УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛИТ

С. А. Калоеров, А. И. Занько

Донецкий национальный университет, 83001 Донецк, Украина
E-mails: kaloerov@mail.ru, all5370@rambler.ru

Предложен метод решения задач линейной вязкоупругости для тонких плит, находящихся под действием изгибающих моментов и поперечных сил. Методом малого параметра исходная задача сведена к последовательности краевых задач, решаемых с использованием комплексных потенциалов теории изгиба многосвязных анизотропных плит. Получены общие представления комплексных потенциалов и краевые условия для их определения. С использованием замены степеней малого параметра операторами Работнова разработан метод определения напряженного состояния плиты в любой момент времени по комплексным потенциалам приближений. Решена задача о плите с эллиптическими отверстиями. Приведены результаты численных исследований в случае плиты с одним или двумя отверстиями. Исследовано изменение изгибающих моментов во времени вплоть до достижения стационарного состояния, а также влияние геометрических характеристик плиты на значения этих величин.

Ключевые слова: вязкоупругость, многосвязная плита, комплексные потенциалы теории изгиба плит, метод малого параметра, обобщенный метод наименьших квадратов.

DOI: 10.15372/PMTF20170215

Напряжения, возникающие в вязкоупругом теле при различных внешних воздействиях, со временем изменяются, что необходимо учитывать при расчете конструкций на прочность и долговечность, особенно в тех случаях, когда напряжения изначально достигают предельных значений. Несмотря на важность проблемы, исследований в этом направлении выполнено очень мало. Основы теории вязкоупругости разработаны достаточно давно [1–7], однако к настоящему времени получено небольшое количество решений прикладных задач. Ранее проводились исследования только плоских задач теории упругости для односвязных изотропных [6] и анизотропных [8] пластин. Для решения плоских задач и задач изгиба многосвязных изотропных пластин разработан метод малого параметра [9, 10]. В [11] предложен метод решения плоских задач вязкоупругости для анизотропных пластин с произвольным количеством отверстий и включений различной формы. Этот метод основан на сведении исходной задачи методом малого параметра к последовательности задач теории упругости и определении значений всех величин с использованием расшифровки степеней малого параметра операторами Работнова. С помощью данного метода решен ряд плоских задач теории упругости и термоупругости [11]. Позднее этот метод был распространен на решение связанных задач электровязкоупругости и электромагнитовязкоупругости [12] при наличии механических и электромагнитных полей. Следует отметить, что исследования задач теории изгиба тонких анизотропных плит до сих пор не выполнялись.

В данной работе метод малого параметра, созданный для решения задач вязкоупругости [11], обобщен на случай многосвязных анизотропных плит. Получены численные решения некоторых частных задач.

1. Постановка задачи. Рассмотрим тонкую вязкоупругую анизотропную плиту, срединная плоскость которой занимает многосвязную область S, ограниченную внешним контуром L_0 и контурами отверстий L_l ($l = \overline{1, L}$). Не нарушая общности постановки задачи, будем считать, что контуры L_l нагружены распределенными изгибающими моментами, причем их главные моменты для каждого контура равны нулю. Будем рассматривать бесконечную многосвязную плиту, для которой контур L_0 полностью уходит в бесконечность. В последнем случае будем считать, что на бесконечности заданы моменты M_x^∞, M_y^∞, H_{xy}^∞.

Решение задачи без учета вязкоупругих свойств материала при использовании комплексных потенциалов теории изгиба плит сводится к определению функций $W_k'(z_k)$ из граничных условий [13, 14]

$$2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{2} g_{kli} W_k'(z_k) = f_{li}(t) \qquad (i = \overline{1, 2}\,), \tag{1.1}$$

где

$$\begin{gathered} g_{kl1} = p_k/\mu_k, \qquad g_{kl2} = q_k, \\ f_{l1} = -\int\limits_0^y m_l\,dy - c_l x + c_{1l}, \qquad f_{l2} = -\int\limits_0^x m_l\,dx + c_l y + c_{2l}; \end{gathered} \tag{1.2}$$

$$p_k = D_{11} + 2D_{16}\mu_k + D_{12}\mu_k^2, \qquad q_k = D_{12} + 2D_{26}\mu_k + D_{22}\mu_k^2, \tag{1.3}$$

$D_{ij} = B_{ij} D_0$ — жесткости материала,

$$\begin{gathered} B_{11} = \frac{a_{22}a_{66} - a_{26}^2}{\Delta}, \quad B_{12} = \frac{a_{16}a_{26} - a_{12}a_{66}}{\Delta}, \quad B_{16} = \frac{a_{12}a_{26} - a_{16}a_{22}}{\Delta}, \\ B_{22} = \frac{a_{11}a_{66} - a_{16}^2}{\Delta}, \quad B_{26} = \frac{a_{12}a_{16} - a_{26}a_{11}}{\Delta}, \quad B_{66} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{\Delta}, \\ \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{vmatrix}, \end{gathered} \tag{1.4}$$

a_{ij} — коэффициенты деформаций материала; $D_0 = 2h^3/3$; h — полутолщина плиты; μ_k — корни характеристического уравнения

$$D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{16}\mu + D_{11} = 0, \tag{1.5}$$

c_l — вещественные постоянные.

