

УДК 519.246.8: 338

Мультипликативная модель выделения составляющих временных рядов*

В.И. Зоркальцев^{1,2}, М.Н. Полковская³

¹Лимнологический институт Сибирского отделения Российской академии наук, ул. Улан-Баторская, 3, Иркутск, 664033

²Байкальский государственный университет, ул. Ленина, 11, Иркутск, 664003

³Иркутский государственный аграрный университет им. А.А. Ежевского, п. Молодежный, Иркутская обл., 664038

E-mails: vizork@mail.ru (Зоркальцев В.И.), polk_mn@mail.ru (Полковская М.Н.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 2, Vol. 15, 2022.

Зоркальцев В.И., Полковская М.Н. Мультипликативная модель выделения составляющих временных рядов // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2022. — Т. 25, № 2. — С. 111–127.

Статья посвящена обоснованию мультипликативной модели декомпозиции временных рядов на основе аксиоматического подхода. В этой модели исходный временной ряд представляется в виде покомпонентного произведения выделяемых составляющих. Составляющие описываются в виде мономов. Для определения значений переменных мономов минимизируется функция, соизмеряющая отклонения от единицы всех компонент произведения выделяемых составляющих от значений соответствующих компонент исходного ряда. В рассматриваемой модели все компоненты исходного ряда и выделяемых составляющих являются положительными числами.

Формулируются четыре требования к методам выделения составляющих. Доказано, что все эти требования выполняются в том и только в том случае, если декомпозиция временного ряда осуществляется мультипликативной моделью. В качестве примера рассматривается модель выделения из помесечных рядов экономических данных тренда и сезонных колебаний.

DOI: 10.15372/SJNM20220202

Ключевые слова: декомпозиция временных рядов, аксиоматический подход к выбору метода, мультипликативная модель.

Zorkal'tsev V.I., Polkovskaya M.N. Multiplicative model the allocation of components of the time series // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci.—Novosibirsk, 2022. — Vol. 25, № 2. — P. 111–127.

This paper is devoted to the substantiation of a multiplicative model of time series decomposition based on the axiomatic approach. In this model, the original time series is represented as a component-by-component product of the selected components. The components are described in the form of monomials. To determine the values of variable monomials, a function is minimized that measures deviations from the unit of all components of the product of the selected components from the values of the corresponding components of the original series. In the model under consideration, all the components of the original series and the selected components are positive numbers. Four requirements are formulated for methods of selecting components. It is proved that all these requirements are met if and only if the time series decomposition is performed by a multiplicative model. As an example, we consider a model for selecting trends and seasonal fluctuations from monthly series of efficient data.

Keywords: time series decomposition, axiomatic approach to method selection, multiplicative model.

*Работа выполнена при финансовой поддержке фонда РФФИ (проект № 19-07-00322) и в рамках проекта РАН № 0279-2019-0003.

1. Введение

В прикладных исследованиях нередко возникает задача выделения из временного ряда, состоящего из наблюдаемых значений какого-то показателя в разные моменты времени, отдельных составляющих. Этими составляющими могут быть тренд (характеризующий общую тенденцию изменения показателя), а также регулярные колебания (сезонные, недельные, суточные). Задачам выделения, исследования свойств, прогнозирования составляющих временных рядов посвящено много работ (например, [1–10]). Обычно эти задачи рассматриваются применительно к аддитивному взаимодействию составляющих, когда временной ряд представляется в виде суммы выделяемых составляющих и остаточного члена.

В некоторых случаях более уместно использование мультипликативной модели выделения составляющих. В этом случае компоненты временного ряда представляются в виде произведения значений компонент в те же моменты времени всех выделяемых составляющих и остаточного члена. Такое представление взаимодействия составляющих применимо для случая, когда исходный временной ряд и все составляющие имеют положительные значения. Мультипликативная модель уместна, в частности, для анализа динамики экономических индексов и цен [11–16].

Основная цель данной статьи состоит в обосновании мультипликативной модели декомпозиции временных рядов, которое основывается на использовании аксиоматического подхода к анализу методов выделения составляющих путем построения набора строго формализуемых и содержательно необходимых требований к ним. Один из основных результатов данной статьи состоит в доказательстве утверждений о том, что приводимый здесь набор требований выполняется в том и только в том случае, если выделение составляющих из временного ряда осуществляется с использованием мультипликативной модели. При этом в этой модели отдельные составляющие описываются в виде мономов, для оценки значений переменных которых необходимо решать задачу минимизации функции соизмеряющей отклонения от единицы компонент исходного ряда и их аппроксимации в виде произведений выделяемых составляющих.

2. Описание мультипликативной модели

Задан временной ряд, состоящий из вещественных положительных чисел x_t , $t = 1, \dots, n$, при некотором натуральном n . Эти числа будем рассматривать как компоненты вектора $x \in R_+^n$, где R_+^n — множество n -мерных векторов со всеми положительными компонентами. Из временного ряда требуется выделить две составляющие, образующие векторы y и s из R_+^n , произведение компонент которых с одинаковыми номерами по возможности минимально отклонялось от компоненты с тем же номером исходного временного ряда. Обозначим ε вектор R_+^n отклонений, z вектор R_+^n , образуемый путем покомпонентного перемножения векторов y и s . Он имеет компоненты $z_t = y_t s_t$, $t = 1, \dots, n$.

Итак, требуется определить векторы z , y , s , ε из R_+^n , удовлетворяющие условиям

$$x = z \otimes \varepsilon, \quad (1)$$

$$z = y \otimes s, \quad (2)$$

где символ $\otimes$ обозначает покомпонентное перемножение векторов.

Считаем, что компоненты векторов y , s и, следовательно, z представляются в виде мономов:

$$y_t = \prod_{i=1}^p (\alpha_i^1)^{q_{ti}^1}, \quad (3)$$

$$s_t = \prod_{i=1}^r (\alpha_i^2)^{q_{ti}^2}, \quad (4)$$

$$z_t = \prod_{i=1}^m (\alpha_i)^{q_{ti}}, \quad t = 1, \dots, n. \quad (5)$$

Здесь p, r, m — заданные натуральные числа. Причем $m = p + r$. Величины $\alpha_i^1, \alpha_i^2, \alpha_i$ являются переменными мономов, образующими векторы $\alpha^1 \in R_+^p, \alpha^2 \in R_+^r, \alpha \in R_+^m$. Причем вектор α является конкатенацией (соединением) векторов α^1, α^2 :

$$\alpha_i = \alpha_i^1, \quad i = 1, \dots, p, \quad (6)$$

$$\alpha_{i+p} = \alpha_i^2, \quad i = 1, \dots, r. \quad (7)$$

Величины $q_{ti}^1, q_{ti}^2, q_{ti}$ — заданные коэффициенты мономов, некоторые вещественные числа. Их далее будем рассматривать как элементы матриц G^1, G^2, G размера $n \times p, n \times r$ и $n \times m$ соответственно. Причем матрица G является конкатенацией матриц G^1 и G^2 :

$$G = [G^1, G^2]. \quad (8)$$

Далее для облегчения изложения будем считать, что

$$\text{rank } G = m.$$

Необходимо определить такие значения α_i^1, α_i^2 (или, что равносильно, такие значения вектора α), при которых для векторов z, y, s, ε , удовлетворяющих (1)–(7), значения компонент вектора ε были бы как можно ближе к единице. Это условие выражает следующая целевая функция:

$$F(\varepsilon) = \sum_{t=1}^n h_t (\ln \varepsilon_t)^2 \rightarrow \min, \quad (9)$$

