ПМТФ, № 1, 1967

О НЕКОТОРОМ ПЕРИОДИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ

Н. Н. Кочина

(Москва)

При некоторых условиях в электрохимических системах с падающей характеристикой возникают автоколебания [1-3]. Метод нахождения поляризационной кривой $P = P(\vartheta)$ (здесь ϑ — потенциал электрода, $P = i / c(0, t)$, i — плотность тока, $c(0, t)$ — концентрация вещества на поверхности электрода), если дано распределение по времени плотности тока, предложен в работе [1].

При численном решении этой задачи, которое рассмотрено ниже, встретились значительные вычислительные трудности.

1. В работе [1] в предположении, что величина $\chi(t)$, пропорциональная плотности тока, есть известная периодическая функция времени t с периодом T

$$\chi(t) = \begin{cases} \psi(t) & \text{при } \alpha + kT \leqslant t \leqslant \beta + kT \\ \varphi(t) & \text{при } \beta + kT \leqslant t \leqslant \gamma + kT \end{cases} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{1.1}$$

$$(\alpha = {}^1/_2\, pT,\ \beta = -{}^1/_2\, pT + T,\ \gamma = {}^1/_2\, pT + T,\ 0 < p < 1,\ \psi(t) < 0,\ \varphi(t) > 0)$$

с использованием формулы Дюгамеля [4] были получены сходящиеся ряды для функции $u(x, t)$ — периодического решения уравнения диффузии (D — коэффициент диффузии)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.2}$$

с граничным условием

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \chi(t) \tag{1.3}$$

в полубесконечной области $x \geqslant \infty$. Концентрация вещества $c(x, t)$ связана с $u(x, t)$ соотношением

$$u(x, t) = [c(x, t) - c_0 - (c^\circ - c_0)x / l]Gl$$

(здесь c_0, c°, l, G — некоторые константы [1]). При этом функция $\chi(t)$ должна удовлетворять некоторым требованиям [1].

Зная функцию $\chi(t)$, даваемую формулой (1.1), определив таким образом решение (1.2) с условием (1.3), получим

$$u(0, t) = \begin{cases} u_1(0, t) & \text{при } \alpha + kT \leqslant t \leqslant \beta + kT \\ u_2(0, t) & \text{при } \beta + kT \leqslant t \leqslant \gamma + kT \end{cases} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{1.4}$$

Теперь легко найти параметрическое представление характеристики $P(\vartheta)$, состоящей для значений ϑ, соответствующих автоколебательному циклу и охватывающих область максимума характеристики, из двух кусков $P_1(\vartheta)$ и $P_2(\vartheta)$, а именно [1]:

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{Gl(\psi(t) + A)}{u_1(0, t) + c_0}, \qquad v - \vartheta = Glr(\psi(t) + A) \\ P_2 &= \frac{Gl(\varphi(t) + A)}{u_2(0, t) + c_0}, \qquad v - \vartheta = Glr(\varphi(t) + A) \end{aligned} \qquad (v, r, A = \text{const}) \tag{1.5}$$

Ряды $u_1(0, t)$ и $u_2(0, t)$ имеют при этом следующий вид:

$$u_1(0, t) = -\left(\frac{D}{\pi}\right)^{1/2}\left\{J_1 + \sum_{j=1}^{\infty}(J_{2j} + J_{2j+1})\right\} \tag{1.6}$$

$$u_2(0, t) = -\left(\frac{D}{\pi}\right)^{1/2}\left\{I_1 + \sum_{j=1}^{\infty}(I_{2j} + I_{2j+1})\right\} \tag{1.7}$$

Здесь

$$J_1 = \int_{\alpha}^{t} \frac{\psi(\sigma)\,d\sigma}{\sqrt{t-\sigma}}, \qquad J_{2j} = \int_{\beta}^{\gamma} \frac{\varphi(\sigma)\,d\sigma}{\sqrt{t+jT-\sigma}}, \qquad J_{2j+1} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\psi(\sigma)\,d\sigma}{\sqrt{t+jT-\sigma}} \tag{1.8}$$

$$I_1 = \int_{\beta}^{t} \frac{\varphi(\sigma)\,d\sigma}{\sqrt{t-\sigma}}, \qquad I_{2j} = \int_{\gamma}^{\beta+T} \frac{\psi(\sigma)\,d\sigma}{\sqrt{t+jT-\sigma}}, \qquad I_{2j+1} = \int_{\beta}^{\gamma} \frac{\varphi(\sigma)\,d\sigma}{\sqrt{t+jT-\sigma}} \tag{1.9}$$

Формулы (1.6) и (1.9) получены после некоторых преобразований из формул (2.3)—(2.5) статьи [1].

