$\mathcal{AMS}$ subject classification: 74S05, 78M10, 80M10

Метод конечных элементов для задачи Стокса–Дарси с новым граничным условием

О. Ел Моутеа[1], Х. Ел Амри[1], А. Ел Аккад[2]

[1]Ecole Normale Supérieure Casablanca, Faculté des Sciences Aïn Chock Université Hassan II, Route d'El Jadida, km. 9, Ghandi-Casablanca, 50069, Morocco

[2]Centre Régional des Métiers d'Education et de Formation de Fès Meknès, Rue de Koweit, 49, Fés, 30050, Morocco

E-mails: mouteaomar@gmail.com (Ел Моутеа О.), elakkadabdeslam@yahoo.fr (Ел Аккад А.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале "Numerical Analysis and Applications" № 2, Vol. 13, 2020.

Ел Моутеа О., Ел Амри Х., Ел Аккад А. Метод конечных элементов для задачи Стокса–Дарси с новым граничным условием // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2020. — Т. 23, № 2. — С. 165–181.

В данной статье рассматриваются численные методы приближения и моделирования задачи Стокса–Дарси с новым граничным условием. Мы исследуем надежный стабилизированный полностью смешанный метод дискретизации. Метод обеспечивает устойчивость схемы конечных элементов и не использует множители Лагранжа для введения члена стабилизации во временную дискретизацию задачи Стокса–Дарси. Также получена корректная схема конечных элементов и выполнен анализ ее сходимости. Эффективность и точность этих численных методов иллюстрируется с использованием различных численных тестов.

DOI: 10.15372/SJNM20200205

Ключевые слова: *задача Стокса–Дарси, смешанный метод конечных элементов, свободный поток, поток пористой среды, стабилизированная схема.*

El Moutea O., El Amri H., El Akkad A. Finite element method for the Stokes–Darcy problem with a new boundary condition // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2020. — Vol. 23, № 2. — P. 165–181.

This paper considers numerical methods for approaching and simulate the Stokes–Darcy problem, with a new boundary condition. We study herein a robust stabilized fully mixed discretization technique, this method ensures the stability of the finite element scheme and does not use any Lagrange multipliers to introduce a stabilization term in the temporal Stokes–Darcy problem discretization. The well-posedness of the finite element scheme and its convergence analysis are also derived. Finally, the efficiency and accuracy of the numerical methods are illustrated by different numerical tests.

Keywords: *Stokes–Darcy problem, mixed finite element method, free flow, porous media flow, stabilized scheme.*

1. Введение

В этой статье мы исследуем поток жидкости в различных областях и физических ситуациях, например сцепление между подземными и поверхностными потоками, что является сцеплением как поверхностных, так и подповерхностных потоков. Математическое уравнение, описывающее эту модель, — это уравнение Стокса–Дарси. Это соотношение обеспечивается линейными уравнениями Стокса–Дарси, имеющими контактную границу раздела. Чтобы ознакомиться с условиями на границе раздела Биверса и Джозефа в модели Стокса–Дарси, которые стали одной из важнейших тем для исследований, смотри [9–11]. Данное условие на границе раздела было изменено Саффманом в [7, 40]. Эта модель используется в гидрологии, в частности для исследования потока подземных вод, в нефтяной инженерии для моделирования пластов. Она также используется для описания многих природных и промышленных явлений, например таких как биомедицина и производственные процессы [1, 7].

