УДК 532.5: 536.25: 551.51: 551.55

К ТЕОРИИ СКЛОНОВЫХ ТЕЧЕНИЙ НАД ТЕРМИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Л. Х. Ингель

Научно-производственное объединение "Тайфун", 249038 Обнинск, Россия
Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова РАН, 119017 Москва, Россия
E-mail: lev.ingel@gmail.com

Аналитически исследована двумерная стационарная линейная модель течений, возникающих в устойчиво (нейтрально) стратифицированной среде над термически неоднородной плоской наклонной поверхностью. На нижней границе заданы отклонения температуры, гармонически зависящие от поперечной к склону горизонтальной координаты. Получены явные аналитические решения, позволяющие проанализировать закономерности возникающих плотностных течений. Показано, что эти течения могут качественно различаться в зависимости от соотношения величины угла наклона нижней границы и аналога числа Рэлея, в выражение для которого в качестве пространственного масштаба входит горизонтальный масштаб области термической неоднородности. Установлен соответствующий критерий различия данных течений.

Ключевые слова: склоновые течения, термические неоднородности, плотностные течения, линейные возмущения, аналитическая модель.

DOI: 10.15372/PMTF20220513

Введение. Теории течений над охлаждаемыми (нагреваемыми) наклонными поверхностями посвящено большое количество работ (см., например, работы [1–5] и библиографию к ним). Одним из наиболее важных приложений этой теории является описание склоновых течений, распространенных в атмосфере. Ввиду сложности большинства задач об этих течениях для аналитического исследования доступны лишь упрощенные модели. Как правило, это одномерные модели, начиная с классической модели Прандтля [1, 2], описывающие течения над бесконечной однородной наклонной плоскостью. Согласно этим моделям стационарное течение в устойчиво стратифицированной среде над охлажденной наклонной плоскостью заключено в слое толщиной порядка

$$h_p = \Big(\frac{\varkappa\nu}{\alpha g\gamma\sin^2\varphi}\Big)^{1/4} = \Big(\frac{\sqrt{\varkappa\nu}}{N\sin\varphi}\Big)^{1/2}.$$

Здесь ν, $\varkappa$ — вязкость и температуропроводность, полагающиеся постоянными; α — термический коэффициент расширения среды; g — ускорение свободного падения; $\gamma \geqslant 0$ — фоновый вертикальный градиент температуры (в атмосфере — потенциальной температуры [1, 6]); φ — угол наклона нижней границы; $N = (\alpha g\gamma)^{1/2}$ — частота плавучести (частота Брента — Вяйсяля). Модель Прандтля проста, однако предположение о термической однородности наклонной нижней границы является существенной идеализацией и

© Ингель Л. Х., 2022

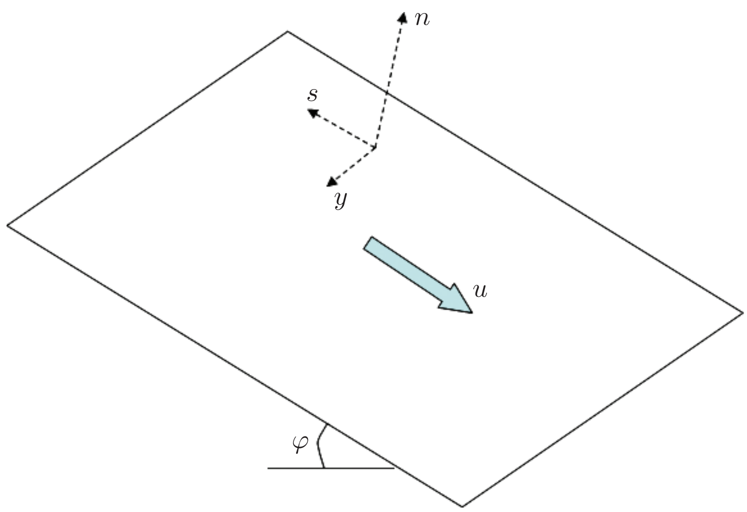
приводит, в частности, к отсутствию стационарных решений при нейтральной фоновой стратификации среды и предельного перехода при $\varphi \to 0$ (в этой модели максимальная скорость стационарного склонового течения при заданном значении отклонения температуры на нижней границе от фоновой температуры не зависит от угла наклона).

