УДК 532.526

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ В ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ

И. В. Денисова, Д. А. Индейцев, А. В. Клименко

Институт проблем машиноведения РАН, 199178 Санкт-Петербург
E-mails: ira@wave.ipme.ru, ind@director.ipme.ru, andy@snark.ipme.ru

Изучается устойчивость бесконечной вязкоупругой пластины, покоящейся на упругом основании, под потоком вязкой несжимаемой жидкости. Система Навье — Стокса линеаризуется на векторе скорости с экспоненциальным профилем. С помощью преобразования Фурье — Лапласа задача сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой найдено в виде сходящихся рядов. Корни дисперсионного соотношения, характеризующие устойчивость системы, находятся численно. Исследуется влияние параметров вязкости жидкости и пластины на устойчивость волн, распространяющихся в направлении потока и навстречу ему. Проводится сравнение полученных результатов с исследованиями по устойчивости вязкоупругой пластины в потоке идеальной жидкости.

Ключевые слова: вязкоупругая пластина, вязкая жидкость, экспоненциальный профиль, устойчивость волн.

Введение. Проблема взаимодействия потока вязкой жидкости с изменяющейся во времени поверхностью упругодеформируемого твердого тела актуальна как с практической, так и с теоретической точки зрения. Несмотря на большое количество работ, посвященных этой проблеме, многие вопросы, связанные с устойчивостью рассматриваемой механической системы, остаются недостаточно изученными. Экспериментальная проверка теоретических результатов, свидетельствующих о возникновении интенсивной вибрации элементов конструкции, обтекаемых потоком вязкой сплошной среды (газа, жидкости), крайне затруднительна. В каждом отдельном случае строится специальная математическая модель, а вид потери устойчивости существенно зависит от выбора физической модели (см., например, [1–5]). В данной работе подробно исследуется влияние внутреннего трения (конструкционного демпфирования) и внешнего трения (вязкости жидкости) на устойчивость вязкоупругой пластины, покоящейся на упругом основании. В общем случае для выбранной физической модели характерны два типа потери устойчивости: дивергенция и панельный флаттер. Эти явления хорошо изучены в случае обтекания пластины потоком идеальной несжимаемой жидкости с постоянным как во времени, так и по координатам профилем скорости. В настоящей работе описание этих явлений уточняется путем детального рассмотрения волн, распространяющихся как по потоку, так и против него. Введение внешнего (или внутреннего) трения приводит в рассматриваемой неконсервативной задаче к весьма неоднозначным результатам (см., например, [6]). Как показали наши исследования, эти два вида трения по-разному влияют на устойчивость волн, распространяющихся в противоположных направлениях.

При рассмотрении модели вязкой жидкости в качестве основного профиля скорости был выбран экспоненциальный. Как известно, такой профиль может быть асимптотически реализован путем отсасывания жидкости из пограничного слоя при обтекании неподвижной поверхности [7]. Теоретические и экспериментальные исследования показывают, что экпоненциальный профиль устойчив. В то же время реальные профили могут быть хорошо аппроксимированы линейной комбинацией экспоненциальных профилей с соответствующими параметрами.

В данной работе предлагается метод, удобный для численного решения задачи в случае обтекания экспоненциальным профилем вибрирующей поверхности пластины. Показано, что параметры упругого тела существенно влияют на устойчивость системы. Кроме того, явное решение уравнения для идеальной жидкости и сравнение его с результатами, полученными численно для вязкой жидкости, позволяют сделать вывод о принципиальном различии поведения распространяющихся волн (по потоку и против него) при обтекании пластины вязкой и идеальной жидкостями.

1. Постановка задачи. Будем считать, что поток зависит только от вертикальной координаты, поэтому задачу можно рассматривать как задачу о двумерном течении над бесконечной вибрирующей балкой (балкой Бернулли — Эйлера), покоящейся на упругом основании.

В общем случае задача об обтекании гибкой балки набегающим потоком $\boldsymbol{u}^*$ в полуплоскости формулируется следующим образом. Найти форму балки $\Gamma(w(y))$, а также поле скоростей $\boldsymbol{V} = (V_1, V_2)$ и функцию давления p жидкости, удовлетворяющие уравнениям Навье — Стокса

$$\begin{gathered}\dot{\boldsymbol{V}} + (\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V} - \nu\Delta\boldsymbol{V} + \rho^{-1}\nabla p = 0,\\ \nabla\cdot\boldsymbol{V} = 0 \qquad \text{в} \quad \Omega = \{(x,y)\colon y > w\},\end{gathered} \tag{1.1}$$

а также начальным и краевым условиям

$$\boldsymbol{V}\big|_{\Gamma} = \boldsymbol{v}_b, \qquad \lim_{y\to+\infty}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{u}_0, \qquad \boldsymbol{V}\big|_{t=0} = \boldsymbol{V}_0. \tag{1.2}$$

В (1.1), (1.2) $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$; $\Delta = \nabla\cdot\nabla$; положительные постоянные ν, ρ — кинематическая вязкость жидкости и ее плотность соответственно; $\boldsymbol{v}_b$ — скорость балки; $\boldsymbol{u}_0 = (u_0, 0)$ — предельная скорость потока на бесконечности; $\boldsymbol{V}_0$ — начальное поле скоростей; точка над символом обозначает производную по времени; w — отклонение балки от нулевого положения $y = 0$ (предполагается, что балка может иметь только вертикальное отклонение).