Уравнения Стокса и Дарси различаются вследствие своих приближений, которые необходимо рассмотреть. Поэтому для численного моделирования было предпринято много усилий и использовалось множество методов (см. [2, 3, 7, 33, 35, 44, 45]). В последние десятилетия исследованию этой проблемы (в частности течению в пористых средах) уделялось много внимания. В данном случае имеется несколько способов определить оценки ошибок этих уравнений Стокса путем использования уравнения для невязки (см. статьи Эйнзуэрта, Одена [2] и Элаккада, Эльхальфи, Гессуса [24]). Для решения уравнений, управляющих устойчивым течением вязкой несжимаемой жидкости, уравнений Стокса и Навье–Стокса смотри работы Гиа, Бадеа, Дискаккиати, Квартерони [7], Гиа, Шина [28] и Гиролта, Ривьера [29], в которых заложены основы аппроксимации сцепленных уравнений Навье–Стокса. В статье [17] Као, Гунцбергер, Хе и Ванг исследовали методы декомпозиции стационарной системы Стокса–Дарси. Локально консервативный численный метод использовался для исследования сцепленных свободных и пористых текучих сред Ду, Зуо и Ривьера с соавторами в статье [23], где разрывный метод конечных элементов Галеркина использовался для области Стокса и смешанный метод конечных элементов — для области Дарси. Исследование с различными полостями в микроскопическом масштабе с использованием уравнений моделей Стокса с использованием метода конечных элементов было выполнено Арбогастом с соавторами в [3], а в [35] изучались расцепленные схемы для нестационарной модели. Унифицированный стабилизированный метод изучался Берманом с соавторами [14]. Пирсон, Пестана, Сильвестер в [37] использовали усовершенствованный метод предобусловливания с седловой точкой. Камано, Гатика, Оярзуа, Руи-Байер и Венегас [16] использовали новые полностью смешанные методы конечных элементов для сцепленных уравнений Стокса–Дарси. Другие работы о смешанной формулировке смотри в [12, 16].

Остальная часть статьи организована следующим образом. В следующем пункте мы дадим краткое описание модели потока жидкости Стокса–Дарси с условиями на границе раздела Биверса–Джозефа. В п. 3 мы приведем некоторые обозначения и вариационную формулировку нашей задачи. Численная схема для модели представлена в п. 4. Стабилизированный метод конечных элементов и его устойчивость будут обсуждаться в п. 5. Доказательство нашего основного результата — оценки погрешности сцепленных схем — и анализ схемы конечных элементов даны в п. 6. Наконец, в п. 7 представлены численные тесты в двух измерениях, чтобы продемонстрировать точность этих численных методов.

2. Модельная задача

Для нас представляет интерес модель, связывающая подземные и поверхностные потоки с помощью уравнений Стокса и Дарси. С помощью этих уравнений мы можем моделировать различные области и физические ситуации, а также решать реальные задачи. Эти модели представляют собой уравнения в частных производных, сцепленные на границе раздела.

Пусть Ω_f и Ω_p — две ограниченные области $\mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$, лежащие по обе стороны границы раздела Γ, где $\Omega_f \cap \Omega_p = \emptyset$, $\bar{\Omega}_f \cap \bar{\Omega}_p = \Gamma$ и $\bar{\Omega}_f \cup \bar{\Omega}_p = \Omega$. Отметим, что n_f и n_p — единичные векторы внешних нормалей на $\partial\Omega_f$ и $\partial\Omega_P$ соответственно, $(\tau_i)_{i=1,\dots,d-1}$ — единичные касательные векторы к Γ, $\Gamma_f = \partial\Omega_f \backslash \Gamma$ и $\Gamma_p = \partial\Omega_p \backslash \Gamma$ (см. рисунок 1). Для решения вышеупомянутой проблемы пусть $n_p = -n_f$. Поясним некоторые обозначения, вводимые в данном пункте, которые будут использоваться в оставшейся части этой статьи. Напомним, что ∇ и $\nabla\cdot$ — это оператор градиента и оператор дивергенции соответственно.