Функции $W_k'(z_k)$ голоморфны в многосвязных областях S_k, получаемых из заданной области S аффинными преобразованиями [13, 14]:

$$z_k = x + \mu_k y \tag{1.6}$$

и ограниченных контурами L_{kl}, соответствующими L_l, при этих преобразованиях.

Если плита занимает многосвязную область S, то выражения для комплексных потенциалов $W_k'(z_k)$ имеют вид [13]

$$W_k'(z_k) = \Gamma_k z_k + W_{0k}'(z_k), \tag{1.7}$$

где Γ_k — постоянные, в случае конечной области равные нулю, а в случае бесконечной области определяемые из системы уравнений

$$2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{2}\Gamma_k = A_{11}M_x^\infty + A_{21}M_y^\infty + A_{31}H_{xy}^\infty, \quad 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{2}\mu_k\Gamma_k = A_{12}M_x^\infty + A_{22}M_y^\infty + A_{32}H_{xy}^\infty,$$
$$2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{2}\mu_k^2\Gamma_k = A_{13}M_x^\infty + A_{23}M_y^\infty + A_{33}H_{xy}^\infty, \quad 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{\mu_k}\Gamma_k = 0; \tag{1.8}$$

$$A_{11} = \frac{2D_{22}D_{66} - 2D_{26}^2}{\Delta_1}, \quad A_{21} = \frac{2D_{16}D_{26} - 2D_{12}D_{66}}{\Delta_1}, \quad A_{31} = \frac{2D_{12}D_{26} - 2D_{16}D_{22}}{\Delta_1},$$
$$A_{12} = \frac{D_{12}D_{26} - D_{16}D_{22}}{\Delta_1}, \quad A_{22} = \frac{D_{12}D_{16} - D_{11}D_{26}}{\Delta_1}, \quad A_{32} = \frac{D_{11}D_{22} - D_{12}^2}{\Delta_1}, \tag{1.9}$$
$$A_{13} = \frac{2D_{16}D_{26} - 2D_{12}D_{66}}{\Delta_1}, \quad A_{23} = \frac{2D_{11}D_{66} - 2D_{16}^2}{\Delta_1}, \quad A_{33} = \frac{2D_{12}D_{16} - 2D_{11}D_{26}}{\Delta_1},$$
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} D_{11} & 2D_{16} & D_{12} \\ D_{12} & 2D_{26} & D_{22} \\ D_{16} & 2D_{66} & D_{26} \end{vmatrix},$$

$W'_{0k}(z_k)$ — функции, голоморфные в многосвязных областях S_k.

Определив функции $W'_k(z_k)$, основные характеристики изгиба плиты (прогиб, моменты, перерезывающие силы) можно вычислить по формулам

$$w = 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{2}W_k(z_k), \qquad (M_x,\ M_y,\ H_{xy}) = -2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{2}(p_k,\ q_k,\ r_k)W''_k(z_k),$$
$$(N_x,\ N_y) = -2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{2}(\mu_k s_k,\ -s_k)W'''_k(z_k),$$

где

$$r_k = D_{16} + 2D_{66}\mu_k + D_{26}\mu_k^2, \quad s_k = -D_{16} - (D_{12} + 2D_{66})\mu_k - 3D_{26}\mu_k^2 - D_{22}\mu_k^3. \tag{1.10}$$

2. Решение задачи вязкоупругости. Если плита обладает вязкоупругими свойствами, то для вычисления значений исследуемых величин, зависящих от времени, можно использовать принцип Вольтерры [7], т. е. заменить упругие постоянные временными операторами и определить действие этих операторов во времени. Однако это возможно при решении простейших задач, когда выражения этих величин, полученные в соответствии с упругим решением, представляются в виде произведений рациональных функций упругих постоянных и функций координат. Для многосвязных областей такие решения задач теории упругости получить невозможно, поэтому непосредственное применение принципа Вольтерры при анализе напряженно-деформированного состояния многосвязных тел вызывает затруднения. Таким образом, возникает необходимость получать решения, содержащие упругие постоянные в явном виде, и для многосвязных сред. Данные задачи можно решить, выделив одну из упругих постоянных, модуль которой меньше единицы, и разложив решение задачи в ряд по ней как по малому параметру.