Кроме того, будем считать, что отклонение w удовлетворяет известному уравнению вида

$$m\ddot{w} + D(w'''' + \varkappa\dot{w}'''') + Kw = \boldsymbol{e}_y\cdot T\boldsymbol{n}, \qquad t > 0, \tag{1.3}$$

где штрих обозначает производную по горизонтальной координате x; m, D — погонная масса балки и ее изгибная жесткость; K — коэффициент жесткости упругого основания; $\varkappa$ — коэффициент, характеризующий внутреннее трение балки; $\boldsymbol{n}$ — внешняя относительно области Ω нормаль к Γ; $\boldsymbol{e}_y$ — единичный вектор по оси y; T — тензор напряжений с компонентами

$$T_{ik}(\boldsymbol{V}, p) = -p\delta_i^k + \mu\Big(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i}\Big), \qquad i = 1,2, \quad k = 1,2,$$

δ_i^k — символ Кронекера; $x_1 \equiv x$; $x_2 \equiv y$; $\mu = \nu\rho$ — динамическая вязкость жидкости. При $x \to \infty$ функция w предполагается ограниченной вместе со своими производными.

2. Линеаризация системы (1.1)–(1.3) на потоке с экспоненциальным профилем скорости. Линеаризуем систему (1.1)–(1.3) на векторе $\boldsymbol{u}^* = (u^*(y), 0)$, где $u^*(y) = -u_0(1-\mathrm{e}^{-\lambda y})$; $\lambda > 0$, и запишем краевую задачу для возмущений $(\boldsymbol{u}, q, w)$ в полуплоскости $\mathbb{R}^2_+$ $(y > 0)$:

$$\begin{gathered}\dot{\boldsymbol{u}} - \nu\Delta\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}^*\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}^* + \rho^{-1}\nabla q = 0,\\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \qquad \text{в} \quad \mathbb{R}^2_+\times(0,\infty);\end{gathered} \tag{2.1}$$

$$u_1\big|_{y=0} = 0, \qquad u_2\big|_{y=0} = \dot{w}, \qquad \lim_{\substack{y\to+\infty\\ |x|\to\infty}} \boldsymbol{u} = 0; \tag{2.2}$$

$$m\ddot{w} + D(w'''' + \varkappa\dot{w}'''') + Kw - \mu u_0 \lambda w' = -q\big|_{y=0}, \qquad \lim_{|x|\to\infty} w = 0. \tag{2.3}$$

Пусть $\boldsymbol{u}_0 = (-u_0, 0)$ — постоянный вектор, $u_0 \geqslant 0$. Перепишем (2.1) следующим образом:

$$\begin{gathered} \dot{\boldsymbol{u}} - \nu\Delta\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + \rho^{-1}\nabla q = ((\boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{u}^*)\cdot\nabla)\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}^*, \\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \qquad \text{в} \quad \mathbb{R}^2_+ \times (0,\infty). \end{gathered} \tag{2.4}$$

Предположим, что задача (2.4), (2.2), (2.3) допускает решение $(\boldsymbol{u}, q, w)$ с экспоненциальной зависимостью от времени $\boldsymbol{u}(x,y,t) = \hat{\boldsymbol{u}}(x,y,s)\,\mathrm{e}^{st}$, $q(x,y,t) = \hat{q}(x,y,s)\,\mathrm{e}^{st}$, $w(x,t) = \hat{w}(x,s)\,\mathrm{e}^{st}$. Для того чтобы определить, при каких s возможен такой режим, подставим это решение в (2.4), (2.2), (2.3) и выполним преобразование Фурье относительно переменной x по формуле

$$\tilde{f}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-i\xi x}\,dx. \tag{2.5}$$