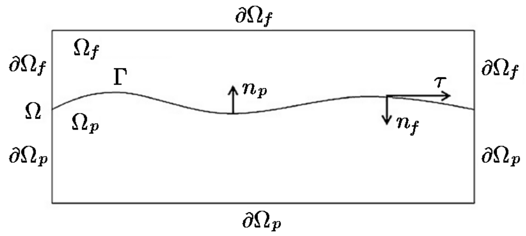

Рис. 1. Область задачи Ω, состоящая из области жидкости Ω_f и области пористой среды Ω_p, разделяемых границей Γ

2.1. Уравнение Стокса

Пусть $u_f(x)$ — скорость жидкости, $p(x)$ — давление, а μ — положительная постоянная вязкости. Рассмотрим следующую модель Стокса:

$$\begin{cases} -\nabla^2\mu\ u_f + \nabla p = f & \text{в } \Omega_f, \\ \nabla \cdot u_f = 0 & \text{в } \Omega_f \end{cases} \tag{1}$$

с новым граничным условием, определяемым следующим образом:

$$C_{\mu,\beta}: \quad \beta u_f + (\nabla \mu u_f - pI)\, n_f = g_f. \tag{2}$$

Функции $f(x) \in (L^2(\Omega))^2$, $g_f(x) \in (L^2(\Omega))^2$ и $p\,(x) \in L^2(\Omega)$, β — ненулевая ограниченная непрерывная функция, определенная на Γ_f. Назовем $C_{\mu,\beta}$ *условием Дирихле*, если $\beta \gg 1$, и *условием Неймана*, если $\beta \ll 1$.

2.2. Уравнения Дарси

Поток пористой среды управляется следующим уравнением Дарси на Ω_p для скорости потока $u_p\,(x)$ и пьезометрического напора $h\,(x)$:

$$\begin{cases} u_p = -K\nabla h & \text{в } \Omega_p, \\ \nabla \cdot u_p = f_p & \text{в } \Omega_p \end{cases} \tag{3}$$

с граничным условием

$$u_p \cdot n_p = g_p \quad \text{на } \Gamma_p. \tag{4}$$

В данном случае $f_p(x)$, $g_p(x) \in L^2(\Omega)$ и пьезометрическая высота $h(x)$ является элементом $L^2(\Omega)$.

Обозначим: f — массовые силы в области жидкости, f_p — область источника в пористой среде, K — тензор гидравлической проводимости, μ — вязкость жидкости, α — постоянный параметр. Предположим, что все параметры материала и жидкости являются равномерно положительными и ограниченными и K — положительная симметричная матрица, тогда

$$0 \leq k_{\min}|\zeta|^2 \leq K\,\zeta\cdot\zeta \leq k_{\max}|\zeta|^2 < \infty \quad \forall\,\zeta \in \mathbb{R}^d.$$

2.3. Сцепление на границе раздела

Рассмотрим известное условие Биверса–Джозефа на границе раздела Γ (для более подробной информации см. [8, 13]):

$$\begin{cases} u_p \cdot n_p + u_f \cdot n_f = 0 & \text{на } \Gamma, \\ p - \mu n_f \; \nabla u_f \cdot n_f = \rho g h & \text{на } \Gamma, \\ -n_f \cdot \nabla u_f \cdot \tau_i = \dfrac{\alpha}{\sqrt{\tau_i \cdot K \tau_i}} \, u_f \cdot \tau_i & \text{на } \Gamma, \end{cases} \tag{5}$$

$1 \leq i \leq d-1$. Уравнения (5) представляют собой упрощение более оригинальных и реалистичных уравнений Биверса–Джозефа, где $u_f \cdot \tau_i$ заменяется на $(u_f - u_p) \cdot \tau_i$ (см. также [6]).