Для ортотропного материала коэффициенты деформаций выражаются через технические постоянные следующим образом:

$$a_{11} = \frac{1}{E_1}, \quad a_{22} = \frac{1}{E_2}, \quad a_{12} = -\frac{\nu_{21}}{E_1} = -\frac{\nu_{12}}{E_2}, \quad a_{66} = \frac{1}{G_3}.$$

Здесь E_i, G_3, ν_{ji} — модуль Юнга, модуль сдвига и коэффициенты Пуассона соответственно. Среди технических постоянных для различных анизотропных материалов меньше единицы только коэффициенты Пуассона ν_{ij}. Поэтому в качестве малого параметра, по которому следует разлагать решение задачи, можно выбрать любой из этих коэффициентов, например ν_{12}. Однако получаемые решения будут сходиться быстрее, если в качестве малого параметра выбрать не коэффициент ν_{12}, а его изменение λ с течением времени, т. е. представить ν_{12} в виде

$$\nu_{12} = \nu_{12}^0 + \lambda, \tag{2.1}$$

где ν_{12}^0 — мгновенно-упругое значение коэффициента ν_{12}.

С учетом равенства (2.1) находим

$$a_{12} = a_{12}^0 - \lambda a_{11}, \tag{2.2}$$

где $a_{12}^0 = -\nu_{12}^0 a_{11}$. Подставляя (2.2) в формулу для Δ в (1.4), получаем

$$\Delta = -a_{66}a_{11}^2(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2), \qquad \lambda_{1,2} = \frac{a_{12}^0 \mp \sqrt{a_{11}a_{22}}}{a_{11}}.$$

Разлагая величину, обратную Δ_1, на простейшие дроби, находим

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{-a_{66}a_{11}^2(\lambda_2 - \lambda_1)}\Big(\frac{1}{\lambda_1 - \lambda} - \frac{1}{\lambda_2 - \lambda}\Big).$$

Подставляя эти значения в (1.4), имеем

$$B_{11} = -\frac{a_{22}}{a_{11}^2(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)}, \qquad B_{22} = -\frac{a_{11}}{a_{11}^2(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)},$$

$$B_{12} = -\frac{a_{11}\lambda - a_{12}^0}{a_{11}^2(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)}, \qquad B_{66} = \frac{1}{a_{66}}, \qquad B_{16} = B_{26} = 0.$$

Разлагая правые части полученных выражений на простейшие дроби, находим

$$B_{11} = -\frac{a_{22}}{a_{11}^2(\lambda_2 - \lambda_1)}\Big(\frac{1}{\lambda_1 - \lambda} - \frac{1}{\lambda_2 - \lambda}\Big), \quad B_{22} = -\frac{a_{11}}{a_{11}^2(\lambda_2 - \lambda_1)}\Big(\frac{1}{\lambda_1 - \lambda} - \frac{1}{\lambda_2 - \lambda}\Big),$$

$$B_{12} = -\frac{a_{11}\lambda - a_{12}^0}{a_{11}^2(\lambda_2 - \lambda_1)}\Big(\frac{1}{\lambda_1 - \lambda} - \frac{1}{\lambda_2 - \lambda}\Big).$$

Для реальных материалов $|\lambda/\lambda_1| < 1$, $|\lambda/\lambda_2| < 1$. В этом случае приведенные выше дроби, рассматриваемые как суммы бесконечно убывающих геометрических прогрессий, можно представить в виде рядов. В результате получаем

$$\begin{gathered} B_{11} = B_{11}^0 \sum_{j=0} d_{j1}\lambda^j, \qquad B_{22} = B_{22}^0 \sum_{j=0} d_{j1}\lambda^j, \\ B_{12} = B_{12}^0 \sum_{j=0} d_{j2}\lambda^j, \qquad B_{66} = \frac{1}{a_{66}}, \qquad B_{16} = B_{26} = 0, \end{gathered} \tag{2.3}$$

где

$$B_{11}^0 = \frac{a_{22}}{a_{11}^2(\lambda_2 - \lambda_1)}, \qquad B_{22}^0 = \frac{1}{a_{11}(\lambda_2 - \lambda_1)}, \qquad B_{12}^0 = \frac{\sqrt{a_{11}a_{22}}}{a_{11}^2(\lambda_2 - \lambda_1)},$$

$$d_{j1} = \lambda_2^{-j-1} - \lambda_1^{-j-1}, \qquad d_{j2} = \lambda_1^{-j-1} + \lambda_2^{-j-1}.$$

При выводе формулы для B_{12}^0 учтено, что

$$B_{12}=\frac{\sqrt{a_{11}a_{22}}}{a_{11}^2(\lambda_2-\lambda_1)}\sum_{j=0}(\lambda_1^{-j-1}+\lambda_2^{-j-1})\lambda^j.$$

С учетом выражений (2.3) формулы (1.3), (1.10) запишем в виде

$$p_k=\sum_{j=0}p_{jk}\lambda^j,\quad q_k=\sum_{j=0}q_{jk}\lambda^j,\quad s_k=\sum_{j=0}s_{jk}\lambda^j,\quad r_k=2D_0B_{66}\mu_k.$$