Влияние термических неоднородностей наклонной поверхности на возникающее течение [7–13] аналитически исследуется в работе [12], в которой изучаются течения, вызываемые однородной холодной полосой конечной ширины, вытянутой вдоль склона. Линейная стационарная модель исследуется с использованием разложения в ряд Фурье по поперечной к склону горизонтальной координате. Однако данная модель сложна для аналитического исследования, поскольку в ней учитывается большое количество горизонтальных гармоник возмущений, физические свойства которых, как показано ниже, качественно различаются в зависимости от их горизонтальных масштабов и угла наклона нижней границы. Возмущения относительно малых горизонтальных масштабов в основном находятся внутри слоя толщиной h_p, в то время как возмущения больших масштабов могут достигать границы этого слоя. Соответственно структура и динамика гармоник разных масштабов качественно различаются. При одновременном их рассмотрении и описании суперпозиции получаются громоздкие выражения, которые, как правило, не позволяют выявить достаточно простые и легко воспроизводимые закономерности динамики возмущений. В настоящей работе анализируются отдельные гармоники разных масштабов; такая постановка задачи позволяет получить в явном виде аналитические результаты.

1. Постановка задачи. Геометрия задачи представлена на рисунке. Ось s направлена вверх по склону, ось n — по нормали к наклонной границе. Фоновое состояние среды такое же, как и в модели Прандтля: устойчиво (в предельном случае нейтрально) стратифицированная среда, температура которой на наклонной границе совпадает с заданной температурой этой границы, находится в состоянии покоя. Однако в данной работе рассматриваются возмущения, связанные с отклонениями температуры нижней границы, гармонически зависящими от поперечной к склону горизонтальной координаты y:

$$\theta = \theta_0 \cos{(ky)} \qquad \text{при} \quad n = 0. \tag{1}$$

Здесь θ — отклонение температуры (потенциальной температуры [1, 6]) от фоновой (при которой течения отсутствуют); θ_0, k — заданные амплитуда и волновое число.



Геометрия задачи (стрелка — направление склонового течения, существующего при однородном охлаждении наклонной границы)

Линеаризованная стационарная система уравнений для двумерных (однородных вдоль склона) возмущений в приближении Буссинеска с точностью до обозначений совпадает с системой (6)–(10) в [12] и имеет вид

$$\nu\Delta u = -\alpha g\theta \sin\varphi, \qquad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial n^2}; \tag{2}$$

$$\nu\,\Delta v = \frac{1}{\rho_*}\,\frac{\partial p}{\partial y}; \tag{3}$$

$$\nu\,\Delta w = \frac{1}{\rho_*}\,\frac{\partial p}{\partial n} - \alpha g\theta\cos\varphi; \tag{4}$$

$$u\sin\varphi + w\cos\varphi = \frac{\varkappa}{\gamma}\,\Delta\theta; \tag{5}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial n} = 0. \tag{6}$$

Здесь u, v, w — составляющие скорости вдоль осей s, y, n соответственно; ρ_* — средняя плотность среды.

На наклонной границе помимо (2) заданы условия прилипания и непротекания:

$$u = v = w = 0 \qquad \text{при} \quad n = 0. \tag{7}$$

При этом полагается, что вдали от этой границы все возмущения затухают.