где h_t — заданные положительные весовые коэффициенты, образующие вектор $h \in R_+^n$. Диагональную матрицу размера n , составленную из этого вектора, обозначим

$$H = \text{diag } h.$$

Замечание 1. В статье для упрощения изложения ограничимся задачей выделения из временного ряда не более двух составляющих, хотя представленные здесь результаты обобщаются на произвольное число составляющих.

Условие положительности компонент временного ряда выполняется для многих экономических данных (например, для объемов производства или потребления товаров, цен, стоимости). Для примера будем рассматривать задачу выделения тренда и сезонных колебаний из рядов помесечных или поквартальных данных. Будем считать, что в таком случае компоненты вектора y представляют тренд, компоненты вектора s выражают сезонные отклонения от тренда. Компоненты вектора ε могут интерпретироваться как случайные отклонения.

Замечание 2. Выражения (3)–(5), рассматриваемые как функции от переменных $\alpha_i^1, \alpha_i^2, \alpha_i$, принято называть мономами. Изначально мономом называлась функция от вещественных переменных $\beta_i, i = 1, \dots, k$, имеющая вид

$$f(\beta) = c \prod_{i=1}^k (\beta_i)^{d_i} \quad (10)$$

при заданных вещественных c и целых $d_i, i = 1, \dots, k$, при некотором натуральном k . Переменные β_i могут иметь любые, в том числе неположительные, вещественные значения.

В дальнейшем в рамках геометрического программирования [17, 18] стало использоваться другое, не совпадающее с приведенным выше, определение монома. Так стала называться функция вида (10) только с положительными значениями аргументов, когда $\beta_i > 0, i = 1, \dots, k$. При этом не только коэффициент c , но и коэффициенты $d_i, i = 1, \dots, k$, могут быть любыми заданными вещественными числами. Считается, что возведение положительного числа в любую вещественную степень является числом положительным. Именно в смысле такого второго определения используется в данной статье термин “моном”.

3. Переход к аддитивной модели

Поскольку все компоненты исходного вектора x и искомых векторов $z, y, s, \varepsilon, \alpha^1, \alpha^2, \alpha$ — положительные, то их можно логарифмировать. Будем пользоваться натуральными логарифмами. В результате перейдем к векторам $\tilde{x}_t, \tilde{z}_t, \tilde{y}_t, \tilde{s}_t, \tilde{\varepsilon}_t$ из R^n и к векторам $\tilde{\alpha}^1, \tilde{\alpha}^2, \tilde{\alpha}$ из R^p, R^r и R^m с компонентами:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_t &= \ln x_t, & \tilde{z}_t &= \ln z_t, & \tilde{\varepsilon}_t &= \ln \varepsilon_t; \\ \tilde{y}_t &= \ln y_t, & \tilde{s}_t &= \ln s_t, & t &= 1, \dots, n; \\ \tilde{\alpha}_i^1 &= \ln \alpha_i^1, & i &= 1, \dots, p; \\ \tilde{\alpha}_i^2 &= \ln \alpha_i^2, & i &= 1, \dots, r; \\ \tilde{\alpha}_i &= \ln \alpha_i, & i &= 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (11)$$

После таких преобразований условия (1)–(7) приобретают вид:

$$\tilde{x} = \tilde{z} + \tilde{\varepsilon}, \quad (12)$$

$$\tilde{z} = \tilde{y} + \tilde{s}, \quad (13)$$

$$\tilde{y} = G^1 \tilde{\alpha}^1, \quad (14)$$

$$\tilde{s} = G^2 \tilde{\alpha}^2, \quad (15)$$

$$z = G\alpha, \quad (16)$$

$$\tilde{\alpha}_i = \alpha_i^1, \quad i = 1, \dots, p, \quad (17)$$

$$\tilde{\alpha}_{i+p} = \alpha_i^2, \quad i = 1, \dots, r. \quad (18)$$

Поскольку матрица G является, согласно (8), конкатенацией матриц G^1, G^2 , то условие (16) с учетом (17), (18) дублирует условия (14), (15). Целевая функция (9) переходит в следующий критерий оптимизации:

$$\tilde{f}(\tilde{\varepsilon}) = \sum_{t=1}^n h_t(\tilde{\varepsilon}_t)^2 \rightarrow \min. \quad (19)$$

Итак, после логарифмических преобразований исходного ряда и искомых векторов перешли к аддитивной линейной регрессионной модели, использующей метод наименьших квадратов для оценки параметров. Имеем следующие выражения для решения задачи (12)–(19):

$$\tilde{\alpha} = DG^{\top} H \tilde{x}, \quad (20)$$

$$\tilde{z} = B \tilde{x}, \quad (21)$$

где

$$D = (G^{\top} H G)^{-1}, \quad (22)$$

$$B = G D G^{\top} H. \quad (23)$$

При этом значения в оптимальном решении векторов $\tilde{\alpha}^1$ и $\tilde{\alpha}^2$ определяют значения (20) вектора $\tilde{\alpha}$ на основе (6), (7). Затем на основе (14), (15) можно определить оптимальные значения векторов $\tilde{y}$, $\tilde{s}$. Эти векторы можно также определить как линейные отображения вектора $\tilde{x}$:

$$\tilde{y} = \tilde{G}^1 D G^{\top} H \tilde{x}, \quad (24)$$

$$\tilde{s} = \tilde{G}^2 D G^{\top} H \tilde{x}. \quad (25)$$

Здесь $\tilde{G}^1$, $\tilde{G}^2$ — матрицы размера $n \times m$, составленные путем конкатенации матрицы G^1 с нулевой матрицей и нулевой матрицы с матрицей G^2 :

$$\tilde{G}^1 = [G^1, 0], \quad \tilde{G}^2 = [0, G^2].$$

В первом случае нулевая матрица имеет r столбцов, во втором случае нулевая матрица имеет p столбцов. Отметим, что

$$\tilde{G}^1 + \tilde{G}^2 = G.$$

Модель (12)–(19) представляет интерес в двух аспектах. Во-первых, она полезна как способ реализации мультипликативной модели (1)–(9). Вычислив значения $\tilde{z}_t$, $\tilde{y}_t$, $\tilde{s}_t$, $\tilde{\varepsilon}_t$, $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\alpha}^1$, $\tilde{\alpha}^2$, используя обратную к логарифмированию (11) операцию экспоненцирования, получим оптимальные значения переменных исходной мультипликативной модели. В частности, имеем

$$y_t = \exp \tilde{y}_t, \quad s_t = \exp \tilde{s}_t, \quad z_t = \exp \tilde{z}_t, \quad t = 1, \dots, n. \quad (26)$$