Здесь

$$p_{jk}=D_0(B_{11}^0d_{j1}+B_{12}^0\mu_k^2d_{j2}),\qquad q_{jk}=D_0(B_{12}^0d_{j2}+B_{22}^0\mu_k^2d_{j1}),$$
$$s_{jk}=-D_0(B_{12}^0d_{j2}+B_{22}^0\mu_k^3d_{j1}+2B_{66}\mu_k\delta_j^0).$$

В ряды по малому параметру λ разложим также входящие в выражения для комплексных потенциалов (1.7) постоянные Γ_k:

$$\Gamma_k=\sum_{j=0}\lambda^j\Gamma_{jk}. \tag{2.4}$$

Постоянные Γ_{jk} найдем с использованием равенств (1.8), (1.9), подставляя в их правые части выражения (2.4). Выполнив эту подстановку и приравняв в полученных равенствах коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра λ, получаем следующие последовательности систем четырех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{2}\Big(1,\ \mu_k,\ \mu_k^2,\ \frac{1}{\mu_k}\Big)\Gamma_{0k}=\Big(-\frac{a_{11}M_x^\infty}{D_0}-\frac{a_{12}^0M_y^\infty}{D_0},\ -\frac{a_{66}H_{xy}^\infty}{2D_0},\ -\frac{a_{12}^0M_x^\infty}{D_0}-\frac{a_{22}M_y^\infty}{D_0},\ 0\Big),$$

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{2}\Big(1,\ \mu_k,\ \mu_k^2,\ \frac{1}{\mu_k}\Big)\Gamma_{1k}=\Big(\frac{a_{11}M_y^\infty}{D_0},\ 0,\ \frac{a_{11}M_x^\infty}{D_0},\ 0\Big),\qquad \Gamma_{jk}=0\quad(j\geqslant 2).$$

С учетом приведенных разложений комплексные потенциалы (1.7) представим в виде

$$W_k'(z_k)=\sum_{j=0}\lambda^jW_{jk}'(z_k), \tag{2.5}$$

где

$$W_{jk}'(z_k)=\Gamma_{jk}z_k+W_{j0k}'(z_k), \tag{2.6}$$

$W_{j0k}'(z_k)$ — функции, голоморфные в многосвязных областях S_k, ограниченных контурами L_{kl}, соответствующими контурам L_l при аффинных преобразованиях (1.6).

Комплексные потенциалы приближений $W_{jk}'(z_k)$ $(k=1,2)$ должны удовлетворять соответствующим граничным условиям. Подставляя (2.5) в граничные условия (1.1) и приравнивая в полученных равенствах коэффициенты при одинаковых степенях параметра λ, получаем следующую рекуррентную последовательность граничных условий для определения комплексных потенциалов приближений:

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{2}g_{0kli}W_{jk}'(z_k)=f_{jli}(t)\qquad(i=\overline{1,2}\,). \tag{2.7}$$

Здесь в случае неподкрепленного контура L_l

$$g_{0kl1}=\frac{p_{0k}}{\mu_k},\qquad g_{0kl2}=\frac{q_{0k}}{\mu_k},$$

$$f_{jl1} = -\delta_j^0 \Big(\int\limits_0^y m_l\,dy + c_l x \Big) - 2(1-\delta_j^0)\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{2} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{p_{j-i,k}}{\mu_k}\, W'_{ik}(z_k),$$

$$f_{jl2} = -\delta_j^0 \Big(\int\limits_0^x m_l\,dx - c_l y \Big) - 2(1-\delta_j^0)\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{2} \sum_{i=0}^{j-1} q_{j-i,k} W'_{ik}(z_k).$$

Функции приближений $W'_{jk}(z_k)$ определяются из граничных условий. Заменив степени малого параметра λ^j временными операторами, можно найти комплексные потенциалы для плиты и их производные в любой момент времени, а по ним — основные характеристики изгиба:

$$M_x = -2\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=0}^{J} \lambda^j \sum_{i=0}^{j} p_{j-i,k} W''_{ik}, \qquad M_y = -2\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=0}^{J} \lambda^j \sum_{i=0}^{j} q_{j-i,k} W''_{ik},$$

$$H_{xy} = -2\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=0}^{J} r_k W''_{jk} \lambda^j,$$

$$N_x = -2\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{2} \mu_k \sum_{j=0}^{J} \lambda^j \sum_{i=0}^{j} s_{j-i,k} W'''_{ik}(z_k), \qquad N_y = 2\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=0}^{J} \lambda^j \sum_{i=0}^{j} s_{j-i,k} W'''_{ik}(z_k)$$