Ясно, что если в формулах (1.8) заменить α на β, β на γ, γ на $\beta+T$, $\psi(\sigma)$ на $\varphi(\sigma)$ и $\varphi(\sigma)$ на $\psi(\sigma)$, то соотношение (1.6) перейдет в (1.7). Таким образом, численный расчет как функции $u_1(0, t)$, так и функции $u_2(0, t)$ можно вести по одной и той же программе, достаточно изменить вводные данные. В связи с этим будем в дальнейшем рассматривать только способ численного нахождения решения (1.6), где использованы обозначения (1.8). Технические трудности возникают только при нахождении решения (1.6), так как после определения $u_1(0, t)$ характеристика $P_1(\vartheta)$ легко рассчитывается по формулам (1.5). Этих трудностей две.

Во-первых, если функции $\psi(t)$ и $\varphi(t)$, входящие в выражения (1.8), имеют сколько-нибудь сложный вид, то при вычислении интегралов (1.8) нужно пользоваться формулами приближенного интегрирования; непосредственное вычисление этих интегралов часто представляет собой трудоемкий процесс, требующий очень много машинного времени.

Во-вторых, ряд (1.6), где введены обозначения (1.8), сходится очень медленно: это знакопеременный ряд, каждый член его имеет порядок $j^{-1/2}$, и время расчета по формуле (1.6) было бы слишком велико.

Чтобы избежать этих трудностей, преобразуем интегралы (1.8) к новому виду, кроме того, будем их вычислять при больших значениях j, пользуясь асимптотическими формулами.

2. Покажем, как провести расчет для случая, когда функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определены зависимостями

$$\varphi(t) = a + b(\gamma - t)^s + g(t-\beta)^{1/2}$$

$$\psi(t) = e + d(\beta - t)^q + f(t-\alpha)^{1/2} \tag{2.1}$$

$$(a > 0,\ b > 0,\ g < 0,\ 1/2 < s < 1,\ e < 0,\ d < 0,\ f > 0,\ 1/2 < q < 1)$$

Здесь эти константы таковы, что должны выполняться соотношения (4.2)—(4.4) и (2.15)—(2.16) статьи [1].

Положим

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t), \qquad \psi(t) = \psi_1(t) + \psi_2(t) \tag{2.2}$$

Здесь

$$\varphi_1(t) = a + g(t-\beta)^{1/2}, \qquad \psi_1(t) = e + f(t-\alpha)^{1/2} \tag{2.3}$$

$$\varphi_2(t) = b(\gamma - t)^s, \qquad \psi_2(t) = d(\beta - t)^q \tag{2.4}$$

Подставляя (2.2) в (1.8), видим, что с учетом обозначений (2.1) и (2.4) каждый из интегралов (1.8) разобьется на две части

$$J_1 = J_{1,1} + J_{1,2}, \qquad J_{2j} = J_{2j,1} + J_{2j,2}, \qquad J_{2j+1} = J_{2j+1,1} + J_{2j+1,2} \tag{2.5}$$

$$J_{1,i} = \int\limits_{\alpha}^{t} \frac{\psi_i(\sigma)\,d\sigma}{\sqrt{t-\sigma}}\,; \qquad J_{2j,i} = \int\limits_{\beta}^{\gamma} \frac{\varphi_i(\sigma)\,d\sigma}{\sqrt{t+jT-\sigma}}\,, \qquad J_{2j+1,i} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{\psi_i(\sigma)\,d\sigma}{\sqrt{t+jT-\sigma}}$$

$$(i = 1, 2) \tag{2.6}$$

Из формул (2.3) ясно, что интегралы (2.6), где $i = 1$, берутся в элементарных функциях.

Займемся теперь интегралами (2.6), где $i = 2$.

Рассмотрим сперва выражение $J_{1,2}$. Легко видеть, что

$$J_{1,2}(\alpha) = 0, \qquad J_{1,2}(\beta) = \frac{d\,(\beta-\alpha)^{q+1/2}}{q+1/2} \tag{2.7}$$

Пусть теперь $\alpha < t < \beta$. В этом случае интеграл $J_{1,2}$ не берется в элементарных функциях; он несобственный, но сходящийся, подынтегральная функция обращается в бесконечность при $\sigma = t$.