3. Обозначение и вариационная формулировка

В данном пункте мы прежде всего представим некоторые результаты по пространствам Соболева [1, 43]. Пусть $\| \cdot \|$ — это обычная L^2-норма для функций, определенных на Ω_f или Ω_p, задаваемая так:

$$\begin{aligned} \|p\| &= \left(\int_{\Omega_f} |p|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall \, p \in L^2(\Omega_f), \\ \|v_f\| &= \left(\sum_{i=1}^{d} \int_{\Omega_f} \left| v_f^i \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall \, v_f \in \left(L^2\left(\Omega_f\right) \right)^d, \\ \|\nabla v_f\| &= \left(\sum_{i=1}^{d} \int_{\Omega_f} \left| \nabla v_f^i \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall \, v_f \in \left(L^2\left(\Omega_f\right) \right)^d, \end{aligned} \tag{6}$$

а $(\cdot, \cdot)$ — соответствующее скалярное произведение на границе раздела Γ, определяемое как

$$(p, q) = \int_{\Gamma} p \cdot q \, d\Gamma. \tag{7}$$

Пусть H_{div} — пространство векторных полей $H(\Omega_p)$ с компонентами в $(L^2(\Omega_p))^d$:

$$H_{\mathrm{div}} = H(\mathrm{div}, \Omega_p) = \left\{ v_p \in \left(L^2(\Omega_p) \right)^d : \nabla \cdot v_p \in \left(L^2(\Omega_p) \right)^d \right\}. \tag{8}$$

Введем (согласно [4, 13]) пространства:

$$\begin{aligned} & X_f = \left(H_0^1\left(\Omega_f\right) \right)^2, \\ & Q_f = \left\{ q \in L^2\left(\Omega_f\right), \ \int_{\Omega_f} q\left(x\right) dx = 0 \right\}, \\ & Q_p = L^2\left(\Omega_p\right), \\ & X_p = \left\{ v_p \in H_{\mathrm{div}}, \ \nabla v_p \cdot n_p = g \right\}. \end{aligned} \tag{9}$$

Пространства X_f, X_p имеют следующие нормы:

$$\begin{aligned} \|v_f\|_1 &= (\|v_f\| + \|\nabla v_f\|)^{\frac{1}{2}} \quad \forall\, v_f \in X_f, \\ \|v_p\|_{\mathrm{div}} &= (\|v_p\| + \|\nabla v_p\|)^{\frac{1}{2}} \quad \forall\, v_p \in X_p. \end{aligned} \tag{10}$$

Вариационную формулировку стационарных задач Стокса–Дарси (1)–(3) с новыми граничными условиями (2), (4) можно записать следующим образом: найти $\big(u_f, p;$ $u_p, h\big) \in (X_f, Q_f; X_p, Q_p)$, удовлетворяющие

$$\begin{cases} a_f\,(u_f, v_f) - b_f\,(v_f, p) + c_\Gamma\,(v_f, h) = L_f\,(v_f)\,, \\ b_f\,(u_f, q) = 0 \end{cases} \tag{11}$$

для всех $(v_f, q) \in X_f \times Q_f$ и

$$\begin{cases} a_p\,(u_p, v_p) - b_p\,(v_p, h) - c_\Gamma\,(v_p, h) = 0, \\ b_p\,(u_p, \psi) = \rho g\,(f_p, \psi) \end{cases} \tag{12}$$

для всех $(v_p, \psi) \in X_p \times Q_p$, где

$$\begin{aligned} &a_f\,(u_f, v_f) = a_1\,(u_f, v_f) + a_\Gamma\,(u_f, v_f)\,, \\ &a_1\,(u_f, v_f) = \mu \int_{\Omega_f} \nabla u_f \cdot \nabla v_f + \sum_{i=1}^{d-1} \frac{\alpha}{\sqrt{\tau_i \cdot K \tau_i}}\,(u_f \cdot \tau_i, v_f \cdot \tau_i)\,, \\ &a_\Gamma\,(u_f, v_f) = \int_\Gamma \beta u_f \cdot v_f, \\ &b_f\,(v_f, p) = (p, \nabla \cdot v_f)\,, \\ &c_\Gamma\,(v_f, h) = \rho g\,(h, v_f \cdot n_f)_\Gamma\,, \\ &a_p\,(u_p, v_p) = \rho g\,\big(K^{-1} u_p, v_p\big)\,, \\ &b_p\,(v_p, h) = \rho g\,(h, \nabla \cdot v_p)\,, \\ &L_f\,(v_f) = (f_f, v_f) + \int_\Gamma g_f \cdot v_f, \end{aligned}$$