2. Характеристическое уравнение и решение при отсутствии фоновой стратификации. Исключая из системы (2)–(6) все неизвестные функции, кроме одной, получаем уравнение

$$\Delta^3\theta + \frac{1}{h_p^4}\,\Delta\theta + \frac{\operatorname{ctg}^2\varphi}{h_p^4}\,\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = 0,$$

с точностью до обозначений совпадающее с соответствующим уравнением в [12]. Согласно краевому условию (1) целесообразно искать решение в виде одной горизонтальной гармоники:

$$\theta = \Theta(n)\cos(ky), \qquad p = P(n)\cos(ky),$$
$$u = U(n)\cos(ky), \qquad w = W(n)\cos(ky), \qquad v = V(n)\sin(ky),$$

где k — волновое число; прописные буквы обозначают искомые амплитудные функции. Уравнение для амплитуды температурного возмущения имеет вид

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - 1\Big)^3\Theta + R\sin^2\varphi\,\Big(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - 1\Big)\Theta - R\cos^2\varphi\,\Theta = 0.$$

Здесь безразмерный параметр $R = N^2/(\varkappa\nu k^4) = (k^4 h_p^4\sin^2\varphi)^{-1} \geqslant 0$ является аналогом числа Рэлея; $\xi = kn$ — безразмерная координата. Решение ищется в форме линейной комбинации экспонент типа $\mathrm{e}^{\sigma\xi}$. Характеристическое уравнение имеет вид

$$(\sigma^2-1)^3 + R\sin^2\varphi\,(\sigma^2-1) - R\cos^2\varphi = 0. \tag{8}$$

При нейтральной стратификации $R = 0$ и уравнение имеет кратные корни $\sigma = \pm 1$. Из условия затухания возмущений вдали от границы $n = 0$ следует, что целесообразно рассматривать только отрицательные корни. С учетом остальных краевых условий получаем решение

$$\theta = \theta_0\,\mathrm{e}^{-kn}\cos(ky), \qquad u = \frac{\alpha g\theta_0\sin\varphi}{2\nu k^2}\,kn\;\mathrm{e}^{-kn}\cos(ky),$$

$$v = -\frac{\alpha g\theta_0 \cos\varphi}{8\nu k^2}\, kn(2-kn)\,\mathrm{e}^{-kn}\sin(ky), \qquad w = \frac{\alpha g\theta_0\cos\varphi}{8\nu k^2}\,(kn)^2\,\mathrm{e}^{-kn}\cos(ky), \tag{9}$$
$$p = -\frac{\rho_*\alpha g\theta_0\cos\varphi}{4k}\,(3-2kn)\,\mathrm{e}^{-kn}\cos(ky).$$

Решение (9) представляет собой периодическую (вдоль горизонтальной оси y) последовательность конвективных ячеек с восходящими (нисходящими) движениями в области нагрева (охлаждения) поверхности соответственно. Возмущения проникают в среду на расстояния порядка k^{-1} от поверхности. При $\varphi \to 0$ скорость u течения вдоль склона также стремится к нулю. Таким образом, при ограниченных пространственных масштабах термических неоднородностей отсутствуют проблемы, возникающие в более идеализированной модели Прандтля: предельный переход при $\varphi \to 0$ и стационарное решение существуют даже при отсутствии фоновой устойчивой стратификации.

При $R > 0$ характеристическое уравнение имеет один действительный и два комплексных корня, соответствующих затухающим с увеличением высоты решениям. В общем случае при различных значениях параметра R и величины угла наклона φ свойства решений могут существенно различаться.

3. Предельный случай малых углов наклона. При достаточно малых углах φ вторым слагаемым в (8) можно пренебречь, таким образом существенно упростив данное уравнение. Рассмотрим этот предельный случай:
$$|\sigma^2 - 1| \approx (R\cos^2\varphi)^{1/3}.$$
Отсюда следует, что неучтенное второе слагаемое в (8) много меньше третьего, если
$$\sin\varphi \ll \frac{\cos^{2/3}\varphi}{R^{1/6}} \qquad \text{или} \qquad R \ll \frac{\cos^4\varphi}{\sin^6\varphi}. \tag{10}$$
При малых значениях угла φ условие (10) можно записать в приближенном виде
$$\varphi \ll R^{-1/6}. \tag{11}$$

Далее ограничимся случаем больших значений безразмерного параметра R. Приведем, например, оценку для значений параметров, характерных для пограничного слоя атмосферы: $N = 10^{-2}$ с$^{-1}$, $\varkappa = \nu = 3$ м^2/с ($\varkappa$, ν — эффективные коэффициенты турбулентного обмена). В случае если $k = 3 \cdot 10^{-3}$ м$^{-1}$ (что соответствует длине полуволны горизонтальной гармоники порядка 1 км), величина $R \approx 10^5$. При увеличении горизонтальных масштабов термической неоднородности (уменьшении k) эта величина быстро возрастает.