Интегрируя по частям, найдем

$$J_{1,2} = 2d\left\{(\beta-\alpha)^q \sqrt{t-\alpha} - q\int\limits_{\alpha}^{t} (\beta-\sigma)^{q-1}\sqrt{t-\sigma}\,d\sigma\right\} \tag{2.8}$$

Рассмотрим входящий в (2.8) интеграл

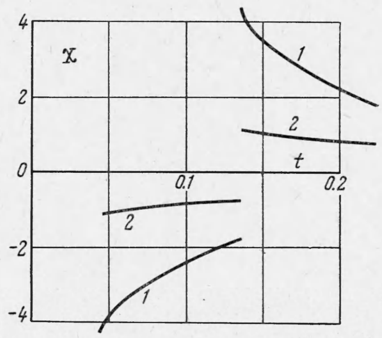
$$J = \int\limits_{\alpha}^{t} (\beta-\sigma)^{q-1}\sqrt{t-\sigma}\,d\sigma \tag{2.9}$$

При $\sigma = t$ производная подынтегральной функции обращается в бесконечность.

Способ приближенного вычисления интегралов подобного рода дан в работе [5]. Пусть $\delta > -1$ и не есть целое положительное число. Введем обозначение

$$I = \int\limits_{a}^{b} f(\sigma)\,d\sigma$$

$$(f(\sigma) = (\sigma_1 - \sigma)^{\delta}\,\varkappa(\sigma)) \tag{2.10}$$



Фиг. 1

Разобьем функцию $f(\sigma)$ согласно [5] на две части

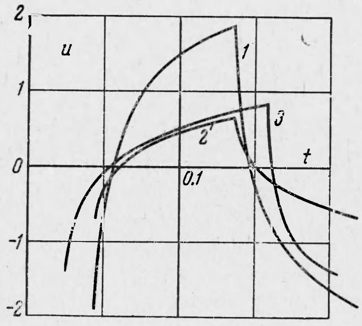
$$f(\sigma) = f_1(\sigma) + f_2(\sigma) \qquad \left(f_i(\sigma) = (\sigma_1 - \sigma)^{\delta}\varkappa_i(\sigma), \quad i = 1, 2\right) \tag{2.11}$$

таких, что функция $f_1(\sigma)$ содержит все особенности функции $f(\sigma)$, но интегрируется в конечном виде, функция же $f_2(\sigma)$ особенностей не имеет, и интеграл от нее может быть найден с помощью одной из формул численного интегрирования (например, формулы Симпсона). Погрешность ε формулы Симпсона определяется модулем четвертой производной подынтегральной функции

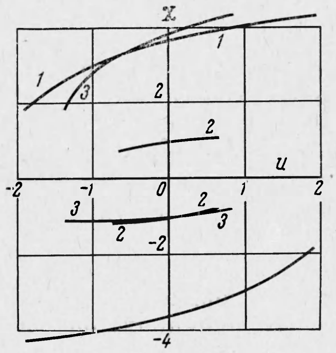
$$\varepsilon \leqslant \left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \frac{M_4}{90m^4}, \qquad M_4 = \max|f^{\mathrm{IV}}(\sigma)| \quad (a \leqslant \sigma \leqslant b) \tag{2.12}$$

Здесь $2m$ — число частей, на которые разбивается промежуток интегрирования $a \leqslant \sigma \leqslant b$.

Поэтому функцию $f(\sigma)$ нужно преобразовать так, чтобы четвертая производная от функции $f_2(\sigma)$ при $\sigma = \sigma_1$ была равна нулю.



Фиг. 2



Фиг. 3

Сравнивая формулу (2.9) с (2.10), видим, что в рассматриваемом нами случае $\delta = {}^1/_2$, $\sigma_1 = t$. Так как $\alpha < t < \beta$, функция $\varkappa(\sigma) = (\beta - \sigma)^{q-1}$ не имеет особенностей внутри интервала (α, t).

Выделяя четыре первых члена разложения функции $\varkappa(\sigma)$ в ряд Тейлора около точки $\sigma = t$, получим

$$\varkappa_1(\sigma) = \sum_{m=0}^{3} \frac{1}{m!} \varkappa^{(m)}(t)(\sigma - t)^m, \qquad \varkappa_2(\sigma) = \varkappa(\sigma) - \varkappa_1(\sigma) \tag{2.13}$$

Используя (2.9) и (2.13), запишем выражение для функции $f_2(\sigma)$, входящей в формулу (2.11)

$$f_2(\sigma) = \sqrt{t-\sigma}\left\{(\beta - \sigma)^{q-1} - \sum_{m=0}^{3} a_m(q)(\beta - t)^{q-1-m}(\sigma - t)^m\right\} \tag{2.14}$$

$$a_0(q) = 1, \qquad a_m(q) = \frac{(-1)^m}{m!}(q-m)(q-m+1)\ldots(q-1) \quad (m \neq 0)$$

Аналогичным образом преобразуются интегралы $J_{2j,2}$ и $J_{2j+1,2}$.