После такого преобразования получим краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (по переменной y) для образов поля скоростей $\tilde{\boldsymbol{u}}(\xi,y,s)$, давления $\tilde{q}(\xi,y,s)$ и смещения стержня $\tilde{w}(\xi,s)$

$$\begin{gathered} \frac{d^2\tilde{u}_1}{dy^2} - r_1^2\tilde{u}_1 - \frac{i\xi\tilde{q}}{\mu} = \frac{i\xi u_0}{\nu}\,\mathrm{e}^{-\lambda y}\,\tilde{u}_1 - \frac{u_0\lambda}{\nu}\,\mathrm{e}^{-\lambda y}\,\tilde{u}_2, \\ \frac{d^2\tilde{u}_2}{dy^2} - r_1^2\tilde{u}_2 - \frac{1}{\mu}\frac{d\tilde{q}}{dy} = \frac{i\xi u_0}{\nu}\,\mathrm{e}^{-\lambda y}\,\tilde{u}_2, \\ i\xi\tilde{u}_1 + \frac{d\tilde{u}_2}{dy} = 0; \end{gathered} \tag{2.6}$$

$$\tilde{u}_1(\xi,0,s) = 0, \qquad \tilde{u}_2(\xi,0,s) = s\tilde{w}, \qquad \lim_{y\to+\infty}\tilde{\boldsymbol{u}} = 0; \tag{2.7}$$

$$\big(ms^2 + (1+\varkappa s)D\xi^4 + K - i\mu u_0\lambda\xi\big)\tilde{w} = -\tilde{q}(\xi,0,s), \tag{2.8}$$

где $r_1 = \sqrt{(s - i\xi u_0)/\nu + \xi^2}$, причем полагается, что $\mathrm{Re}\sqrt{z} \geqslant 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

Как показано в [8], решение (2.6), (2.7) можно найти в виде экспоненциальных рядов

$$\begin{gathered} \tilde{u}_1(\xi,y,s) = -\frac{B_1(0)s\tilde{w}}{P}\,\mathrm{e}^{-r_1 y}\,A_1(y) + \frac{A_1(0)s\tilde{w}}{P}\,\mathrm{e}^{-|\xi|y}\,B_1(y), \\ \tilde{u}_2(\xi,y,s) = -\frac{B_1(0)s\tilde{w}}{P}\,\mathrm{e}^{-r_1 y}\,A_2(y) + \frac{A_1(0)s\tilde{w}}{P}\,\mathrm{e}^{-|\xi|y}\,B_2(y), \\ \tilde{q}(\xi,y,s) = -\frac{B_1(0)s\tilde{w}}{P}\,\mathrm{e}^{-r_1 y}\,A_3(y) + \frac{A_1(0)s\tilde{w}}{P}\,\mathrm{e}^{-|\xi|y}(B_3(y) + B_4), \end{gathered} \tag{2.9}$$

где

$$P = A_1(0)B_2(0) - B_1(0)A_2(0),$$

$$A_1(y) = \sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-k\lambda y}\,a_1^{(k)}, \quad A_2(y) = \sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-k\lambda y}\,a_2^{(k)}, \quad A_3(y) = \sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-k\lambda y}\,a_3^{(k)},$$

$$B_1(y)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-k\lambda y}\,b_1^{(k)},\quad B_2(y)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-k\lambda y}\,b_2^{(k)},\quad B_3(y)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-k\lambda y}\,b_3^{(k)},\quad B_4=\frac{\rho(s-i\xi u_0)}{i\xi};$$

$$\begin{gathered}
a_1^{(k)}=\Big(\frac{i\xi u_0}{\nu\lambda}\Big)^k\frac{r_1+k\lambda}{k!r_1}\,R_k,\qquad a_2^{(k)}=\Big(\frac{i\xi u_0}{\nu\lambda}\Big)^k\frac{i\xi}{k!r_1}\,R_k,\\
a_3^{(k)}=\Big(\frac{i\xi u_0}{\nu\lambda}\Big)^k\frac{2\lambda^2\mu i\xi}{(k-1)!r_1((r_1+k\lambda)^2-\xi^2)}\,R_{k-1},\\
b_1^{(k)}=\Big(\frac{i\xi u_0}{\nu}\Big)^k\frac{|\xi|+k\lambda}{k!|\xi|}\,Q_k,\qquad b_2^{(k)}=\Big(\frac{i\xi u_0}{\nu}\Big)^k\frac{i\xi}{k!|\xi|}\,Q_k,\\
b_3^{(k)}=\Big(\frac{i\xi u_0}{\nu}\Big)^k\frac{2\mu i\xi}{k!|\xi|(2|\xi|+k\lambda)}\,Q_{k-1};\\
R_k=\prod_{j=1}^{k}\frac{(r_1+j\lambda)(r_1+(j-2)\lambda)-\xi^2}{(2r_1+j\lambda)((r_1+j\lambda)^2-\xi^2)},\qquad R_0\equiv 1,\\
Q_k=\prod_{j=1}^{k}\frac{2(j-1)|\xi|+j(j-2)\lambda}{(2|\xi|+j\lambda)((|\xi|+j\lambda)^2-r_1^2)},\qquad Q_0\equiv 1.
\end{gathered}\tag{2.10}$$