в том смысле, что

$$\begin{aligned} L\,(u_f, p, u_p, h; v_f, q, v_p, \psi) = a_f\,(u_f, v_f) - b_f\,(v_f, p) + b_f\,(u_f, q) + \\ a_p\,(u_p, v_p) - b_p\,(v_p, h) + b_p\,(u_p, \psi) + c_\Gamma\,(v_f - v_p, h)\,, \end{aligned} \tag{13}$$

причем (11), (12) эквивалентны следующему:

$$\begin{cases} \text{найти } (u_f, p; u_p, h) \in \big(X_f, Q_f; X_p, Q_p\big), \text{ удовлетворяющие} \\ L\,(u_f, p, u_p, h; v_f, q, v_p, \psi) = \rho g\,(f_p, \psi) + L_f\,(v_f) \\ \forall\, (v_f, q; v_p, \psi) \in \big(X_f, Q_f; X_p, Q_p\big). \end{cases} \tag{14}$$

Легко убедиться, что (14) однозначно определено (см. [21, 45]).

Напомним также неравенства Пуанкаре, Корна и следовое неравенство, которые будут использоваться в следующем пункте: существуют постоянные C_P, C_K и C_v, зависящие только от пространств, такие что для всех $v_f \in X_f$

$$\|v_f\| \le C_P \, |v_f|_1 \,, \tag{15}$$

$$|v_f|_1 \le C_K \, \|\nabla v_f\| \,, \tag{16}$$

и для всех $v_f \in L^2(\Gamma)$

$$\|v_f\|_{L^2(\Gamma)} \le C_v \, |v_f|_1^{\frac{1}{2}} \, \|v_f\|^{\frac{1}{2}} \,. \tag{17}$$

Аналогично существуют постоянные $\tilde{C}_v$, зависящие только от Ω_p, такие что для всех $\psi \in Q_p$

$$\|\psi\|_{L^2(\Gamma)} \le \tilde{C}_v \, |\psi|_1^{\frac{1}{2}} \, \|\psi\|^{\frac{1}{2}} \,. \tag{18}$$

Здесь и далее все постоянные положительные, если не указано иное.

4. Численная схема

Рассмотрим семейство триангуляций $T_h = T_h^f \cup T_h^p$ для $\Omega = \Omega_f \cup \Omega_p$, разделенной границей Γ, где T_h^f и T_h^p — регулярные триангуляции Ω_f и Ω_p соответственно. Однородно регулярная триангуляция удовлетворяет $\overline{\Omega} = \cup_{K \in T_h} K$ и существуют положительные постоянные c_1, c_2, такие что

$$c_1 h \le h_K \le c_2 \rho_K$$

для аппроксимации диаметра h_K треугольника (тетраэдра) K и диаметра ρ_K шара, включенного в K, и где h — положительный параметр, определяемый как $h = \max_{K \in T_h} h_K$.

Из частей T_h^f и T_h^p для T_h мы определим конечно-элементные пространства $X_{fh} \subset X_f$, $Q_{fh}^h \subset Q_f$, $X_{ph} \subset X_p$ и $Q_{ph} \subset Q_p$. Также рассмотрим хорошо известные MINI-элементы (P1b–P1) для аппроксимации скорости и давления в уравнении Стокса (см. [44]). В полностью смешанном методе используются лагранжевые элементы (P1) для гидравлического (пьезометрического) напора и кусочно-постоянные конечные элементы Брецци–Дугласа–Марини (BDM1) для скорости Дарси (см. [45]). Выбираем для задачи Стокса в области течения жидкости конечно-элементные пространства (X_{fh}, Q_{fh}), удовлетворяющие inf–sup условию: существует постоянная $\beta_f > 0$ (не зависящая от h), такая что

$$\inf_{q^h \in Q_{fh},\, q^h \ne 0} \; \sup_{v_f^h \in X_{fh},\, v_f^h \ne 0} \frac{b_f\big(v_f^h, q^h\big)}{|v_f^h|_1 \, \|q^h\|} \ge \beta_f \tag{19}$$

для всех $v_f^h \in X_{fh}$ и $q^h \in Q_{fh}$.