В рассматриваемом приближении абсолютные значения всех корней характеристического уравнения (8) велики. С учетом условий затухания возмущений вдали от нижней границы в решение для температурного возмущения входят три экспоненты:
$$\theta(y,n) \approx \sum_{j=1}^{3} C_j\,\mathrm{e}^{k\sigma_j n}\cos(ky), \tag{12}$$
где
$$\sigma_1 \approx -A, \quad \sigma_2 \approx -A\Big(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\Big) = A\,\mathrm{e}^{-2\pi i/3}, \quad \sigma_3 \approx -A\Big(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\Big) = A\,\mathrm{e}^{2\pi i/3}, \tag{13}$$
C_j — постоянные интегрирования; $A = (R\cos^2\varphi)^{1/6} \approx R^{1/6}$. Согласно (2) в решение для u может входить четвертая, относительно медленно убывающая экспонента e^{-kn}:
$$u(y,n) \approx \Big(C_4\,\mathrm{e}^{-kn} - \frac{\alpha g}{\nu k^2}\sin\varphi\,\sum_{j=1}^{3}\frac{C_j}{\sigma_j^2}\,\mathrm{e}^{k\sigma_j n}\Big)\cos(ky).$$

Здесь и далее учтены большие абсолютные значения безразмерных величин R и σ_j. Из формулы (5) получаем

$$w = -u \operatorname{tg}\varphi + \frac{\varkappa}{\gamma\cos\varphi}\,\Delta\theta \approx$$

$$\approx \Big[-C_4 \operatorname{tg}\varphi\, \mathrm{e}^{-kn} + \frac{\varkappa k^2}{\gamma\cos\varphi} \sum_{j=1}^{3} \sigma_j^2 C_j \Big(1 + \frac{R\sin^2\varphi}{\sigma_j^4}\Big) \mathrm{e}^{k\sigma_j n} \Big] \cos(ky). \qquad (14)$$

Второе слагаемое под знаком суммы в (14) согласно (10), (13) относительно мало по абсолютной величине, поэтому в рассматриваемом предельном случае им пренебрегается. Из уравнения неразрывности (6) находим

$$v \approx -\Big(C_4 \operatorname{tg}\varphi\, \mathrm{e}^{-kn} + \frac{\varkappa k^2}{\gamma\cos\varphi} \sum_{j=1}^{3} \sigma_j^3 C_j\, \mathrm{e}^{k\sigma_j n} \Big) \sin(ky). \qquad (15)$$

Из (3), (15) получаем

$$p \approx \rho_* \frac{\nu\varkappa k^3}{\gamma\cos\varphi} \sum_{j=1}^{3} \sigma_j^5 C_j\, \mathrm{e}^{k\sigma_j n} \cos(ky).$$

Из краевых условий следует, что постоянные интегрирования должны удовлетворять системе уравнений

$$\sum_{j=1}^{3} C_j = \theta_0, \qquad \sum_{j=1}^{3} \frac{C_j}{\sigma_j^2} - \frac{\nu k^2}{\alpha g \sin\varphi}\, C_4 = 0; \qquad (16)$$

$$\sum_{j=1}^{3} \sigma_j^2 C_j - \frac{\gamma\sin\varphi}{\varkappa k^2}\, C_4 = 0, \qquad \sum_{j=1}^{3} \sigma_j^3 C_j + \frac{\gamma\sin\varphi}{\varkappa k^2}\, C_4 = 0. \qquad (17)$$