Во-вторых, полученная аддитивная модель имеет самостоятельное значение, если в ней вектор $\tilde{x}$ является исследуемым временным рядом и нас интересует его аддитивное разложение на составляющие (12), (13), которые представляются в виде линейных функций (14)–(16) с использованием для оценки параметров метода наименьших квадратов (19).

Введенное выше условие линейной независимости строк матрицы G гарантирует существование матрицы D , определяемой выражением (22). Можно было указанное условие не вводить, полагая, например, что в общем случае, в том числе, когда $\text{rank } G$ меньше m , матрица D является псевдообратной к матрице $G^{\top} H G$. То есть, если задача (12)–(19) имеет не единственное решение по переменным составляющими вектор $\tilde{\alpha}$, то будем использовать одно из этих решений, а именно с минимальной евклидовой нормой.

Пример. Приведем аддитивную модель [19, 20], созданную для выделения и прогнозирования тренда и сезонных колебаний из помесечных или поквартальных данных. Тренд в этой модели задан в виде полинома от времени

$$\tilde{y}_t = \sum_{i=1}^p \alpha_i t^{i-1}, \quad t = 1, \dots, n.$$

Коэффициенты матрицы G^1 в этом случае имеют значения

$$q_{ti}^1 = t^{i-1}, \quad i = 1, \dots, p, \quad t = 1, \dots, n.$$

Сезонные колебания задаются как взвешенная по степеням времени сумма нескольких строго периодических (с периодом, равным году) функций

$$\tilde{s}_t = \sum_{l=0}^L s_l(t) t^l$$

при некотором целом $L \geq 0$. Периодические функции задаются выражением

$$s_l(t) = \sum_{j=1}^{K/2} b_{lj} \cos \frac{2\pi jt}{K} + \sum_{j=1}^{K/2-1} c_{lj} \sin \frac{2\pi jt}{K}.$$

Здесь K — число наблюдений рассматриваемого ряда в году. Это число равно 4 для поквартальных данных и равно 12 для помесечных данных. Коэффициенты b_{lj} , c_{lj} являются искомыми переменными, составляющими вектор α_i^2 . Число компонент у этого вектора в данном случае определяется формулой

$$r = (K - 1)(L + 1).$$

Матрица G_2 в этом случае состоит из нулевых элементов и элементов, имеющих значения

$$t^l \cos \frac{2\pi jt}{K}, \quad j = 1, \dots, K/2, \\ t^l \sin \frac{2\pi jt}{K}, \quad j = 1, \dots, K/2 - l, \quad t = 1, \dots, n, \quad l = 0, \dots, L.$$

Периодическая функция при $l = 0$ представляет средние сезонные колебания за рассматриваемый многолетний период. Периодические функции при $l \geq 1$ представляют возможные происходившие изменения амплитуды и формы сезонных колебаний.

Приведенная аддитивная модель использовалась для анализа динамики среднемесячных температур [21], для анализа и прогнозирования на год вперед электропотребления по регионам Сибири, для выделения и прогнозирования тренда, сезонных колебаний из помесечных объемов производства, потребления и запасов котельно-печного топлива по регионам СССР [22]. В этих случаях особенно важно выполнение условия аддитивности, поскольку этим условием должны быть связаны месячные объемы поставок в регион, объемы потребления, абсолютные уровни и изменения эксплуатационных запасов энергоресурсов. Выполнение условия аддитивности для тренда и сезонных колебаний важно для корректного агрегирования временных рядов производства, поставок, потребления

и эксплуатационных запасов отдельных видов котельно-печного топлива в исходных территориальных более мелких регионах (области, края) в такие же показатели для укрупненных экономических районов. На основе данной модели осуществлялись, в частности, исследования по нормированию эксплуатационных запасов котельно-печного топлива и резервов мощности в топливодобыче. В силу того, что во всех регионах бывшего СССР резко континентальный климат, требуется создание и использование больших сезонных запасов и резервов мощности по производству и транспорту котельно-печного топлива. Для определения рациональных объемов средств обеспечения надежности топливоснабжения и рациональных механизмов использования этих средств необходимым были исследования внутригодовой динамики производства, поставок и потребления топлива. Полученные научно-прикладные результаты таких исследований, осуществлявшихся по заданиям органов управления энергоснабжением страны, частично представлены в монографиях [21, 22].

Близкая к описанной модель выделения из временных рядов тренда и сезонных колебаний представлена в [23].

Изложенная аддитивная модель в результате экспоненцирования переменных переходит в мультипликативную модель выделения и прогнозирования тренда и сезонных колебаний. Возможность реализации и использования такого варианта модели выделения и прогнозирования тренда и сезонных колебаний временных рядов на базе представленной выше аддитивной модели рассматривалась в монографии [19]. Мультипликативные модели особенно могут быть полезны при анализе экономических временных рядов, поскольку в экономическом анализе нередко используются динамические ряды, связанные мультипликативными зависимостями. Например, временные ряды помесечных или поквартальных объемов производства какой-то продукции могут быть представлены как произведения объемов использования какого-то производственного ресурса в каждом квартале или месяце (численности работающих, производственных мощностей, потребляемой энергии и др.) на показатели эффективности использования этих ресурсов (производительности труда, отдачи производственных мощностей, энергоотдачи и др.). Особенно важны мультипликативные модели выделения составляющих при анализе динамики цен, поскольку в этом случае тренд обычно отражает и происходящие инфляционные процессы, имеющие масштабирующую природу. Более стабильными в этом случае обычно являются не абсолютные, а относительные отклонения от тренда. В статьях [11, 13, 16] представлен некоторый опыт использования мультипликативной модели для анализа и краткосрочного (на год вперед) прогнозирования трендов, регулярных сезонных и случайных отклонений среднемесячных цен на сельскохозяйственную продукцию и продовольственные товары. Научно-прикладной целью этих исследований была разработка рекомендаций о формировании механизмов регулярных исследований и публикаций региональных органов власти по анализу и прогнозированию цен на рынках сельскохозяйственной продукции, что важно для выбора рациональных решений в сельскохозяйственном производстве региона.