В пористой области мы используем конечно-элементные пространства (X_{ph}, Q_{ph}), удовлетворяющие стандартному inf–sup условию: существует постоянная $\beta_p > 0$, такая что для всех $q^h \in Q_{ph}$

$$\beta_p \|q^h\| \le \sup_{v_p^h \in X_{ph},\, v_p^h \ne 0} \frac{b_p(v_p^h, q^h)}{\|v_p^h\|_{\mathrm{div}}}. \tag{20}$$

Из предположения (19) и для произвольного (но фиксированного) давления p^h в Q_{fh} мы получим функцию w_f^h в X_{fh}, такую что

$$b_f\big(w_f^h, p^h\big) \ge \tilde{C}_1 \big\|w_f^h\big\|_1 \big\|p^h\big\|, \tag{21}$$

где w_f^h нормализована в виде $\big\|w_f^h\big\|_1 = \lambda_1 \big\|p^h\big\|$. Мы имеем

$$b_f\big(w_f^h, p^h\big) \geq C_1\big\|p^h\big\|^2. \tag{22}$$

Аналогичным образом мы получим из предположения (20) и для $h^h \in Q_{ph}$, что существует $w_p^h \in X_{ph}$, такая что

$$b_p\big(w_p^h, h^h\big) \geq \tilde{C}_2\big\|w_P^h\big\|_{\mathrm{div}}\big\|h^h\big\|, \tag{23}$$

нормализуя таким образом, что $\big\|w_p^h\big\|_{\mathrm{div}} = \lambda_2 \big\|h^h\big\|$, мы имеем

$$b_p\big(w_p^h, h^h\big) \geq C_2\big\|h^h\big\|^2. \tag{24}$$

Наконец, существуют две постоянные C_{inv} и $\tilde{C}_{\mathrm{inv}}$, зависящие от минимальных углов сетки в Ω_f и Ω_p, такие что

$$\big|v_f^h\big|_1 \leq C_{\mathrm{inv}} h^{-1}\big\|v_f^h\big\| \quad \forall\, v_f^h \in X_{fh}, \tag{25}$$

$$\big|\psi^h\big|_1 \leq \tilde{C}_{\mathrm{inv}} h^{-1}\big\|\psi^h\big\| \quad \forall\, \psi^h \in Q_{ph}. \tag{26}$$

Эти неравенства в X_{fh} и Q_{ph} пригодятся в следующих пунктах.

5. Устойчивость метода

В данном пункте мы главным образом будем работать со стабилизированной конечно-элементной схемой для нашей задачи в том смысле, что

$$\begin{cases} \text{найти } \big(u_f^h, p^h; u_p^h, h^h\big) \in \big(X_{fh}, Q_{fh}; X_{ph}, Q_{ph}\big), \text{ удовлетворяющие} \\ \tilde{L}\big(u_f^h, p^h, u_p^h, h^h; v_f^h, q^h, v_p^h, \psi^h\big) = \rho g\big(f_p, \psi^h\big) + L_f\big(v_f^h\big) \\ \text{для любого } \big(v_f^h, q^h, v_p^h, \psi^h\big) \in \big(X_{fh}, Q_{fh}; X_{ph}, Q_{ph}\big), \end{cases} \tag{27}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{L}\big(u_f^h, p^h, u_p^h, h^h; v_f^h, q^h, v_p^h, \psi^h\big) = L\big(u_f^h, p^h, u_p^h, h^h; v_f^h, q^h, v_p^h, \psi^h\big) + \\ \frac{\delta}{h}\Big(\big(u_f^h - u_p^h\big)\cdot n_f, \big(v_f^h - v_p^h\big)\cdot n_f\Big)_\Gamma. \end{aligned} \tag{28}$$