Выпишем теперь окончательные формулы для интегралов J_1, J_{2j} и J_{2j+1}

$$J_1 = 2e\sqrt{t-\alpha} + \frac{\pi}{2} f(t-\alpha) + 2d\left\{(\beta-\alpha)^q\sqrt{t-\alpha} - \right.$$

$$- 2q(\beta - t)^{q-1}(t-\alpha)^{3/2}\left[\frac{1}{3} + \sum_{m=1}^{3} \frac{(q-m)(q-m+1)\ldots(q-1)}{m!\,(2m+3)}\left(\frac{t-\alpha}{\beta-t}\right)^m\right] -$$

$$\left. - q\int_{\alpha}^{t} f_2(\sigma)\,d\sigma\right\} \qquad (\alpha < t < \beta) \tag{2.15}$$

$$J_1(\alpha) = 0, \qquad J_1(\beta) = 2e\sqrt{\beta-\alpha} + \frac{\pi}{2} f(\beta-\alpha) + \frac{d(\beta-\alpha)^{q+1/2}}{q + {}^1/_2}$$

Здесь $f_2(\sigma)$ дается формулой (2.14)

$$J_{2j}=2a\left[\sqrt{\tau-\beta}-\sqrt{\tau-\gamma}\right]+g\left\{-\sqrt{(\gamma-\beta)(\tau-\gamma)}+\frac{1}{2}(\tau-\beta)\left[\frac{\pi}{2}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\arcsin\left(\frac{\tau+\beta-2\gamma}{\tau-\beta}\right)\right]\right\}+b\left\{\frac{(\gamma-\beta)^{s+1}}{s+1}\frac{1}{\sqrt{\tau-\gamma}}+\right.$$
$$\left.+\sum_{m=2}^{4}\frac{(-1)^{m+1}(\gamma-\beta)^{s+m}(2m-3)(2m-5)\ldots 1}{2^{m-1}(m-1)!\,(s+m)\,(\tau-\gamma)^{m-1/2}}+\int_\beta^\gamma f_2^{(2j)}(\sigma)\,d\sigma\right\}\qquad(2.16)$$
$$(\tau=t+jT,\ \tau\neq\alpha+T)$$

$$J_2(\alpha)=2a\sqrt{\gamma-\beta}+\frac{\pi}{2}g(\gamma-\beta)+\frac{b(\gamma-\beta)^{s+1/2}}{s+1/2}$$

$$f_2^{(2j)}(\sigma)=b(\gamma-\sigma)^s\left\{\frac{1}{\sqrt{\tau-\sigma}}-\frac{1}{\sqrt{\tau-\gamma}}-\sum_{m=1}^{3}\frac{(2m-1)(2m-3)\ldots 1\,(\sigma-\gamma)^m}{m!\,2^m(\tau-\gamma)^{m+1/2}}\right\}$$

Выражения для интеграла $J_{2j+1,2}$ и функции $f_2^{(2j+1)}(\sigma)$ получаются из первой и третьей формул (2.16), если в них заменить a на e, g на f, s на q, b на d, β на α и γ на β.

3. При больших значениях j воспользуемся асимптотическими разложениями интегралов J_{2j} и J_{2j+1}, определяемых согласно (1.8).

Вводя обозначение

$$x^2=(jT)^{-1}\qquad(3.1)$$

и разлагая функцию $[1+x^2(t-\sigma)]^{1/2}$ в ряд Маклорена около значения $x=0$ с остаточным членом, получим из (1.8)

$$J_{2j}=\sum_{n=0}^{l}\frac{(-1)^n 1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n+1}\int_\beta^\gamma\varphi(\sigma)(t-\sigma)^n d\sigma+$$
$$+(-1)^{l+1}\frac{1\cdot 3\ldots(2l+1)}{2^{l+1}(l+1)!}x^{2l+3}\int_\beta^\gamma\frac{\varphi(\sigma)(t-\sigma)^{l+1}d\sigma}{[1+\theta(t-\sigma)x^2]^{l+3/2}}\quad(0<\theta<1)\qquad(3.2)$$