(J — количество сохраняемых приближений). При этом нужно учитывать, что в силу (2.1)

$$\lambda = \nu_{12}^* - \nu_{12}^0,$$

т. е.

$$\nu_{12}^* = \nu_{12}^0 + \lambda. \tag{2.8}$$

Заменив в (2.8) коэффициент ν_{12}^* его временным оператором, получаем [11]

$$\lambda = D_1 \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta_1^* - \delta_1^*) + D_2 \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta_2^*), \tag{2.9}$$

где

$$D_1 = \frac{\delta_1^*}{4} \Big(\frac{E_1^0}{E_2^0}\, \frac{\delta_2^*}{\beta_1^* - \beta_2^* + \delta_1^*} + 1 - 4\nu_{12}^0 \Big), \qquad D_2 = \frac{\delta_2^*}{4}\, \frac{E_1^0}{E_2^0}\, \frac{\beta_1^* - \beta_2^*}{\beta_1^* - \beta_2^* + \delta_1^*},$$

E_i^0 — мгновенно-упругие значения модулей Юнга E_i; δ_i^*, β_i^* — реологические постоянные материала плиты. Возводя λ в степень j, находим

$$\lambda^j = \sum_{k=0}^{j} C_j^k D_1^{j-k} D_2^k \mathcal{E}_\alpha^{*\,j-k}(-\beta_1^* - \delta_1^*) \mathcal{E}_\alpha^{*k}(-\beta_2^*) =$$

$$= \sum_{k=0}^{j} C_j^k D_1^{j-k} D_2^k\, \frac{\mathcal{E}_\alpha^{*k}(-\beta_2^*) - \mathcal{E}_\alpha^{*\,j-k}(-\beta_1^* - \delta_1^*)}{-\beta_2^* + \beta_1^* + \delta_1^*}. \tag{2.10}$$

Вычисляя параметр λ^j по формуле (2.10) и подставляя его в выражение (2.5), получаем функции $W'_k(z_k)$ и их производные, а следовательно, и исследуемые величины в любой момент времени.

3. Решение задачи для бесконечной плиты с эллиптическими отверстиями. Рассмотрим бесконечную вязкоупругую плиту с эллиптическими отверстиями L_l

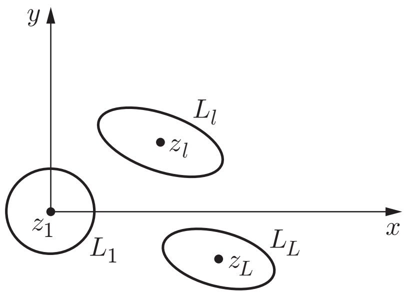

Рис. 1. Схема бесконечной плиты с эллиптическими отверстиями

$(l = \overline{1, L}\,)$ (рис. 1) с полуосями длиной a_l, b_l. Эллипсы могут располагаться произвольно, в том числе касаться, пересекаться, образуя контуры сложной конфигурации. Используя методы конформных отображений и разложений функций в ряды Лорана, для функций (2.6) получаем выражения

$$W'_{j0k}(z_k) = \Gamma_{jk} z_k + \sum_{l=1}^{L} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{kln} a_{jkln}, \tag{3.1}$$

где

$$\varphi_{kln} = \zeta_{kl}^{-n},$$

ζ_{kl} — переменные, определяемые из конформных отображений [15]

$$z_k = z_{kl} + R_{kl}(\zeta_{kl} + m_{kl}/\zeta_{kl})$$

внешности единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geqslant 1$ на внешности эллипсов L_{kl},

$$z_{kl} = x_{0l} + \mu_k y_{0l},$$

$$R_{kl} = [a_l(\cos\varphi_l + \mu_k \sin\varphi_l) + i b_l(\sin\varphi_l - \mu_k \cos\varphi_l)]/2,$$

$$m_{kl} = [a_l(\cos\varphi_l + \mu_k \sin\varphi_l) - i b_l(\sin\varphi_l - \mu_k \cos\varphi_l)]/(2R_{kl}),$$

φ_l — угол между осью Ox основной системы и осью $O_l x_l$, направленной вдоль полуоси a_l, локальной системы с началом в центре эллипса L_l, отсчитываемый от оси Ox против часовой стрелки; x_{0l}, y_{0l} — координаты начала системы координат $O_l x_l y_l$; a_{kln} — постоянные, определяемые из граничных условий на контурах плиты.