Весовые коэффициенты. Иногда приводят различия между “методом наименьших квадратов”, считая, что он соответствует случаю одинаковых, единичных весовых коэффициентов h_t , и “методом взвешенных наименьших квадратов”. Уместно отметить, что Гаусс, автор метода наименьших квадратов, не приводил такого различия. Он подчеркивал, что под термином “метод наименьших квадратов” он понимает общий случай, в котором используются любые положительные весовые коэффициенты [24]. Для введения и использования весовых коэффициентов могут быть разные причины. Некоторые из них рассмотрены в [19].

В частности, весовые коэффициенты могут учитывать различия ценности или информативности наблюдений временного ряда в разные периоды времени. В [19, 20, 22] представленная выше модель выделения тренда и сезонных колебаний использовалась с экспоненциальными весами информативности

$$h_t = \exp(\lambda t), \quad t = 1, \dots, n,$$

где λ — заданный положительный коэффициент. Показатель $\exp \lambda$ интерпретируется как темп старения данных — насколько большая роль отводится значениям исходного временного ряда в период t по сравнению со значениями предшествующего периода $t - 1$. При использовании данной модели для целей краткосрочного прогнозирования электроэнергии и топливопотребления параметр λ определялся на основе прогнозов “пост фактум”, т. е. путем прогнозов на уже прошедшие периоды времени как еще на не наступившие. Методом золотого сечения выбиралось такое значение λ , при котором погрешность прогнозов (измеряемая средним квадратическим отклонением прогнозируемых и фактических значений анализируемого ряда) была минимальна.

4. Требования к методам выделения составляющих временных рядов

Процедуру выделения из временного ряда $x \in R_+^n$ какой-либо составляющей в рамках мультипликативной модели (1), (2) будем представлять в виде отображения ϕ этого вектора в вектор $\phi(x) \in R_+^n$. Такое отображение будем называть также оператором или вектор-функцией. Отдельную компоненту этого отображения обозначим $\phi_t(x)$, $t = 1, \dots, n$. Чтобы конкретизировать, что речь идет о выделении составляющей y , s или z , будем использовать обозначения ϕ^1 , ϕ^2 , ϕ^0 . То есть считаем, что

$$y = \phi^1(x), \quad s = \phi^2(x), \quad z = \phi^0(x). \quad (27)$$

При этом условие (2) означает, что для любого $x \in R_+^n$

$$\phi^0(x) = \phi^1(x) \otimes \phi^2(x). \quad (28)$$

Процедуру выделения из временного ряда $\tilde{x} \in R^n$ какой-либо составляющей в рамках условий (12), (13) будем представлять в виде отображения $\tilde{\phi}$ этого вектора в вектор $\tilde{\phi}(\tilde{x}) \in R^n$. Для отображения в конкретные векторы $\tilde{y}$, $\tilde{s}$, $\tilde{z}$ будем использовать обозначения $\tilde{\phi}^1$, $\tilde{\phi}^2$, $\tilde{\phi}^0$. То есть считаем, что

$$\tilde{y} = \tilde{\phi}^1(\tilde{x}), \quad \tilde{s} = \tilde{\phi}^2(\tilde{x}), \quad \tilde{z} = \tilde{\phi}^0(\tilde{x}). \quad (29)$$

При этом условие (13) означает, что для любого $\tilde{x} \in R^n$

$$\tilde{\phi}^0(\tilde{x}) = \tilde{\phi}^1(\tilde{x}) + \tilde{\phi}^2(\tilde{x}). \quad (30)$$

Считаем, что отображения ϕ и $\tilde{\phi}$ представляют один и тот же метод, если для $x \in R_+^n$ и $\tilde{x} \in R^n$ таких, что

$$\tilde{x}_t = \ln x_t, \quad t = 1, \dots, n, \quad (31)$$

выполняется равенство

$$\tilde{\phi}_t(\tilde{x}) = \ln \phi_t(x), \quad t = 1, \dots, n. \quad (32)$$

Приводимые далее два требования к методам выделения составляющих будут относиться ко всем шести отображениям: $\phi^1, \phi^2, \phi^0, \tilde{\phi}^1, \tilde{\phi}^2, \tilde{\phi}^0$.

Требование 1. Непрерывность. Отображения $\phi, \tilde{\phi}$ должны быть непрерывными. Это означает, что малые изменения векторов $x, \tilde{x}$, например, из-за погрешностей сбора и обработки данных, должны приводить к малым изменениям результата, т.е. значений выделяемых составляющих.

Требование 2. Идемпотентность. Если выделенную составляющую рассматривать как исходный временной ряд, то попытка выделить из них ту же составляющую, тем же методом должна приводить к исходному результату: при любых $x \in R_+^n$ и $\tilde{x} \in R^n$

$$\phi(\phi(x)) = \phi(x), \quad \tilde{\phi}(\tilde{\phi}(\tilde{x})) = \tilde{\phi}(\tilde{x}). \quad (33)$$

Следующие два требования будут иметь разные применения. Первое из них далее будет применяться к отображениям ϕ^1, ϕ^2, ϕ^0 . Второе будет применяться к отображениям $\tilde{\phi}^1, \tilde{\phi}^2, \tilde{\phi}^0$.

Требование 3. Мультипликативность. Для любых $x^1 \in R_+^n, x^2 \in R_+^n$ должно выполняться равенство

$$\phi(x^1 \otimes x^2) = \phi(x^1) \otimes \phi(x^2). \quad (34)$$

В экономических исследованиях часто рассматривают показатели, являющиеся произведением других показателей. Например, стоимость товара определяется как произведение цены на объем товара. Покомпонентное перемножение временных рядов объемов и цен товара дает временной ряд стоимости. Естественно ожидать, что тренды (или сезонные отклонения) временных рядов объемов и цен при покомпонентном перемножении составляет тренд (или сезонные отклонения) временного ряда стоимости товара.