Здесь l — некоторое целое число. Формулу, аналогичную (3.2), можно написать и для интеграла J_{2j+1}, определяемого третьим из соотношений (1.8). Складывая J_{2j} и J_{2j+1}, вычисляя интегралы

$$\int_\beta^\gamma\varphi(\sigma)(t-\sigma)^n d\sigma,\qquad \int_\alpha^\beta\psi(\sigma)(t-\sigma)^n d\sigma\qquad(1\leqslant n\leqslant l)\qquad(3.3)$$

учитывая, что, как показано в статье [1],

$$\int_\alpha^\beta\psi(\sigma)\,d\sigma+\int_\beta^\gamma\varphi(\sigma)\,d\sigma=0\qquad(3.4)$$

и возвращаясь к прежнему обозначению (3.1), находим из (3.2) и аналогичной формулы для J_{2j+1} следующее выражение:

$$J_{2j}+J_{2j+1}=\sum_{n=1}^{l}f_{1/2(2n+1)}(jT)^{-(2n+1)/2}+R_{2j}+R_{2j+1}\qquad(3.5)$$

Здесь

$$f_{(2n+1)/2} = \sum_{j=1}^{n} b_j \left(A_{n+3/2-j} + A^{*}_{n+3/2-j}\right) t^{j-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots l) \tag{3.6}$$

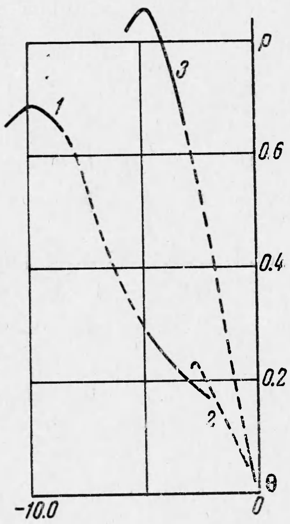
$$b_1 = 1$$

$$b_j = \frac{(-1)^{j+1}}{2^{j-1}(j-1)!}(2n+3-2j)(2n+3-2j+2)(2n+3-2j+4)\ldots(2n-1)$$

$$(j \neq 1)$$

Величина $A_{1/2(2m+1)}$ задается формулой

$$A_{1/2(2m+1)} = \frac{1\cdot 3\ldots(2m-1)}{2^m}\sum_{j=0}^{m}\frac{(-1)^j}{(m-j)!}\left[\gamma^{m-j}\Phi_{j+1}(\gamma) - \beta^{m-j}\Phi_{j+1}(\beta)\right] \tag{3.7}$$



Фиг. 4

Функции $\Phi_i(\tau)$, определенные на интервале $\beta \leqslant \tau \leqslant \gamma$, даны зависимостями

$$\Phi_i(\tau) = \frac{a\tau^i}{i!} + \frac{(-1)^i b}{(s+1)(s+2)\ldots(s+i)}(\gamma-\tau)^{s+i} + \frac{2^i g}{3\cdot 5\ldots(1+2i)}(\tau-\beta)^{1/2+i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 7) \tag{3.8}$$

Величина $A^{*}_{1/2(2m+1)}$ определяется формулой, которая получится, если в выражении (3.7) заменить γ на β, β на α, а функции $\Phi_i(\tau)$ — соответственно функциями $\Phi_i^*(\tau)$, в которые перейдут выражения (3.8), если в них заменить a на e, b на d, s на q, g на f, γ на β и β на α.

В формуле (3.5) $R_{2j} + R_{2j+1}$ — остаточный член, для которого получаем следующую оценку:

$$|R_{2j} + R_{2j+1}| \leqslant \lambda(l)\,(jT)^{-l-3/2} \tag{3.9}$$

Здесь

$$\lambda(l) = \frac{1\cdot 3\ldots(2l+1)}{2^{l+1}(l+2)!}\left\{\varphi(\beta)\left[(\gamma-\alpha)^{l+2} - (\beta-\alpha)^{l+2}\right] - \psi(\alpha)(\beta-\alpha)^{l+2}\right\} \tag{3.10}$$

Запишем теперь формулу (1.6) в виде

$$u_1(0, t) = -\sqrt{\frac{D}{\pi}}\left\{J_1 + \sum_{j=1}^{j_0-1}(J_{2j} + J_{2j+1}) + S_{j_0} + R_{j_0}\right\} \tag{3.11}$$

$$S_{j_0} = \sum_{j=j_0}^{\infty}\sum_{n=1}^{l} f_{n+1/2}\,(jT)^{-n-1/2}, \qquad R_{j_0} = \sum_{j=j_0}^{\infty}(R_{2j} + R_{2j+1}) \tag{3.12}$$

Здесь j_0 — некоторое целое число, которое определяется ниже.