Для определения неизвестных постоянных a_{jkln} функций (3.1) используем граничные условия (2.7). Для многосвязных областей удобнее использовать эти условия в дифференциальной форме. Продифференцировав их по дуге контура, получаем

$$2\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{2} g_{0kli} \frac{dW'_{jk}(z_k)}{ds} = \frac{df_{jli}(t)}{ds} \qquad (i = \overline{1, 2}\,). \tag{3.2}$$

Для удовлетворения граничным условиям (3.2) применим обобщенный метод наименьших квадратов [16]. Для этого на контурах плиты выберем набор точек $t_{lm}(x_{lm}, y_{lm})$ $(m = \overline{1, M_l}\,)$, в которых удовлетворяются условия (3.2). В результате получаем уравнения

$$2\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{2} \sum_{l=1}^{L} \sum_{n=1}^{\infty} g_{0kli} \delta_k \varphi'_{kln}(t_{klm}) a_{jkln} = \frac{df_{jli}(t_{lm})}{ds} - 2\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{2} g_{0kli} \delta_k \Gamma_{jk}$$
$$(i = \overline{1, 2}, \quad m = \overline{1, M_l}, \quad l = \overline{1, L}\,), \tag{3.3}$$

где

$$\delta_k = \frac{dz_k}{ds}, \qquad \varphi'_{kln} = -\frac{n}{\zeta_{kl}^{n-1} R_{kl}(\zeta_{kl}^2 - m_{kl})}, \qquad t_{klm} = x_{lm} + \mu_k y_{lm}.$$

Систему (3.3) дополним уравнениями однозначности прогиба [13] для каждого отверстия

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{2} i a_{jkl1} R_{kl} = 0 \qquad (l = \overline{1, L}\,).$$

4. Результаты численных исследований. Проведены численные эксперименты для плит, изготовленных из алюминия [6] и эпоксида [8]. Коэффициенты деформаций и реологические постоянные для этих материалов приведены в табл. 1. Для изотропной плиты из алюминия, которая также рассматривалась как анизотропная, вместо реального значения коэффициента деформации $a_{22} = 0{,}1408 \cdot 10^{-4}$ принималось значение $a_{22} = 0{,}1458 \cdot 10^{-4}$. В противном случае вследствие равенства $a_{11} = a_{22}$ при численном решении задачи имеет место деление на ноль, так как корни характеристического уравнения (1.5) для изотропного материала являются двукратными и равны i и $-i$. Аналогичные допущения приняты для реологических постоянных β_1^*, β_2^*, δ_1^*, δ_2^*.

При проведении численных исследований количество членов N в рядах (3.1) и количество точек коллокации M_l на контурах отверстий L_l увеличивались до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности. В описываемых ниже расчетах в зависимости от расстояния между отверстиями и их количества в рядах для каждого отверстия сохранялось от 5 до 20 членов и на каждом контуре выбиралось от 100 до 200 точек коллокации t_{lm}. Количество приближений j по степеням малого параметра λ увеличивалось до тех пор, пока в следующем приближении значения изгибающих моментов не изменялись более чем на 0,01 % по сравнению с предыдущим приближением. Для удовлетворения этому условию в рассмотренных случаях требовалось сохранять степени малого параметра λ от 6 до 9. Ниже приведены некоторые результаты, полученные для плиты с отверстиями, в случае когда на бесконечности $M_y^\infty = m$, $M_x^\infty = H_{xy}^\infty = 0$.

В табл. 2 для плиты с одним круговым отверстием радиусом a_1, контур которого не подкреплен, приведены значения изгибающих моментов M_s, создаваемых нормальными напряжениями σ_s на площадках, перпендикулярных контуру отверстия, в точках $A(a_1; 0)$ и $B(0; a_1)$, в зависимости от времени t приложения нагрузки. Из табл. 2 следует, что с течением времени значения моментов в плите изменяются, причем наиболее существенные изменения происходят в течение первых 50 ч после приложения нагрузки, через 200 ч значения моментов практически не изменяются, т. е. в плите устанавливается стационарное состояние. Как показывают расчеты, в других случаях стационарное состояние устанавливается приблизительно в такое же время. Ниже приводятся результаты расчетов для двух случаев: $t = 0$ (начальный момент времени) и $t = 500$ (момент, когда стационарное состояние установилось).

На рис. 2 приведена зависимость моментов M_s вблизи контура отверстия в начальном и стационарном состояниях от центрального угла θ, отсчитываемого от положительного направления оси Ox. Из данных табл. 2 и рис. 2 следует, что при переходе в стационарное состояние значения изгибающих моментов вблизи отверстия изменяются, причем наиболее существенно — в точках A и B, соответствующих углам $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$. Так, если плита изготовлена из алюминия, значения M_s в точке A увеличиваются на 4,6 %, в точке B уменьшаются на 35 %, в случае плиты из эпоксида значения M_s в точке A увеличиваются на 8,2 %, в точке B — на 14,7 %.