Поскольку в выражениях для R_k и Q_k степени числителей меньше степеней знаменателей, их модули не превышают $\mathrm{const}/k!$. Значит, модули $|a_i^{(k)}|$, $|b_i^{(k)}|$ в (2.10) ограничены сверху произведением константы и общего члена ряда Тейлора для экспоненциальной функции. Таким образом, можно заключить, что ряды в (2.9) сходятся при всех ξ и u_0, причем равномерно по y, так как $\mathrm{e}^{-k\lambda y}\leqslant 1$, $y\geqslant 0$.

Подставив $\tilde q(\xi,0,s)$ в уравнение упругости балки (2.8), получим условие существования нетривиального решения $\tilde w$ для системы (2.6)–(2.8):

$$ms^2+K+(1+\varkappa s)D\xi^4-i\mu u_0\lambda\xi+\frac{-A_3(0)B_1(0)+(B_3(0)+B_4)A_1(0)}{P}\,s=0.\tag{2.11}$$

Перемножением рядов приведем определитель P к виду

$$P=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{i\xi u_0}{\nu\lambda}\Big)^n\frac{i\xi}{r_1|\xi|}\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^{n-k}(r_1-|\xi|+(2k-n)\lambda)}{k!(n-k)!}\,R_kQ_{n-k}.$$

Домножив уравнение (2.11) на $i\xi P$ и вновь перемножив ряды, получим дисперсионное соотношение

$$\begin{gathered}
(ms^2+K+(1+\varkappa s)D\xi^4-i\mu u_0\lambda\xi)i\xi P+\frac{\rho s(s-i\xi u_0)r_1}{|\xi|}+\\
+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{i\xi u_0}{\nu\lambda}\Big)^n\Big\{\frac{\rho s(s-i\xi u_0)(r_1+n\lambda)}{|\xi|n!}\,R_n+2\mu s\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^{n-k}}{k!(n-k-1)!}\times\\
\times\Big(\frac{r_1+k\lambda}{(n-k)(2|\xi|+(n-k)\lambda)}-\frac{\lambda(|\xi|+(n-k-1)\lambda)}{(r_1+(k+1)\lambda)^2-\xi^2}\Big)R_kQ_{n-k-1}\Big\}=0.
\end{gathered}\tag{2.12}$$

Корни s_i^* дисперсионного уравнения (2.12) являются показателями экспоненциального временно́го режима, предположение о существовании которого сделано выше. Устойчивость механической системы жидкость — балка определяется знаками вещественных частей корней s_i^*.

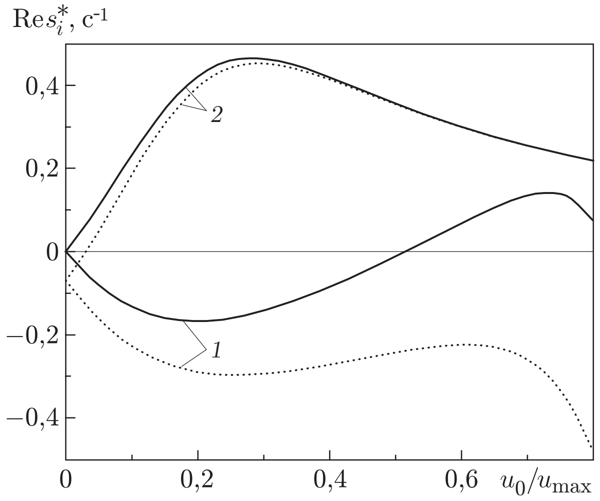

Рис. 1

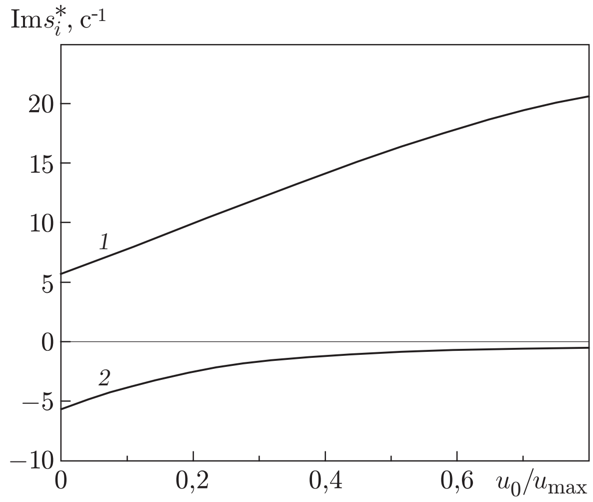

Рис. 2

Рис. 1. Вещественные части корней s_i^* дисперсионного уравнения (2.12) для случая вязкой жидкости:

сплошные линии — $\varkappa = 0$; пунктирные — $\varkappa = 0{,}01$ с; *1* — волна, движущаяся по потоку; *2* — волна, движущаяся против потока

Рис. 2. Мнимые части корней s_i^* дисперсионного уравнения (2.12) для случая вязкой жидкости (обозначения те же, что на рис. 1)

3. Исследование устойчивости. Численные исследования проводились для конкретной модели с параметрами $m = 80$ кг/м^2, $D = 15\,000$ Н $\cdot$ м, $K = 20\,000$ Н/м^3, $\nu = 10^{-6}$ м^2/с, $\rho = 1000$ кг/м^3, $\lambda = 1000$ м$^{-1}$, $\xi = 1$ м$^{-1}$. Был выбран диапазон скорости $u_0 = 0 \div 25$ м/с.

На рис. 1 представлена зависимость вещественных частей корней s_i^* $(i = 1, 2)$ дисперсионного уравнения (2.12) от скорости потока u_0, отнесенной к $u_{\max} = 25$ м/с, при нулевой (сплошная линия) и ненулевой (пунктирная линия) внутренней вязкости балки. На рис. 2 представлены аналогичные зависимости для мнимых частей корней s_i^*. Видно, что при $u_0 = 0$ уравнение (2.12) имеет два комплексно-сопряженных корня с отрицательной вещественной частью, что соответствует наличию в жидкости двух затухающих волн, распространяющихся в противоположных направлениях: по потоку (корень s_1^* с положительной мнимой частью) и против него (корень s_2^* с отрицательной мнимой частью). При $\varkappa = 0$ с увеличением скорости u_0 сначала становится положительной величина $\operatorname{Re} s_2^*$, а затем — величина $\operatorname{Re} s_1^*$, т. е. первой теряет устойчивость волна, движущаяся против потока. При наличии внутренней вязкости потеря устойчивости волны, распространяющейся против потока, происходит при большем значении скорости. Волна, распространяющаяся в направлении потока, остается устойчивой при всех значениях скорости u_0. На мнимые части корней, или на фазовые скорости волн, внутренняя вязкость практически не влияет (сплошные и пунктирные линии на рис. 2 совпадают).

Таким образом, при наличии вязкости жидкости ν имеет место флаттерная потеря устойчивости системы, причем наличие внутренней вязкости $\varkappa$ приводит к повышению устойчивости обеих волн.

Изучим поведение корней дисперсионного уравнения (2.12) при различных значениях ξ. Поскольку при малых ξ вычисление корней s_i^* затруднительно, рассмотрим асимптотическое приближение соотношения (2.12) при $\xi \to 0$ с точностью до $O(\xi)$:

$$\Delta(s) \equiv \frac{\rho s^2}{|\xi|} + K + ms^2 + \rho s\nu\sqrt{\frac{s}{\nu}} - \frac{i\rho s u_0\lambda}{\lambda + \sqrt{s/\nu}} = 0. \tag{3.1}$$

Выясним, когда уравнение $\Delta(s) = 0$ может иметь чисто мнимые корни. Для этого подставим в него $s = \pm i\omega$, где $\omega > 0$, и разделим вещественную и мнимую части последнего выражения:

$$\operatorname{Re}\Delta(\pm i\omega) \equiv -\frac{\rho\omega^2}{|\xi|} + K - m\omega^2 - \rho\omega\nu\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} \pm \frac{\rho\omega u_0\lambda(\lambda + \sqrt{\omega/(2\nu)}\,)}{\lambda^2 + \lambda\sqrt{2\omega/\nu} + \omega/\nu} = 0,$$

$$\operatorname{Im}\Delta(\pm i\omega) \equiv \pm\rho\omega\nu\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} - \frac{\rho\omega u_0\lambda\sqrt{\omega/(2\nu)}}{\lambda^2 + \lambda\sqrt{2\omega/\nu} + \omega/\nu} = 0.$$

Из уравнения для $\operatorname{Im}\Delta(\pm i\omega)$ находим

$$u_0 = \pm\bigl(\lambda\nu + \sqrt{2\omega\nu} + \omega/\lambda\bigr). \tag{3.2}$$

Подставив (3.2) в условие $\operatorname{Re}\Delta(\pm i\omega) = 0$, получим

$$|\xi| = \rho\omega^2/(K - m\omega^2 + \rho\omega\nu\lambda). \tag{3.3}$$

Таким образом, $|\xi(\omega)|$ не зависит от выбора знака u_0 и $-\omega$ соответствует отрицательным значениям скорости u_0. Поскольку $u_0 \geqslant 0$, из (3.2) находим

$$\omega = \lambda u_0 - \lambda\sqrt{\lambda\nu(2u_0 - \lambda\nu)}. \tag{3.4}$$