В рассматриваемом приближении решение системы (16), (17) имеет вид

$$C_1 \approx \frac{\theta_0}{2}, \qquad C_{2,3} \approx \frac{\theta_0}{2\sqrt{3}}\, \mathrm{e}^{\pm\pi i/6},$$

$$C_4 \approx \frac{\alpha g \theta_0 \sin\varphi}{2\nu k^2 R^{1/3} \cos^{2/3}\varphi} = \frac{\theta_0 \sin\varphi}{2} \Big(\frac{\varkappa\alpha^2 g^2}{\gamma\nu^2 k^2 \cos^2\varphi} \Big)^{1/3}.$$

Таким образом, в рассматриваемом предельном случае приближенное решение задачи можно представить следующим образом:

$$\theta \approx \frac{\theta_0}{2}\, \mathrm{e}^{-Akn/2} \Big[\mathrm{e}^{-Akn/2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} Akn - \frac{\pi}{6} \Big) \Big] \cos(ky); \qquad (18)$$

$$u \approx \frac{\alpha g \theta_0 \sin\varphi}{2\nu k^2 A^2} \Big\{ \mathrm{e}^{-kn} - \mathrm{e}^{-Akn/2} \Big[\mathrm{e}^{-Akn/2} - \sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} Akn \Big) \Big] \Big\} \cos(ky);$$

$$v \approx \frac{\alpha g \theta_0 \cos\varphi}{2\nu k^2 A^3} \Big\{ -A \operatorname{tg}^2\varphi\, \mathrm{e}^{-kn} +$$

$$+ \mathrm{e}^{-Akn/2} \Big[\mathrm{e}^{-Akn/2} - \frac{2}{\sqrt{3}} \cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} Akn - \frac{\pi}{6} \Big) \Big] \Big\} \sin(ky); \qquad (19)$$

$$w \approx \frac{\alpha g \theta_0 \cos\varphi}{2\nu k^2 A^4} \Big\{ -A^2 \operatorname{tg}^2\varphi \, \mathrm{e}^{-kn} + \\ + \mathrm{e}^{-Akn/2} \Big[\mathrm{e}^{-Akn/2} - \frac{2}{\sqrt{3}} \cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} Akn + \frac{\pi}{6}\Big)\Big]\Big\} \cos(ky); \qquad (20)$$

$$p \approx -\rho_* \frac{\alpha g \theta_0 \cos\varphi}{2kA} \, \mathrm{e}^{-Akn/2} \Big[\mathrm{e}^{-Akn/2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} Akn + \frac{\pi}{6}\Big)\Big] \cos(ky). \qquad (21)$$

4. Анализ решения. При наличии устойчивой фоновой стратификации возмущения, как правило, сосредоточены в относительно тонком слое вблизи источника — наклонной нижней границы $n = 0$. Выражения (18), (21) содержат только экспоненты, быстро убывающие с ростом n на масштабах порядка $h_1 \equiv (Ak)^{-1}$, много меньших характерного горизонтального масштаба термических неоднородностей порядка k^{-1}. С учетом (10) нетрудно убедиться, что вертикальный масштаб этих возмущений h_1 также много меньше толщины склонового течения в модели Прандтля h_p. В выражениях для составляющих скорости, вообще говоря, присутствует также медленно убывающая экспонента e^{-kn}. Однако в (19), (20) эта экспонента входит с малыми коэффициентами, поскольку в рассматриваемом случае величина угла φ и произведение $A\varphi$ согласно (11) много меньше единицы. Поэтому, как и предполагалось, при малых значениях угла φ решение для θ, p, v, w близко к решению задачи о возмущениях, вызываемых термическими неоднородностями горизонтальной поверхности [14]. Из полученных выражений следует, например, что непосредственно над охлажденным участком нижней границы (при $\theta_0 < 0$ и малых значениях y), где среда вблизи границы охлаждена, вес столба среды увеличен и давление повышено, наблюдаются горизонтальное растекание в поперечном к склону направлении y и обусловленное этим нисходящее движение. При $n \sim h_1$ сходящиеся горизонтальные движения (в направлении оси y) компенсируют это растекание.

