, $V(z)$ скорости течения, взятые с весом $(\zeta_{0z}')^2$. На рис. 1 окружность 1 — передний фронт для среды без течений, 2 — передний фронт, когда в среде есть одномерное сдвиговое течение и при построении учитывается только первое приближение.

Введем подвижную систему координат $x' = x - At$, $y' = y - Bt$. В координатах t , x' , y' поправки первого приближения к переднему фронту обращаются в нуль и выкладки, необходимые для построения второго приближения, упрощаются (в окончательном выражении для компонент групповой скорости вернемся к исходным переменным t , x , y). Выражение для η_2



Р и с. 1

получается из условия ортогональности правой части (10) к решению однородного уравнения ζ_0 :

$$\eta_2(\psi) = \frac{2\eta_0 \int_{-H}^0 f^* \zeta'_{1z} \zeta'_{0z} dz - \int_{-H}^0 f^{*2} (\zeta'_{0z})^2 dz}{2\eta_0 \int_{-H}^0 (\zeta'_{0z})^2 dz}.$$

Здесь функция ζ_1 — решение уравнения (9). Учитывая, что $\eta_1 = 0$ и $f^* = u \cos \psi + v \sin \psi$, представим ζ_1 в виде $\varepsilon \zeta_1 = \zeta_u \cos \psi + \zeta_v \sin \psi$, где ζ_u и ζ_v — решения следующих уравнений: $L^* \zeta_u = \frac{2}{\eta_0} [U \zeta'_{0z}]_z$, $L^* \zeta_v = \frac{2}{\eta_0} [V \zeta'_{0z}]_z$.

Выделяя в явном виде зависимость η_2 от параметра ψ и переходя к групповой скорости C_x , C_y , получим

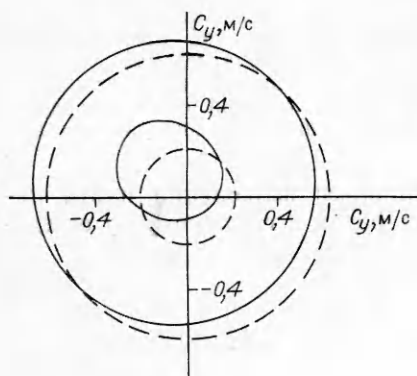
$$(13) \quad \begin{aligned} C_x &= \eta_0 \cos \psi + A + [A_2^0 - A_2^{10} \cos \psi (1 + \sin^2 \psi) - \\ &\quad - A_2^{20} \sin^3 \psi + A_2^{30} \sin^2 \psi \cos \psi], \\ C_y &= \eta_0 \sin \psi + B + [B_2^0 - B_2^{10} \sin \psi (1 + \cos^2 \psi) - \\ &\quad - B_2^{20} \cos^3 \psi + B_2^{30} \cos^2 \psi \sin \psi], \end{aligned}$$

где

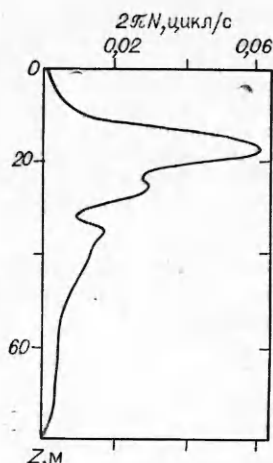
$$\begin{aligned} A_2^0 &= C_1 \int_{-H}^0 \zeta'_{1z} \zeta'_{0z} U dz; \quad B_2^0 = C_1 \int_{-H}^0 \zeta'_{1z} \zeta'_{0z} V dz; \\ A_2^{10} &= B_2^{30} = \frac{C_1}{2\eta_0} \int_{-H}^0 U^2 (\zeta'_{0z})^2 dz; \quad A_2^{20} = B_2^{20} = \frac{C_1}{\eta_0} \int_{-H}^0 UV (\zeta'_{0z})^2 dz; \\ A_2^{30} &= B_2^{10} = \frac{C_1}{2\eta_0} \int_{-H}^0 V^2 (\zeta'_{0z})^2 dz; \quad C_1 = \left[\int_{-H}^0 (\zeta'_{0z})^2 dz \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, основная часть затрачиваемого машинного времени приходится на нахождение функций ζ_0 , ζ_1 и их производных, после чего вычисляются квадратурные формулы. Второе приближение (13) позволяет описывать снос волнового фронта как целого и его деформацию (на рис. 1 кривая 3 построена с учетом второго приближения).