Так как из соотношения (3.2) следует, что $u_0 > \nu\lambda$, то подкоренное выражение в (3.4) всегда положительно. Значит, выражение (3.4) определяет вещественные значения $\omega > 0$ и зависимость между $|\xi|$ и u_0, определяемая соотношениями (3.3) и (3.4), задает нейтральную кривую устойчивости для уравнения (3.1), показанную на рис. 3 сплошной линией. Пунктирная кривая соответствует нейтральной кривой, полученной в результате численного решения уравнения (2.12) (в качестве параметра использовалось число Рейнольдса $R = u_0/(\lambda\nu)$). Заметим, что область неустойчивости находится ниже этих кривых. При

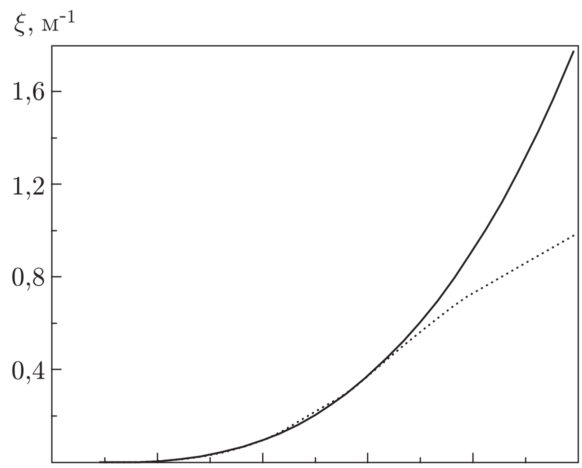

Рис. 3. Нейтральная кривая устойчивости для уравнения (2.12) (пунктирная линия) и ее асимптотическое приближение (сплошная линия)

малых ξ кривые практически совпадают, т. е. значения чисто мнимого корня приближения (3.1) совпадают со значениями корня s_2^*, найденными численно при соответствующих значениях параметров ξ и R. Второго чисто мнимого корня s_1^* при малых значениях R не существует, а при $R < 1$ не существует и чисто мнимого корня s_2^*, т. е. в этом случае система жидкость — балка устойчива для любых значений ξ.

Для того чтобы определить влияние вязкости жидкости ν на устойчивость системы, сравним полученные результаты с аналогичными результатами для случая невязкой жидкости. Поток идеальной жидкости над гибкой балкой хорошо изучен (см., например, [1, 6]).

Потенциал φ возмущения скорости идеальной жидкости $\boldsymbol{u} = \nabla\varphi$ является решением задачи

$$\Delta\varphi = 0, \qquad \lim_{y\to\infty} \varphi = O(1), \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|_{y=0} = \dot w - u_0 w'; \tag{3.5}$$

$$m\ddot w + D(w'''' + \varkappa \dot w'''') + Kw = -\rho(\dot\varphi - u_0\varphi')\big|_{y=0}. \tag{3.6}$$

Предполагая наличие экспоненциального временно́го режима и выполняя преобразование Фурье (2.5) в системе (3.5), (3.6), находим образ потенциала φ

$$\tilde\varphi(\xi, y, s) = -\frac{s - i\xi u_0}{|\xi|}\, \tilde w\, \mathrm{e}^{-|\xi| y}.$$

Подставив это решение в образ условия (3.6), получаем дисперсионное соотношение для невязкой жидкости

$$m|\xi|s^2 + D|\xi|^5(1 + \varkappa s) + K|\xi| + \rho(s - i\xi u_0)^2 = 0. \tag{3.7}$$

Рассмотрим сначала случай $\varkappa = 0$ (отсутствие вязкости балки). Решая квадратное уравнение (3.7) относительно s, получаем корни

$$s_{1,2} = \frac{i\xi u_0\rho \pm \sqrt{m|\xi|^3\rho u_0^2 - (m|\xi| + \rho)(D|\xi|^5 + K|\xi|)}}{m|\xi| + \rho}.$$

При $u_0 \leqslant u_f = \sqrt{(D|\xi|^4 + K)/(m|\xi|^2) + (D|\xi|^4 + K)/(\rho|\xi|)}$ оба корня чисто мнимые, а при $u_0 = u_f$ они, кроме того, равны. При $u_0 > u_f$ вещественная часть s_1 становится положительной, а s_2 — отрицательной, происходит флаттерная потеря устойчивости системы. Зависимости вещественных и мнимых частей корней уравнения (3.7) от скорости потока u_0 при отсутствии внутреннего трения $\varkappa$ представлены на рис. 4,*а*,*б* соответственно (сплошные линии). Таким образом, в случае отсутствия обеих вязкостей при любом значении волнового числа $\xi \ne 0$ имеется диапазон значений скорости, в котором в жидкости существует две волны с нейтральной устойчивостью.