Таблица 1

Значения коэффициентов деформаций и реологических постоянных для алюминия и эпоксида

Материал	$a_{11} \cdot 10^4$, МПа$^{-1}$	$a_{22} \cdot 10^4$, МПа$^{-1}$	$a_{12} \cdot 10^4$, МПа$^{-1}$	$a_{66} \cdot 10^4$, МПа$^{-1}$	α^*, с$^{-1/2}$	$\beta_1^* \cdot 10^3$, с$^{-1/2}$	$\beta_2^* \cdot 10^3$, с$^{-1/2}$	$\delta_1^* \cdot 10^3$, с$^{-1/2}$	$\delta_2^* \cdot 10^3$, с$^{-1/2}$
Алюминий	0,1408	0,1458	−0,0352	0,3521	0,5000	0,0005	0,000 49	0,006 15	0,006 14
Эпоксид	0,4347	0,6250	−0,0478	3,2467	0,8460	0,1570	0,274 50	0,032 30	0,129 50

Таблица 2

Значения изгибающих моментов в точках A и B на контуре отверстия

Материал	Точка	M_s								
		$t = 0$	$t = 50$ ч	$t = 100$ ч	$t = 150$ ч	$t = 200$ ч	$t = 300$ ч	$t = 400$ ч	$t = 500$ ч	$t = 600$ ч
Алюминий	A	1,769	1,841	1,847	1,849	1,850	1,851	1,851	1,851	1,851
	B	0,231	0,159	0,153	0,151	0,150	0,149	0,149	0,149	0,149
Эпоксид	A	1,934	2,070	2,077	2,081	2,084	2,088	2,091	2,093	2,094
	B	0,687	0,769	0,775	0,778	0,781	0,784	0,786	0,788	0,790

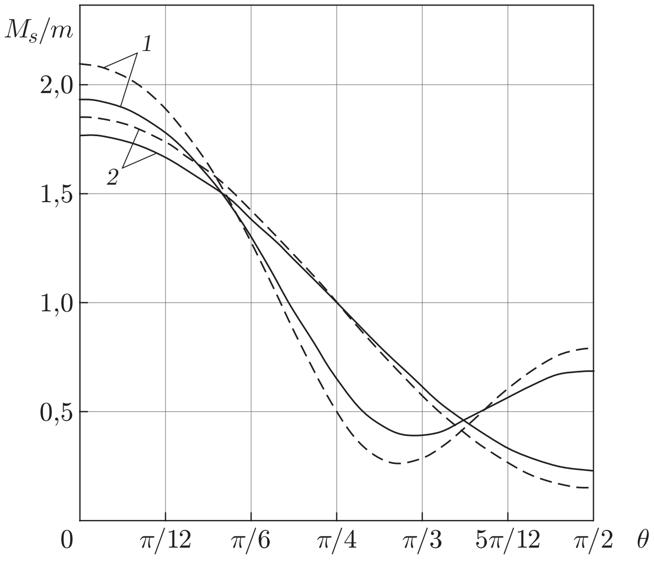

Рис. 2. Зависимость изгибающего момента вблизи контура отверстия от угла θ: сплошные линии — начальное состояние, штриховые — стационарное состояние; *1* — алюминий, *2* — эпоксид

Таблица 3

Зависимость изгибающих моментов вблизи левого отверстия от центрального угла θ

Материал	c/a_1	t, ч	M_s						
			$\theta=0$	$\theta=\pi/6$	$\theta=\pi/3$	$\theta=\pi/2$	$\theta=2\pi/3$	$\theta=5\pi/6$	$\theta=\pi$
Алюминий	3,0	0	1,896	1,447	0,606	0,221	0,635	1,428	1,822
	3,0	500	1,981	1,493	0,570	0,142	0,596	1,471	1,906
	2,0	0	2,002	1,484	0,594	0,219	0,648	1,450	1,846
	2,0	500	2,089	1,534	0,560	0,141	0,610	1,495	1,932
	1,0	0	2,340	1,560	0,554	0,219	0,680	1,496	1,896
	1,0	500	2,436	1,620	0,524	0,141	0,643	1,543	1,984
	0,5	0	2,946	1,605	0,493	0,223	0,717	1,544	1,947
	0,5	500	3,060	1,679	0,460	0,144	0,682	1,595	2,040
	0,1	0	5,820	1,305	0,327	0,234	0,786	1,632	2,040
	0,1	500	6,077	1,384	0,279	0,151	0,756	1,692	2,143
Эпоксид	3,0	0	2,010	1,342	0,340	0,645	0,373	1,332	1,977
	3,0	500	2,154	1,317	0,222	0,734	0,262	1,306	2,135
	2,0	0	2,083	1,373	0,315	0,635	0,371	1,352	2,002
	2,0	500	2,216	1,351	0,193	0,721	0,256	1,325	2,160
	1,0	0	2,378	1,455	0,288	0,637	0,373	1,397	2,058
	1,0	500	2,498	1,445	0,166	0,724	0,250	1,370	2,222
	0,5	0	3,039	1,512	0,297	0,656	0,378	1,449	2,121
	0,5	500	3,190	1,517	0,189	0,747	0,245	1,424	2,294
	0,1	0	6,266	1,237	0,357	0,697	0,385	1,547	2,241
	0,1	500	6,691	1,264	0,304	0,797	0,231	1,532	2,435