Вместе с тем имеется составляющая скорости u, направленная над охлажденной поверхностью вниз по склону. Таким образом, сток тепла на наклонной поверхности компенсируется адиабатическими притоками тепла, обусловленными влиянием как склонового течения (составляющая u), так и с поперечной к склону термической циркуляцией (составляющая w), для которой наличие склона несущественно. Относительный вклад этих притоков зависит от величины угла φ. В рассматриваемом предельном случае амплитуда u относительно мала, поскольку пропорциональна $\sin\varphi$. Однако u затухает с увеличением высоты на масштабах порядка k^{-1}, т. е. значительно медленнее остальных переменных. Поэтому выше уровней порядка $(Ak)^{-1}$ составляющая скорости u может быть больше других. Представляет интерес сравнить полученное решение с решением Прандтля, описывающим пространственно-однородное возмущение. Амплитуда этого решения меньше, чем в модели Прандтля, приблизительно на величину $(R\sin\varphi)^{-1/6} \gg 1$. Однако толщина стекающего слоя $h_p(R\sin^2\varphi)^{1/4}$ превышает толщину слоя Прандтля h_p, за исключением области очень малых углов наклона $\varphi \leqslant R^{-1/2}$. В работе [7], в которой рассматривалась другая геометрия задачи, отмечалось, что неоднородные склоновые течения могут проникать в устойчиво стратифицированную среду на достаточно большую высоту.

Амплитуда возмущения давления (21) приближенно описывается гидростатическим соотношением $|p| \sim |\rho' g h_1| \sim \rho_* g\alpha|\theta_0|/(kA)$. Приравнивая горизонтальную силу (ускорение) градиента давления kp/ρ_* к силе вязкости $\nu v/h_1^2$, для амплитуды составляющей скорости v получаем выражение, согласующееся с (19). Из уравнения неразрывности следует оценка амплитуды w, согласующаяся с формулой (20).

5. Предельный случай достаточно больших углов наклона. При достаточно больших значениях параметра R и не очень малых значениях угла φ возможны случаи, обратные случаю (10):

$$\sin\varphi \gg \frac{\cos^{2/3}\varphi}{R^{1/6}}. \tag{22}$$

В этом случае в характеристическом уравнении (8) становится существенным второе слагаемое, которое в предельном случае, описанном в п. **4**, было пренебрежимо малым. Корни характеристического уравнения, соответствующие убывающим с ростом n экспонентам, в этом случае можно представить в виде

$$\sigma_1 \approx -\frac{1}{\sin\varphi}, \qquad \sigma_{2,3} \approx \Big(\frac{R\sin^2\varphi}{4}\Big)^{1/4}(-1 \pm i) = (R\sin^2\varphi)^{1/4}\,\mathrm{e}^{\pm 3\pi i/4}\,. \tag{23}$$

При $\sin\varphi \ll 1$ корни (23) по абсолютной величине много больше единицы, что существенно упрощает анализ решения (при $|\sin\varphi| \to 1$ первый корень становится приблизительно равным единице, при этом анализ усложняется).

Выражение (12) для температурного возмущения остается справедливым. Для составляющей скорости вдоль склона получается приближенное выражение

$$u(y,n) \approx \Big[C_4\,\mathrm{e}^{-kn} - \frac{\alpha g}{\nu k^2}\sin\varphi\,\Big(C_1\,\mathrm{tg}^2\varphi\,\mathrm{e}^{-\sigma_1 kn} + \sum_{j=2}^{3}\frac{C_j}{\sigma_j^2}\,\mathrm{e}^{k\sigma_j n}\Big)\Big]\cos(ky). \tag{24}$$

В выражении (14) при рассматриваемых значениях корней характеристического уравнения $1 + R\sin^2\varphi/\sigma_{2,3}^4 \approx 0$, поэтому выражение для w упрощается:

$$w \approx \Big[-C_4\,\mathrm{tg}\,\varphi\;\mathrm{e}^{-kn} + \frac{\alpha g\sin\varphi\,\mathrm{tg}^3\varphi}{\nu k^2}\Big(1 + \frac{\cos^4\varphi}{R\sin^6\varphi}\Big)C_1\exp\Big(-\frac{kn}{\sin\varphi}\Big)\Big]\cos(ky). \tag{25}$$