Если вязкость балки $\varkappa > 0$, то уравнение (3.7) имеет корни

$$s_{1,2} = \frac{2i\xi\rho u_0 - \varkappa D|\xi|^5}{2(m|\xi| + \rho)} \pm \frac{\sqrt{(\varkappa D|\xi|^5 - 2i\xi\rho u_0)^2 - (m|\xi| + \rho)(D|\xi|^5 + K|\xi| - \rho\xi^2 u_0^2)}}{2(m|\xi| + \rho)}. \tag{3.8}$$

Из уравнения (3.8) следует, что в случае малых $\varkappa$ (что соответствует реальным значениям внутренней вязкости) при $u_0 = 0$ дисперсионное уравнение имеет два комплексно-сопряженных корня с отрицательной вещественной частью. Это свидетельствует о наличии в жидкости двух затухающих волн, распространяющихся в противоположных направлениях. В этом смысле характер волн в стоячей воде аналогичен характеру волн для

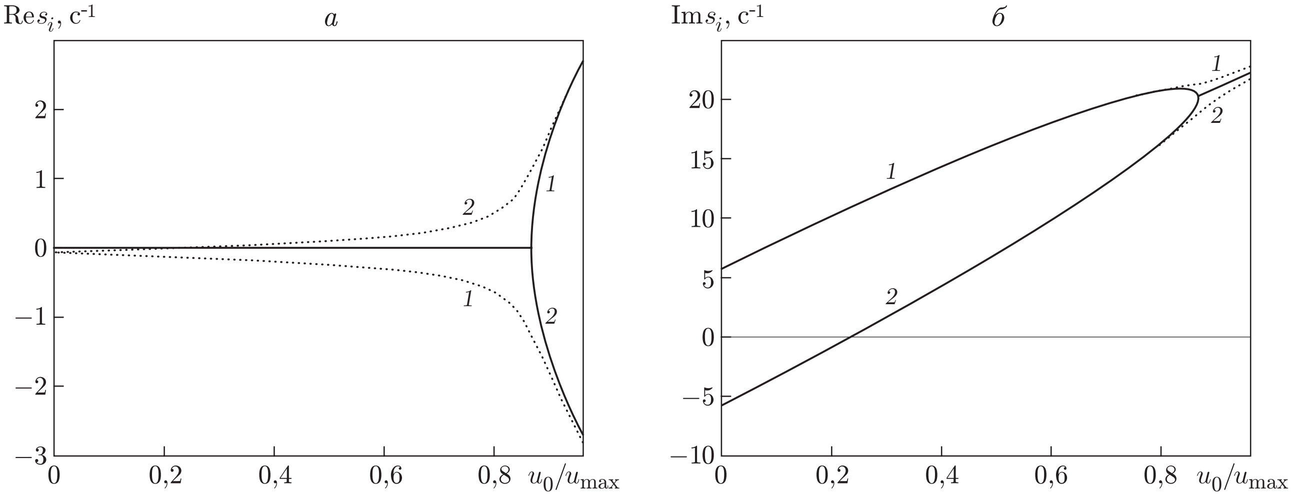

Рис. 4. Вещественные (*а*) и мнимые (*б*) части корней s_i дисперсионного уравнения (3.7) для случая невязкой жидкости:

1 — волна, движущаяся по потоку; *2* — волна, движущаяся против потока; сплошные линии — $\varkappa = 0$; пунктирные — $\varkappa = 0{,}01$ с

случая вязкой жидкости. При увеличении скорости потока u_0 вещественная часть корня с отрицательной мнимой частью s_2 увеличивается и при $u_0 = u_d \equiv \sqrt{(D|\xi|^4 + K)/(\rho|\xi|)}$ становится равной нулю. При этом мнимая часть s_2 также становится равной нулю. При дальнейшем возрастании u_0 как $\mathrm{Re}\, s_2$, так и $\mathrm{Im}\, s_2$ становятся положительными. Значит, волна, распространяющаяся против потока, претерпевает дивергентную потерю устойчивости в точке $u_0 = u_d$. Волна же, распространяющаяся в направлении потока, остается устойчивой при всех значениях u_0. Графики вещественных и мнимых частей корней s_1 и s_2 при $\varkappa = 0{,}01$ с приведены на рис. 4 (пунктирные линии).