Требование 3а. Аддитивность. Для любых $\tilde{x}^1 \in R^n, \tilde{x}^2 \in R^n$ должно выполняться равенство

$$\tilde{\phi}(\tilde{x}^1 + \tilde{x}^2) = \tilde{\phi}(\tilde{x}^1) + \tilde{\phi}(\tilde{x}^2). \quad (35)$$

Согласно этому требованию сумма одинаковых составляющих двух (или большего количества) временных рядов должна дать ту же составляющую суммарного ряда. Например, сумма трендов (или сезонных колебаний) объемов производства одного и того же товара в нескольких районах должна составить тренд (или сезонные колебания) производства этого товара в регионе, объединяющем все эти районы. Известно [25], что непрерывность и аддитивность отображения влечет его линейность. Справедлива

Лемма 1. *Отображение $\tilde{\phi}$ вектора $\tilde{x} \in R^n$ в вектор $\tilde{\phi}(\tilde{x}) \in R^n$ непрерывно и аддитивно в том и только в том случае, если существует квадратная матрица B размера n такая, что при любом $(\tilde{x}) \in R^n$*

$$\tilde{\phi}(\tilde{x}) = B\tilde{x}. \quad (36)$$

Из этой леммы, учитывая, что каждому отображению $\tilde{\phi}$ векторов R^n в векторы R^n соответствует по условию (31), (32) отображение ϕ векторов R_+^n в векторы R_+^n , получаем следующее утверждение.

Теорема 1. *Отображение ϕ вектора $x \in R_+^n$ в вектор $\phi(x) \in R_+^n$ удовлетворяет условию непрерывности и мультипликативности в том и только в том случае, если существует квадратная матрица B размера n такая, что*

$$\phi_t(x) = \prod_{j=1}^n (x_j)^{b_{tj}}, \quad t = 1, \dots, n, \quad (37)$$

где b_{tj} — элементы матрицы B .

Тот факт, что требования аддитивности и мультипликативности являются альтернативными (взаимоисключающими), можно обосновывать на основе следующего, доказанного в [19, 20], факта. В этом утверждении рассматривается условие мультипликативности, обобщенное на отображение векторов R^n в векторы R^n . Назовем это условие требованием обобщенной мультипликативности.

Лемма 2. *Для отображения $\tilde{\phi}$ вектора R^n в вектор R^n требования непрерывности, обобщенной мультипликативности и аддитивности выполняются в том и только в том случае, если для каждого $t \in \{1, \dots, n\}$ либо $\tilde{\phi}_t(x) = 0$ для любого $x \in R^n$, либо существует $i \in \{1, \dots, n\}$, при котором $\phi_t(x) = x_i$ для любого $x \in R^n$.*

Для отображений R_+^n в R_+^n сохраняется только второй вариант в приведенной лемме. Справедлива

Теорема 2. *Для отображения ϕ вектора R_+^n в вектор R_+^n требования непрерывности, мультипликативности и аддитивности выполняются в том и только в том случае, если для каждого $t \in \{1, \dots, n\}$ существует $i \in \{1, \dots, n\}$, при котором $\phi_t(x) = x_i$ для любого $x \in R_+^n$.*

Согласно приведенным утверждениям оба требования мультипликативности и аддитивности могут выполняться только для отображений, не представляющих интереса в качестве процедуры выделения составляющих временных рядов. Далее при формулировке пары следующих требований для отображений ϕ и $\tilde{\phi}$, связанных условием (31), (32), будем считать, что ϕ — непрерывное и мультипликативное, а отображение $\tilde{\phi}$ — непрерывное и аддитивное. Из леммы 1 и теоремы 1 следует, что такие отображения дифференцируемые при любом $x \in R^n$ для $t = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, n$

$$\frac{\partial \tilde{\phi}_t(x)}{\partial x_i} = b_{ti}, \quad (38)$$

$$\frac{\partial \phi_t(x)}{\partial x_i} = b_{ti} \phi_t(x) x^{-b_{ti}}. \quad (39)$$

Здесь $\phi_t(x)$ имеет вид (37).

Приводимые далее два требования будем применять только к операторам, выделяющим агрегированные составляющие z или $\tilde{z}$, т.е. к операторам ϕ^0 и $\tilde{\phi}^0$. Считаем заданными положительные весовые коэффициенты информативности наблюдений h_t , $t = 1, \dots, n$. Обозначим для $x \in R_+^n$

$$\varphi_\tau^t(x) = \frac{\partial \phi_t^0(x)}{\partial x_\tau} \frac{x_\tau}{\phi_t^0(x)} \quad (40)$$

показатель эластичности изменений выделяемой составляющей $\phi_t^0(x)$ периода τ от значения компоненты исходного ряда периода t . Он показывает, на сколько процентов изменится составляющая в момент t при изменении на один процент значения исходного ряда в момент τ . Выражение (40) равносильно следующему:

$$\varphi_\tau^t(x) = \frac{\partial \ln \phi_t^0(x)}{\partial \ln x_\tau}.$$

Показатель φ_τ^t можно интерпретировать как измеритель силы влияния значения исходного ряда в период τ на значение выделяемой компоненты периода t . Согласно приводимому ниже требованию влияние данных периода t на составляющую периода τ , деленное на обратное влияние данных периода τ на составляющую периода t , должно равняться отношению экзогенно заданных весов информативности периодов t и τ .

Требование 4. Учет информативности наблюдений в мультипликативной форме: при любых t, τ из $\{1, \dots, n\}$ для $x \in R_+^n$

$$\frac{\varphi_t^\tau(x)}{\varphi_\tau^t(x)} = \frac{h_t}{h_\tau}. \quad (41)$$

Для аддитивной модели влияние исходных данных периода τ на выделяемую составляющую периода t целесообразно определять в виде частных производных, т. е. в виде следующего показателя: для $\tau, t \in \{1, \dots, n\}$, $\tilde{x} \in R^n$

$$\tilde{\varphi}_\tau^t(\tilde{x}) = \frac{\partial \tilde{\phi}_t^0(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}_\tau}. \quad (42)$$

Требование 4а. Учет информативности наблюдений в аддитивной форме: при любых t, τ из $\{1, \dots, n\}$ для всех $x \in R^n$

$$\frac{\tilde{\varphi}_t^\tau(\tilde{x})}{\tilde{\varphi}_\tau^t(\tilde{x})} = \frac{h_t}{h_\tau}. \quad (43)$$

5. Обоснование мультипликативной модели

Сначала будем приводить в виде лемм утверждения, относящиеся к свойствам отображений $\tilde{\phi}^1, \tilde{\phi}^2, \tilde{\phi}^0$. На этой основе затем формулируются утверждения для отображений ϕ^1, ϕ^2, ϕ^0 в форме теорем.