Из уравнения неразрывности получаем

$$v \approx \Big[-C_4\,\mathrm{tg}\,\varphi\;\mathrm{e}^{-kn} + \frac{\alpha g\,\mathrm{tg}^3\varphi}{\nu k^2}\Big(1 + \frac{\cos^4\varphi}{R\sin^6\varphi}\Big)C_1\exp\Big(-\frac{kn}{\sin\varphi}\Big)\Big]\sin(ky). \tag{26}$$

Согласно краевым условиям (7) составляющие скорости должны обращаться в нуль при $n = 0$. Из выражений (25), (26) следует, что при $\sin\varphi \neq 1$ (случай вертикальной границы не рассматривается) граничные условия (7) могут быть удовлетворены только при $C_1 = C_4 = 0$, поэтому $v \approx w \approx 0$. Для двух других постоянных интегрирования из граничных условий и выражений (12), (24) следует система уравнений

$$C_2 + C_3 = \theta_0, \qquad \frac{C_2}{\sigma_2^2} + \frac{C_3}{\sigma_3^2} = 0.$$

Отсюда получаем $C_2 = C_3 = \theta_0/2$, и решение принимает вид

$$\begin{gathered}\theta \approx \theta_0\exp\Big(-\frac{z}{\sqrt{2}\,h_p}\Big)\cos\Big(\frac{z}{\sqrt{2}\,h_p}\Big)\cos(ky),\\ u \approx \theta_0\Big(\frac{\varkappa}{\nu}\,\frac{\alpha g}{\gamma}\Big)^{1/2}\exp\Big(-\frac{z}{\sqrt{2}\,h_p}\Big)\sin\Big(\frac{z}{\sqrt{2}\,h_p}\Big)\cos(ky).\end{gathered} \tag{27}$$

Амплитуда и вертикальная структура решения (27) совпадают с полученными по модели Прандтля, однако в рассматриваемой задаче решение неоднородно по y (течение и отклонение температуры зависят от граничного условия (1)). Таким образом, в рассматриваемом предельном случае термические неоднородности на нижней границе практически не приводят к возникновению других составляющих движения и изменению толщины стекающего слоя, а лишь "модулируют" склоновое течение по поперечной к склону координате y.

Заключение. В работе получены результаты, обобщающие классическую модель Прандтля на случай термически неоднородной наклонной поверхности. Рассмотрена задача, фактически описывающая взаимодействие течений двух типов в устойчиво стратифицированной среде. Первый тип — это течения над термически неоднородной поверхностью в плоскости (n, y); подобные течения существуют также над горизонтальными поверхностями [14, 15]. Заметим, что рассматривается не конвективная неустойчивость (стратификация может оставаться устойчивой), а течения, обусловленные горизонтальными вариациями гидростатического давления (веса столба среды). Второй тип — склоновые течения в плоскости (n, s). Возникновение течений этих двух типов обусловлено одними и теми же причинами — отклонениями температуры нижней границы. Например, сток тепла, связанный с охлаждением какой-либо области нижней границы, в рассматриваемой задаче компенсируется одновременным адиабатическим притоком тепла (нисходящих течений) двух типов. При устойчивой стратификации тепло переносится в охлаждаемую область как нисходящим склоновым течением, так и нисходящей термической циркуляцией, существующей над охлаждаемой областью и в случае горизонтальной нижней границы [14, 15]. Эти два механизма притока тепла находятся в состоянии "конкуренции": чем большее количество тепла переносится одним типом течений, тем меньшее другим.

Рассмотрен предельный случай малых углов φ и не очень больших горизонтальных масштабов термических неоднородностей, когда вклад склонового течения в баланс тепла относительно мал. В этом случае решение близко к задаче с горизонтальной нижней границей [14]. Баланс тепла в основном определяется термическими циркуляциями в плоскости, поперечной склону. Эти течения заключены в слое, толщина которого меньше h_p. Однако относительно слабое течение вдоль склона, наоборот, может выходить далеко за границы этого масштаба, достигая высоты порядка k^{-1}.