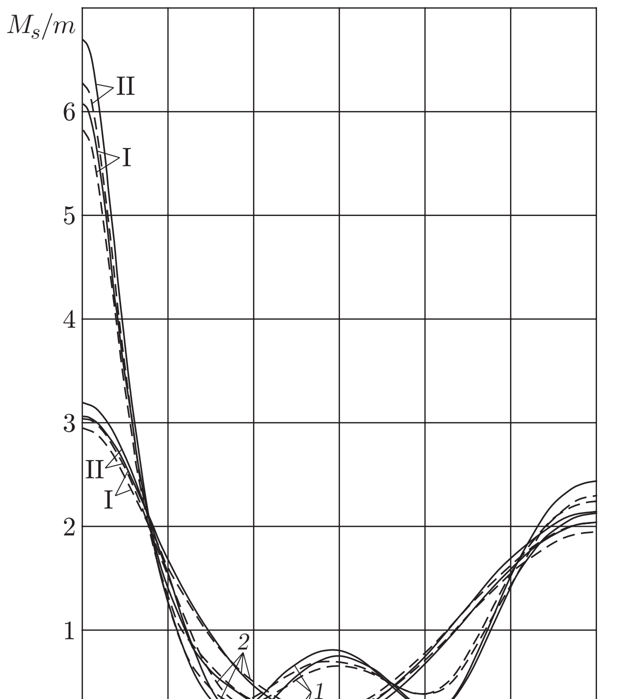

Рис. 3. Зависимость изгибающего момента вблизи левого отверстия от угла θ при различных значениях c/a_1:
I — алюминий, II — эпоксид; *1* — $c/a_1 = 0{,}1$, *2* — $c/a_1 = 0{,}5$

Заметим, что для изотропного материала полученные результаты согласуются с приведенными в работе [7].

В табл. 3 для плиты с двумя одинаковыми круговыми отверстиями радиусом a_1 приведены значения изгибающих моментов M_s вблизи левого отверстия в зависимости от центрального угла θ при различных значениях c/a_1 (c — расстояние между отверстиями). На рис. 3 представлены распределения этих моментов при различных значениях c/a_1.

Из табл. 3, рис. 3 и других полученных результатов следует, что с уменьшением расстояния между отверстиями значения изгибающих моментов в области между отверстиями увеличиваются при упругом деформировании, а при переходе в стационарное состояние они увеличиваются существенно.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Арутюнян Н. Х.** Некоторые вопросы теории ползучести. М.: Гостехтеоретиздат, 1952.
2. **Колтунов М. А.** Ползучесть и релаксация. М.: Высш. шк., 1976.
3. **Кристенсен Р.** Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974.
4. **Работнов Ю. Н.** Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
5. **Розовский М. И.** Механика упругонаследственных сред // Упругость и пластичность. М.: Всесоюз. ин-т науч. и техн. информации, 1965. С. 95–103.
6. **Савин Г. Н.** Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наук. думка, 1968.
7. **Volterra V.** Lecons sur the les fonctions de lignes. P.: Qauthier Villaed, 1913.
8. **Каминский А. А.** Механика разрушения вязкоупругих тел. Киев: Наук. думка, 1980.
9. **Калоеров С. А., Мироненко А. Б.** Исследование вязкоупругого состояния пластинки с упругими эллиптическими или линейными включениями // Прикл. механика. 2007. Т. 43, № 2. С. 88–98.
10. **Калоеров С. А., Шипоша Ю. С.** Вязкоупругий изгиб многосвязных изотропных плит // Вiсн. Донец. ун-ту. Сер. А. Природ. науки. 2007. Вип. 2. С. 58–65.
11. **Калоеров С. А., Паршикова О. А.** Решение задачи термовязкоупругости для анизотропной пластинки // Теорет. и прикл. механика. 2011. № 2. С. 51–70.
12. **Калоеров С. А., Самодуров А. А.** Задача электромагнитовязкоупругости для многосвязных пластинок // Прикл. механика. 2015. Т. 51, № 6. С. 23–41.
13. **Калоеров С. А.** Комплексные потенциалы теории изгиба многосвязных анизотропных плит // Теорет. и прикл. механика. 2012. № 4. С. 113–132.
14. **Лехницкий С. Г.** Анизотропные пластинки. М.: Гостехтеоретиздат, 1957.
15. **Калоеров С. А., Горянская Е. С.** Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела // Механика композитов: В 12 т. Т. 7. Концентрация напряжений. Киев: А. С. К., 1998. С. 10–26.
16. **Форсайт Дж.** Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. М.: Мир, 1980.

Поступила в редакцию 19/XI 2015 г.,
в окончательном варианте — 18/IV 2016 г.