Для того чтобы описать эффект демпфирования, приведем асимптотическое разложение вещественной части выражения (3.8) по степеням $\varkappa$:

$$\mathrm{Re}\,(s_{1,2}) \approx -\frac{\varkappa D|\xi|^5}{2(m|\xi| + \rho)}\Big(1 \pm \frac{1}{\sqrt{A}}\,|\xi|\rho u_0\Big) \qquad \text{при} \quad u_0 < u_f, \tag{3.9}$$

где $A = (m|\xi|+\rho)(D|\xi|^5+K|\xi|)-m|\xi|^3\rho u_0^2$. При рассматриваемых значениях $\varkappa$ это разложение достаточно точно совпадает с вещественной частью выражения (3.8), за исключением окрестности точки $u_0 = u_f$, где выражение A обращается в нуль (рис. 5).

Из (3.9) следует, что при малых скоростях u_0 величины $\mathrm{Re}\,(s_{1,2})$ линейно зависят от $\varkappa$. Произведение $\varkappa u_0$ указывает на стабилизацию волны по потоку при увеличении $\varkappa$, хотя скорость $u_0 = u_d$, при которой волна, движущаяся против потока, а значит, и вся система теряют устойчивость, не зависит от $\varkappa$. Кроме того, u_d всегда меньше u_f, и, следовательно, при наличии внутренней вязкости система в целом теряет устойчивость быстрее, чем без нее.

Результаты проведенных исследований позволяют сделать вывод, что для заданных параметров балки в случаях вязкой и невязкой жидкости внутренняя вязкость $\varkappa$ стабилизирует волну, движущуюся по потоку. Что касается волны, распространяющейся против потока, то ее стабилизация наблюдается только при малых скоростях. Внешняя вязкость ν дестабилизирует волну, распространяющуюся против потока: она быстро теряет устойчивость, в то же время нейтральная волна, движущаяся по потоку, становится затухающей,

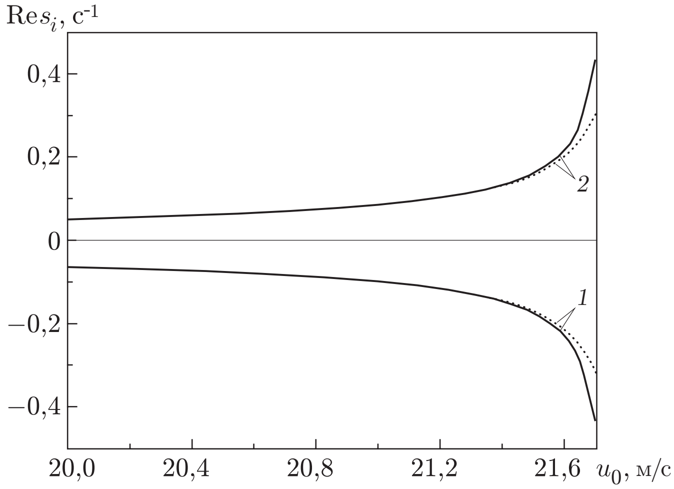

Рис. 5. Вещественные части корней (3.8) (пунктирные линии) и их асимптотические приближения (3.9) (сплошные линии):
1 — волна, движущаяся по потоку; *2* — волна, движущаяся против потока

но затем с увеличением скорости потока u_0 она все же теряет устойчивость. Таким образом, влияние вязкостных членов на волны вибрации приводит к существенному изменению характера течения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Benjamin T. B.** The threefold classification of unstable disturbances in flexible surfaces bounding inviscid flows // J. Fluid Mech. 1963. V. 16, pt 3. P. 436–450.
2. **Landahl M. T.** On the stability of a laminar incompressible boundary layer over a flexible surface // J. Fluid Mech. 1962. V. 13, pt 4. P. 609–632.
3. **Carpenter P. W., Garrad A. D.** The hydrodynamic stability of flow over Kramer-type compliant surfaces. 1. Tollmien — Schlichting instabilities // J. Fluid Mech. 1985. V. 155. P. 465–510.
4. **Riley J. J., Gad-el-Hak M., Metcalfe R. W.** Compliant coatings // Annu. Rev. Fluid Mech. 1988. V. 20. P. 393–420.
5. **Reid W. H.** The stability of parallel flows // Basic developments in fluid dynamics / Ed. by M. Holt. N. Y.: Acad. Press, 1965. V. 1. P. 249–307.
6. **Болотин В. В.** Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961.
7. **Schlichting H.** Boundary layer theory. N. Y.: McGraw Hill, 1960.
8. **Denisova I. V., Indeytsev D. A., Klimenko A. V.** Stability of an infinite flexible beam under a viscous fluid flow with an exponential profile // Proc. of the Intern. sem. “Day on Diffraction’2004”, St-Petersburg, 29 June — 2 July 2004. St-Petersburg: St-Petersburg Univ. Publ., 2004. P. 58–67.

Поступила в редакцию 13/IV 2005 г.,
в окончательном варианте — 27/IX 2005 г.