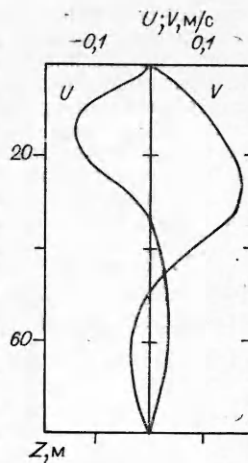
Простой способ решения спектральной задачи $L^* \zeta_0 = 0$, $\zeta_0 = 0$ ($z = 0, -H$) приведен в [3]. Частота Брента — Вайсяля в данном методе аппроксимируется кусочно-постоянной функцией, т. е. весь интервал значений $[-H; 0]$ разбивается на слои, в каждом из которых решение выписывается в аналитическом виде и интегрирование (8) сводится к пересчету функции и ее производной или импеданса $Z = \zeta_0 / \zeta'_{0z}$ с одного горизонта на другой по всему слою. Тогда уравнение для собственных значений имеет вид $Z_0^J - Z_{-H}^J = 0$, где Z_{-H}^J — импеданс, пересчитанный со дна на J -й горизонт, а Z_0^J — импеданс, пересчитанный с поверхности на тот же горизонт. Номер собственного числа определяется числом нулей у соответствующей собственной функции. Интегрирование (9) производится аналогичным методом, при этом решение в каждом слое выражается через решение однородного уравнения и правую часть (9). На основе этого метода написана программа и проведено сравнение «точного» и приближенного методов. Показано, что для реальных (практически для всех устойчивых) течений относительная ошибка определения координат передних фронтов с помощью метода возмущений для первых мод не превышает 10% (этого вполне достаточно при обработке натурных данных).



Р и с. 2



Р и с. 3



Р и с. 4

В качестве примера влияния сдвиговых течений на внутренние волны на рис. 2 представлены передние волновые фронты первой и второй мод внутренних волн в среде с двумерным сдвиговым течением (сплошная кривая). Распределения частоты Брента — Вэйселя и компонент скорости течения брались по результатам измерений и приведены на рис. 3, 4. Для сравнения штриховой линией показаны соответствующие фронты для среды без течений.

Из рис. 1, 2 видно, что наличие течений приводит к существенному изменению положения волновых фронтов, а следовательно, и всего поля внутренних волн. Рассчитывать эти изменения можно при помощи приведенного достаточно точного и простого алгоритма.

ЛИТЕРАТУРА

1. Миропольский Ю. З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане. — Л.: Гидрометеиздат, 1931.
2. Боровиков В. А., Левченко Е. С. Функция Грина уравнения внутренних волн в слое стратифицированной жидкости со средними сдвиговыми течениями // Волны и дифракция. — Тбилиси, 1985. — Т. 1.
3. Гончаров В. В. О некоторых особенностях внутренних волн в океане // Цунами и внутренние волны. — Севастополь, 1976.

Поступила 26/VI 1986 г.

УДК 532.546+622.276.65

О ВЫТЕСНЕНИИ НЕФТИ ГОРЯЧЕЙ ВОДОЙ И ПАРОМ

А. Ф. Зазовский

(Москва)

На основании развитого в [1—3] подхода находятся точные решения задач фронтального вытеснения нефти паром и пароводными смесями [4] в крупномасштабном приближении (т. е. в пренебрежении капиллярными, диффузионными и неравновесными эффектами и теплопроводностью пласта в направлении вытеснения). В целях упрощения задачи предполагается, что вода и пар при их одновременном существовании в пористой среде обладают одинаковыми подвижностями. Тогда трехфазные течения, если они существуют, сводятся к двухфазным с водной фазой, представляющей собой смесь воды и пара. Показано, что структура тепловой волны определяется нелинейной зависимостью удельного теплосодержания обобщенной водной фазы от температуры и независимо от распределения насыщенности. Так, при нагнетании в пласт насыщенного пара температура в пласте меняется скачком, отвечающим фронту конденсации пара в холодную воду. При вытеснении перегретым паром распределение температуры двухступенчатое, с медленным фронтом охлаждения пара до температуры фазового перехода и более быстрым фронтом конденсации. Установлено, что зависимость вытесняющей способности теплоносителя от его удельного теплосодержания по-