Лемма 3. *Требования непрерывности, идемпотентности, аддитивности 1, 2, 3а для всех трех отображений $\tilde{\phi}^1, \tilde{\phi}^2, \tilde{\phi}^0$ и требование 4а учета информативности наблюдений в аддитивной форме для $\tilde{\phi}^0$ выполняются, если процедуры выделения составляющих для $\tilde{x} \in R^n$ осуществляются на основе аддитивной линейной модели (12)–(19).*

Доказательство. Выполнение для отображений $\tilde{\phi}^1, \tilde{\phi}^2, \tilde{\phi}^0$ требований непрерывности и аддитивности (35) следует из линейности этих отображений согласно расчетным формулам (21), (24), (25).

Требование 4а учета информативности наблюдений в аддитивной форме (42), с учетом (36), (41) получает следующую формулировку: при любых $t, \tau \in \{1, \dots, n\}$

$$b_{t\tau}h_\tau = b_{\tau t}h_t.$$

Это условие в матричной форме имеет вид

$$HB = B^T H. \quad (44)$$

Непосредственно из выражения (23) матрицы B с учетом симметричности, согласно (22), матрицы D , вытекает это равенство.

Из (21)–(23) следует идемпотентность отображения $\tilde{\phi}^0$: при любом $\tilde{x} \in R^n$

$$\tilde{\phi}^0(\tilde{\phi}^0(\tilde{x})) = GDG^T H(GDG^T H\tilde{x}) = GDG^T H\tilde{x} = \tilde{\phi}^0(\tilde{x}).$$

Использовалось равенство

$$DG^T HG = I, \quad (45)$$

где I — единичная матрица размера m .

Представим матрицу D как конкатенацию матрицы D^1 размера $p \times m$ и матрицы D^2 размера $r \times m$:

$$D = \begin{bmatrix} D^1 \\ D^2 \end{bmatrix}.$$

Воспользуемся представлением (8) матрицы G . Имеем

$$\begin{bmatrix} D^1 \\ D^2 \end{bmatrix} G^T H[G^1, G^2] = \begin{bmatrix} L_{11} L_{12} \\ L_{21} L_{22} \end{bmatrix}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} L_{11} &= D^1 G^T H G^1, & L_{22} &= D^2 G^T H G^2, \\ L_{12} &= D^1 G^T H G^2, & L_{21} &= D^2 G^T H G^1 \end{aligned}$$

суть матрицы размеров $p \times p$, $r \times r$, $p \times r$ и $r \times p$.

В силу (45)

$$L_{11} = I^1, \quad L_{12} = 0, \quad L_{21} = 0, \quad L_{22} = I^2,$$

где I^1 и I^2 — единичные матрицы размеров p и r .

Из (24), (25) следует: при любом $\tilde{x} \in R^n$

$$\tilde{\phi}^1(\tilde{\phi}^1(\tilde{x})) = \tilde{G}^1 DG^T H \tilde{G}^1 DG^T H\tilde{x} = \tilde{G}^1 \begin{bmatrix} L_{11} 0 \\ L_{21} 0 \end{bmatrix} DG^T H\tilde{x} = \tilde{G}^1 DG^T H\tilde{x} = \tilde{\phi}^1(\tilde{x}),$$

$$\tilde{\phi}^2(\tilde{\phi}^2(\tilde{x})) = \tilde{G}^2 DG^T H \tilde{G}^2 DG^T H\tilde{x} = \tilde{G}^2 \begin{bmatrix} 0 L_{12} \\ 0 L_{22} \end{bmatrix} DG^T H\tilde{x} = \tilde{G}^2 DG^T H\tilde{x} = \tilde{\phi}^2(\tilde{x}).$$

Идемпотентность отображений $\tilde{\phi}^1$, $\tilde{\phi}^2$ установлена. $\square$

Из доказанной леммы и условия (31), (32) следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 3. *Требования непрерывности, идемпотентности, мультипликативности для всех трех отображений ϕ^1 , ϕ^2 , ϕ^0 и требование 4 учета информативности наблюдений в мультипликативной форме для ϕ^0 выполняются, если процедура выделения составляющих осуществляется на основе использования мультипликативной модели (1)–(9).*

Для процедур выделения агрегированной составляющей $\tilde{\phi}^0$ и ϕ^0 справедливы обратные утверждения.

Лемма 4. Если отображение $\tilde{\phi}^0$ векторов R^n в векторы R^n удовлетворяет требованиям непрерывности, аддитивности, идемпотентности и учета информативности наблюдений в аддитивной форме, то существует матрица коэффициентов G размера $n \times m$ при некотором натуральном m , такая что выделение составляющей $\tilde{z}$ оператором $\tilde{\phi}^0$ равносильно оценке этой составляющей на основе аддитивной линейной модели (12), (16), (19).

Доказательство. Из непрерывности и аддитивности, согласно лемме 1, следует, что существует квадратная матрица B размера n , такая что для отображения $\tilde{\phi}^0$ справедливо (36).

Требования идемпотентности и учета информативности наблюдений в аддитивной форме означают, что для матрицы B выполняются равенства:

$$BB = B, \quad (46)$$

$$BH^{-1} = H^{-1}B^T, \quad (47)$$

где H — диагональная матрица, составленная из экзогенно заданных положительных весовых коэффициентов. Положим $m = n$,

$$G = BH^{-1}. \quad (48)$$

Выделение составляющей z методом наименьших квадратов можно рассматривать как результат решения следующей задачи поиска вектора α и вектора z из условия

$$G\alpha = z. \quad (49)$$

$$\frac{1}{2}(z - x)^T H(z - x) \rightarrow \min. \quad (50)$$

Следовательно, вычисление вектора α осуществляется в результате решения системы линейных уравнений

$$(G^T H G)\alpha = G^T H x. \quad (51)$$

Отметим, что здесь мы не считаем линейно независимые столбцы матрицы G , поэтому матрица $G^T H G$ может не иметь обратную.

Используя представление (48) и затем свойства (46), (47), получаем

$$G^T H G = (BH^{-1})^T H B H^{-1} = (H^{-1} B^T) H B H^{-1} = B H^{-1} H B H^{-1} = B B H^{-1} = B H^{-1} = G.$$

Система уравнений (51) приобретает вид

$$B H^{-1} \alpha = B x.$$

Отсюда в качестве решения имеем вектор

$$\alpha = H x.$$

Подставляя это значение в (49) и используя (48), имеем

$$z = GH = BH^{-1}Hx = Bx.$$

То есть вектор z является одновременно и постулируемым отображением (36) и результатом решения задачи (49), (50). $\square$

Следует особо подчеркнуть, что в доказанной лемме 4 рассматривалась модель выделения только суммарно обеих составляющих. Из леммы 4, используя условие (31), (32), получаем следующее утверждение.