Можно было предположить, что при достаточно больших горизонтальных масштабах термических неоднородностей полученное решение приближается к решению Прандтля, в котором, однако, заданная температурная неоднородность на наклонной границе "модулирована", т. е. медленно меняется по горизонтали. Этому и соответствует рассмотренный в работе предельный случай, для которого установлены пределы применимости (условие (22)). Применимость двух рассмотренных предельных случаев определяется соотношением между величинами $\sin\varphi$ и $R^{-1/6}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гутман Л. Н.** Введение в нелинейную теорию мезометеорологических процессов. Л.: Гидрометеоиздат, 1969.
2. **Chow F. K.** Mountain weather research and forecasting. Recent progress and current challenges / F. K. Chow, S. F. J. DeWekker, B. Snyder. Berlin: Springer, 2013.
3. **Grisogono B., Oerlemans J.** Katabatic flow: Analytic solution for gradually varying eddy diffusivities // J. Atmospher. Sci. 2001. V. 58, N 21. P. 3349–3354. DOI: 10.1175/1520-0469(2001)058<3349:KFASFG>2.0.CO;2/.
4. **Giometto M. G., Grandi R., Fang J., et al.** Katabatic flow: A closed-form solution with spatially-varying eddy diffusivities // Boundary-Layer Meteorol. 2017. V. 162. P. 307–317. DOI: 10.1007/s10546-016-0196-z.
5. **Oerlemans J., Grisogono B.** Glacier winds and parameterisation of the related surface heat fluxes // Tellus A. 2002. V. 54A. P. 440–452. DOI: 10.3402/tellusa.v54i5.12164.

6. **Педлоски Дж.** Геофизическая гидродинамика. М.: Мир, 1984. Т. 1.
7. **Egger J.** On the linear two-dimensional theory of thermally induced slope winds // Beitr. Phys. Atmosphäre. 1981. Bd 54, N 4. S. 465–481.
8. **Kondo H.** The difference of the slope wind between day and night // J. Meteorol. Soc. Jap. 1984. V. 62, N 2. P. 224–233.
9. **Shapiro A., Fedorovich E.** Katabatic flow along a differentially cooled sloping surface // J. Fluid Mech. 2007. V. 571. P. 149–175. DOI: 10.1017/S0022112006003302.
10. **Shapiro A., Fedorovich E.** Coriolis effects in homogeneous and inhomogeneous katabatic flows // Quart. J. Res. Meteorol. Soc. 2008. V. 134. P. 353–370. DOI: 10.1002/qj.217.
11. **Burkholder B., Shapiro A., Fedorovich E.** Katabatic flow induced by a cross-slope band of surface cooling // Acta Geophys. 2009. V. 57, N 4. P. 923–949. DOI: 10.2478/s11600-009-0025-6.
12. **Axelsen S. L., Shapiro A., Fedorovich E., van Dop H.** Analytical solution for katabatic flow induced by an isolated cold strip // Environ. Fluid Mech. 2010. V. 10. P. 387–414. DOI: 10.1007/s10652-009-9158-z.
13. **Shapiro A., Burkholder B., Fedorovich E.** Analytical and numerical investigation of two-dimensional katabatic flow resulting from local surface cooling // Boundary-Layer Meteorol. 2012. V. 145. P. 249–272. DOI: 10.1007/s10546-011-9685-2.
14. **Ингель Л. Х., Стогова И. В.** О возмущениях, вносимых в устойчиво стратифицированную среду термически неоднородной поверхностью // Метеорология и гидрология. 1986. № 3. С. 23–29.
15. **Ингель Л. Х., Макоско А. А.** К теории конвективных течений во вращающейся стратифицированной среде над термически неоднородной поверхностью // Вычисл. механика сплошных сред. 2020. Т. 13, № 3. С. 288–297. DOI: 10.7242/1999-6691/2020.13.3.23.

Поступила в редакцию 28/III 2022 г.,
после доработки — 28/III 2022 г.
Принята к публикации 25/IV 2022 г.