Введя в рассмотрение дзета-функцию Римана [6], легко вычислить функцию S_{j_0}, даваемую выражением (3.12), и выбрать число j_0 так, чтобы при заданных ε и l остаточный член R_{j_0} не превосходил ε.

$$|R_{j_0}| \leqslant \frac{\lambda(l)}{T^{l+3/2}(1-2^{-l-1/2})}\,\frac{1}{\left[2E\left(\frac{j_0}{2}\right)\right]^{l+1/2}} \leqslant \varepsilon \tag{3.13}$$

Здесь $E(x)$ — целая часть числа x.

В работе [7] приведены результаты расчета изложенным здесь методом зависимости $u(0, t)$ для случая прямоугольных колебаний, когда $b = g = d = f \equiv 0$. Параметр p принимает при этом значения: 0.125, 0.25, 0.375, 0.5, 0.625, 0.75, 0.875.

На фиг. 1—4 представлены графики функций $\chi(t)$, $u(0, t)$, $\chi(u)$ и $p(\theta)$, где $p = P / Gl$, $\theta = (\vartheta - v) / Glr$. Зависимость $\chi(t)$ рассчитана по формуле (2.1), $u(0, t)$ — по формуле (3.11), $p(\theta)$ — по формуле (1.5). При этом кривой *1* соответствуют следующие значения констант, входящих в решение: $p = 0.5$, $a = -e = 3.87000$, $b = -d = 4.69923$, $g = -f = -6.89511$, $s = q = 0.93477$, $A = 6.555$, $c_0 = 14.884$; кривой *2*: $p = 0.5$, $a = -e = 0.96333$, $b = -d = 1.56644$, $g = -f = -0.67403$, $s = q = 0.93477$, $A = 1.695$, $c_0 = 11.654$; кривой *3*: $p = 0.25$, $a = 3.87000$, $b = 8.98298$, $g = -9.75116$, $e = -0.96333$, $d = -1.07228$, $f = 0.55034$, $s = q = 0.93477$, $A = 1.2$, $c_0 = 6$. Нижняя кривая на фиг. 3 соответствует кривой *1*. На фиг. 4 пунктиром проведены те отрезки характеристики $p(\theta)$, которые отвечают не автоколебательному циклу, а окрестности неустойчивого стационарного состояния и, следовательно, не могут быть рассчитаны предложенным здесь методом. Во всех рассмотренных случаях положено $T = 0.182$ *сек*, $D = 10^{-5}$ *см*^{2} / *сек*. Размерности параметров, входящих в решение, следующие:

$$[u] = [c_0] = 10^{-6}\ a / см,\ [\chi] = [A] = [a] = [e] = 10^{-3}\ a / см^2,$$

$$[b] = 10^{-3}\ a / см^2 сек^s,\ [d] = 10^{-3}\ a / см^2\ сек^q,\ [g] = [f] = 10^{-3}\ a / см^2\ сек^{1/2}$$

величины s и q безразмерные.

Результаты расчетов с использованием этих констант согласуются с экспериментальными данными [3], причем удалось вычислить максимальные значения характеристики $p(\theta)$, что невозможно сделать опытным путем.

Программа расчета составлена и вычисления проведены С. В. Дергачевой.

Поступила I VII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочина Н. Н. Об одном решении нелинейного уравнения диффузии. ПММ, 1961, т. 28, вып. 4.
2. Гохштейн А. Я. К теории автоколебаний в свободных от пассивации электрохимических системах с падающей характеристикой. Докл. АН СССР, 1961, т. 140, № 5.
3. Гохштейн А. Я. О частоте автоколебаний в электролитических системах. Докл. АН СССР, 1963, т. 148, № 1.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. Гостехиздат, 1953.
5. Канторович Л. В. О приближенном вычислении некоторых определенных интегралов и других применениях метода выделения особенностей. Матем. сб., 1934, т. 41, № 2.
6. Титчмарш Е. К. Дзета-функция Римана. Изд-во иностр. литер., 1947.
7. Кочина Н. Н. О периодических режимах некоторых распределенных систем. Докл. АН СССР, 1965, т. 165, № 5.