Теорема 4. *Если отображение ϕ^0 векторов R_+^n удовлетворяет требованиям непрерывности, мультипликативности, идемпотентности и учета информативности наблюдений в мультипликативной форме, то существует матрица коэффициентов G размера $n \times t$ при некотором натуральном t , такая что выделение составляющей z оператором ϕ^0 равносильно оценке этой составляющей на основе мультипликативной модели (1), (5), (9).*

Можно особо отметить, что в приведенной теореме рассматривается мультипликативная модель выделения только произведения двух составляющих временного ряда.

6. Заключение

Рассмотрены два класса моделей выделения двух составляющих временного ряда. Один из этих классов образуют линейные модели, в которых обе составляющие задаются в виде линейных функций, для определения коэффициентов которых используется метод наименьших квадратов. Модели этого класса названы аддитивными, поскольку в них исходный ряд представляется как сумма двух выделяемых составляющих и так называемого остаточного члена, сумма взвешенных квадратов которого минимизируется при оценке коэффициентов линейных функций.

Название “аддитивные модели декомпозиции временного ряда” подходит для указанного класса моделей также потому, что процедура выделения обеих составляющих, так же, как и суммарной составляющей, в данном случае удовлетворяет требованию аддитивности. Согласно этому требованию сумма выделенных одинаковых составляющих данным методом из нескольких временных рядов должна давать ту же составляющую, выделяемую тем же методом из суммарного ряда.

Уместно особо подчеркнуть, что для аддитивных моделей все выделяемые составляющие имеют ту же размерность, что и исходный временной ряд. Если в исходном временном ряду рассматриваются объемы добычи какого-то ресурса, выраженные в тоннах, то и обе рассматриваемые составляющие (например, тренд и сезонные колебания), а также остаточный член измеряются в тоннах.

Второй класс рассматриваемых в статье моделей декомпозиции временного ряда представляют мультипликативные модели. В этих моделях исходный ряд представляется в виде произведения двух выделяемых составляющих и составляющей, характеризующей относительные отклонения произведений двух выделяемых составляющих от исходного ряда. Обе выделяемые составляющие представляются в виде произведений мономов, переменные которых определяются в результате решения задачи минимизации произведения взвешенных отклонений от единичного значения.

Мультипликативные модели редко рассматриваются в литературе, посвященной декомпозиции временных рядов, хотя во многих случаях они более уместны, чем аддитивные модели. В частности, мультипликативные модели полезны для выделения и прогно-

зирования составляющих динамики цен. Название “мультипликативные модели декомпозиции временного ряда” используется так же потому, что процедура выделения обеих составляющих в этом случае удовлетворяет требованию мультипликативности. Согласно этому требованию покомпонентное произведение выделенных одинаковых составляющих двух или большего количества временных рядов должно дать ту же составляющую, выделенную тем же методом из временного ряда, получаемого путем покомпонентного перемножения исходных временных рядов.

Мультипликативные модели могут применяться к рядам, состоящим только из положительных чисел. Все выделяемые составляющие в этих моделях также состоят из положительных чисел.

В статье приводятся конкретные примеры аддитивных и мультипликативных моделей выделения тренда и сезонных отклонений из помесечных или поквартальных данных. Приведенные модели использовались, в том числе авторами, для анализа и прогнозирования объемов производства, цен, температур воздуха.

Существует тесная связь моделей обоих классов. Любую мультипликативную модель можно в результате логарифмирования представить в виде аддитивной модели. И, наоборот, аддитивную модель можно в результате экспоненцирования представить как мультипликативную. Основная теоретическая цель данной статьи состояла в использовании аксиоматического подхода к обоснованию использования мультипликативных и аддитивных моделей выделения составляющих временных рядов. Формулируются и обсуждаются два набора требований к методам декомпозиции. Доказываются утверждения в виде лемм и теорем о том, что один из наборов требований приводит к целесообразности использования аддитивной модели. Другой рассматриваемый в статье набор требований приводит к целесообразности использования мультипликативной модели декомпозиции временных рядов.

Уместно отметить, что исходным импульсом к использованию аксиоматического подхода для анализа и выбора методов декомпозиции временного ряда послужила статья Ловелла [26], где такой подход использовался применительно к проблеме выделения тренда из временного ряда, содержащего сезонную составляющую. Подробно полученные Ловеллом результаты и некоторые выявленные у него погрешности представлены в [19–22].

Литература

1. **Андерсон Т.** Статистический анализ временных рядов. — М.: Мир, 1976.
2. **Бокс Дж., Дженкинс Г.** Анализ временных рядов: прогноз и управление. — М.: Мир, 1974.
3. **Кендэл М.** Временные ряды. — М.: Финансы и статистика, 1981.
4. **Суслов В.И., Ибрагимов Н.М., Талышева Л.П., Цыплаков А.А.** Эконометрия: учебное пособие. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2005.
5. **Хеннан Э.** Многомерные временные ряды. — М.: Мир, 1974.
6. **Четыркин Е.М.** Статистические методы прогнозирования. — М.: Статистика, 1977.
7. **Commandeur J.J.F., Koopman S.J.** An Introduction to State Space Time Series Analysis. — Oxford: Oxford University Press, 2007.
8. **Floyd J.E.** Statistics for Economists: a Beginning. — Toronto: University of Toronto, 2010.
9. **Harris R. and Sollis R.** Applied Time Series Modelling and Forecasting. — John Wiley & Sons Ltd, 2003.

10. **Woodward W.A., Gray H.L., Elliott A.C.** Applied Time Series Analysis with R. 2nd Edition. — CRC Press, Taylor & Francis Group, 2017.
11. **Белых Т.В., Зоркальцев В.И., Полковская М.Н.** Сравнительный анализ методов прогнозирования цен на сельскохозяйственную продукцию // Цифровые технологии и системы в сельском хозяйстве. Материалы международной научно-практической конференции. — 2019. — С. 47–54.
12. **Зоркальцев В.И.** Индексы цен и инфляционные процессы. — Новосибирск: Наука, 1996.
13. **Зоркальцев В.И., Полковская М.Н.** Аддитивная и мультипликативная модели выявления тренда и сезонных колебаний: приложение мультипликативной модели к динамике цен на сельскохозяйственную продукцию // Управление большими системами. — 2020. — Вып. 86. — С. 98–115.
14. **Одияко Н.Н., Голодная Н.Ю.** Применение аддитивной и мультипликативной моделей прогнозирования // Экономика и предпринимательство. — 2013. — № 12–1 (41). — С. 667–674.
15. **Hyndman R.J., Koehler A.B., Ord J.K., Snyder R.D.** Forecasting with Exponential Smoothing. Springer Series in Statistics. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008.
16. **Polkovskaya M.N.** Situation management of agricultural production based on the prediction of prices for agricultural products // Proc. of the VIth Int. Workshop “Critical Infrastructures: Contingency Management, Intelligent, Agent-Based, Cloud Computing and Cyber Security”. — 2019. — P. 83–89.
17. **Даффин Р., Питерсон Э., Зенер К.** Геометрическое программирование. — М.: Мир, 1972.
18. **Зангвилл У.** Нелинейное программирование. Единый подход. — М.: Советское радио, 1973.
19. **Зоркальцев В.И.** Метод наименьших квадратов: геометрические свойства, альтернативные подходы, приложения. — Новосибирск: Наука, 1995.
20. **Зоркальцев В.И.** Обоснование выбора регрессионной модели для анализа и прогнозирования процессов топливоснабжения с сезонной составляющей // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. — 1978. — № 3. — С. 135–143.
21. **Зоркальцев В.И.** Многолетние вариации температур и их влияние на экономику и энергетику. — Новосибирск: Гео, 2017.
22. **Зоркальцев В.И.** Методы прогнозирования и анализа эффективности функционирования системы топливоснабжения. — М.: Наука, 1980.
23. **Henshaw R.C.** Application of the general linear model to seasonal adjustment of economic time series // Econometrica. — 1966. — Vol. 34. — P. 381–395.
24. **Гаусс К.Ф.** Избранные геофизические сочинения. Т. 1. — М.: Геоиздат, 1957.
25. **Люстерник Л.А., Соболев В.Н.** Элементы функционального анализа. — М.: Наука, 1965.
26. **Lovell M.C.** Seasonal adjustment of economic time series and multiple regression analysis // J. of Amer. Statist. Assoc. — 1963. — Vol. 58. — P. 993–1010.

Поступила в редакцию 6 июля 2021 г.

После исправления 9 августа 2021 г.

Принята к печати 27 января 2022 г.

Литература в транслитерации

1. **Anderson T.** Statisticheskii analiz vremennykh ryadov. — М.: Мир, 1976.
2. **Boks Dzh., Dzhenkins G.** Analiz vremennykh ryadov: prognoz i upravlenie. — М.: Мир, 1974.
3. **Kendel M.** Vremennye ryady. — М.: Finansy i statistika, 1981.

4. **Suslov V.I., Ibragimov N.M., Talysheva L.P., Tsyplakov A.A.** Ekonometriya: uchebnoe posobie. — Novosibirsk: Izd-vo SO RAN, 2005.
5. **Khennan E.** Mnogomernye vremennye ryady. — M.: Mir, 1974.
6. **Chetyrkin E.M.** Statisticheskie metody prognozirovaniya. — M.: Statistika, 1977.
7. **Commandeur J.J.F., Koopman S.J.** An Introduction to State Space Time Series Analysis. — Oxford: Oxford University Press, 2007.
8. **Floyd J.E.** Statistics for Economists: a Beginning. — Toronto: University of Toronto, 2010.
9. **Harris R. and Sollis R.** Applied Time Series Modelling and Forecasting. — John Wiley & Sons Ltd, 2003.
10. **Woodward W.A., Gray H.L., Elliott A.C.** Applied Time Series Analysis with R. 2nd Edition. — CRC Press, Taylor & Francis Group, 2017.
11. **Belykh T.V., Zorkal'tsev V.I., Polkovskaya M.N.** Sravnitel'nyi analiz metodov prognozirovaniya tsen na sel'skokhozyaistvennuyu produkciyu // Tsifrovye tekhnologii i sistemy v sel'skom khozyaistve. Materialy mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii. — 2019. — S. 47–54.
12. **Zorkal'tsev V.I.** Indeksy tsen i inflyatsionnye protsessy. — Novosibirsk: Nauka, 1996.
13. **Zorkal'tsev V.I., Polkovskaya M.N.** Additivnaya i mul'tiplikativnaya modeli vyyavleniya trenda i sezonnykh kolebaniy: prilozhenie mul'tiplikativnoi modeli k dinamike tsen na sel'skokhozyaistvennuyu produkciyu // Upravlenie bol'shimi sistemami. — 2020. — Vyp. 86. — S. 98–115.
14. **Odiyako N.N., Golodnaya N.Yu.** Primenenie additivnoi i mul'tiplikativnoi modelei prognozirovaniya // Ekonomika i predprinimatel'stvo. — 2013. — № 12-1 (41). — S. 667–674.
15. **Hyndman R.J., Koehler A.B., Ord J.K., Snyder R.D.** Forecasting with Exponential Smoothing. Springer Series in Statistics. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008.
16. **Polkovskaya M.N.** Situation management of agricultural production based on the prediction of prices for agricultural products // Proc. of the VIth Int. Workshop "Critical Infrastructures: Contingency Management, Intelligent, Agent-Based, Cloud Computing and Cyber Security". — 2019. — P. 83–89.
17. **Daffin R., Piterson E., Zener K.** Geometricheskoe programmirovaniye. — M.: Mir, 1972.
18. **Zangvill U.** Nelineinoe programmirovaniye. Edinyi podkhod. — M.: Sovetskoe radio, 1973.
19. **Zorkal'tsev V.I.** Metod naimen'shikh kvadratov: geometricheskie svoystva, al'ternativnye podkhody, prilozheniya. — Novosibirsk: Nauka, 1995.
20. **Zorkal'tsev V.I.** Obosnovaniye vybora regressionnoi modeli dlya analiza i prognozirovaniya protsessov toplivosnabzheniya s sezonnoi sostavlyayuschei // Izvestiya AN SSSR. Energetika i transport. — 1978. — № 3. — S. 135–143.
21. **Zorkal'tsev V.I.** Mnogoletnie variatsii temperatur i ikh vliyaniye na ekonomiku i energetiku. — Novosibirsk: Geo, 2017.
22. **Zorkal'tsev V.I.** Metody prognozirovaniya i analiza effektivnosti funktsionirovaniya sistemy toplivosnabzheniya. — M.: Nauka, 1980.
23. **Henshaw R.C.** Application of the general linear model to seasonal adjustment of economic time series // Econometrica. — 1966. — Vol. 34. — R. 381–395.
24. **Gauss K.F.** Izbrannyye geofizicheskie sochineniya. T. 1. — M.: Geoizdat, 1957.
25. **Lyusternik L.A., Sobolev V.N.** Elementy funktsional'nogo analiza. — M.: Nauka, 1965.
26. **Lovell M.C.** Seasonal adjustment of economic time series and multiple regression analysis // J. of Amer. Statist. Assoc. — 1963. — Vol. 58. — P. 993–1010.