Член стабилизации для задачи Стокса–Дарси имеет вид

$$\frac{\delta}{h}\Big(\big(u_f^h - u_p^h\big)\cdot n_f, \big(v_f^h - v_p^h\big)\cdot n_f\Big)_\Gamma = \frac{\delta}{h}\int_\Gamma \Big(\big(u_f^h - u_p^h\big)\cdot n_f\Big)\Big(\big(v_f^h - v_p^h\big)\cdot n_f\Big)\, d\Gamma.$$

Чтобы доказать устойчивость конечно-элементной схемы (27), определим норму

$$\big|\big\|u_f^h, p^h, u_p^h, h^h\big\|\big| = \big\|u_f^h\big\|_1 + \big\|p^h\big\| + \big\|u_p^h\big\|_{\mathrm{div}} + \big\|h^h\big\| + h^{-\frac{1}{2}}\big\|u_f^h - u_p^h\big\|_\Gamma \tag{29}$$

и докажем, что задача (28) непрерывна и коэрцитивна.

(i) Непрерывность стабилизированной конечно-элементной схемы.

Теорема 1. *Существует постоянная C, такая что*

$$\tilde{L}\big(u_f^h, p^h, u_p^h, h^h; v_f^h, q^h, v_p^h, \psi^h\big) \leq C\big(\big|\big\|u_f^h, p^h, u_p^h, h^h\big\|\big|\big)\big(\big|\big\|v_f^h, q^h, v_p^h, \psi^h\big\|\big|\big) \tag{30}$$

верно для всех $\big(v_f^h, q^h, v_p^h, \psi^h\big) \in \big(X_{fh}, Q_{fh}, X_{ph}, Q_{ph}\big)$.

Доказательство. Используя неравенство Шварца (18) и обратное неравенство (25) для $a_\Gamma\big(u_f^h, v_f^h\big)$, получим

$$a_\Gamma\big(u_f^h, v_f^h\big) \le C_1 \big\|u_f^h\big\| \, \big\|v_f^h\big\|, \tag{31}$$

где $C_1 = h^{-\frac{1}{2}} C_{\mathrm{inv}}^{\frac{1}{2}} C_v$. Это гарантирует, что

$$a_f\big(u_f^h, v_f^h\big) \le \big(1 + C_1\big) \big\|u_f^h\big\| \, \big\|v_f^h\big\|.$$

Аналогичным образом для $c_\Gamma\big(u_f^h - u_p^h, h^h\big)$ и $\dfrac{\delta}{h}\Big(\big(u_f^h - u_p^h\big) \cdot n_f, \big(v_f^h - v_p^h\big) \cdot n_f\Big)_\Gamma$ получим

$$c_\Gamma\big(u_f^h - u_p^h, h^h\big) \le C_2 h^{-\frac{1}{2}} \big\|\big(u_f^h - u_p^h\big) \cdot n_f\big\|_\Gamma \, \big\|h^h\big\|, \tag{32}$$

где $C_2 = \rho g \, \tilde{C}_{\mathrm{inv}} \tilde{C}_v$ и

$$\frac{\delta}{h}\Big(\big(u_f^h - u_p^h\big) \cdot n_f, \big(v_f^h - v_p^h\big) \cdot n_f\Big)_\Gamma \le h^{-\frac{1}{2}} \Big(\delta \big\|\big(u_f^h - u_p^h\big) \cdot n_f\big\|_\Gamma \, \big\|\big(v_f^h - v_p^h\big) \cdot n_f\big\|_\Gamma\Big). \tag{33}$$

Теперь мы можем использовать (31)–(33) в

$$\begin{aligned} \tilde{L}\big(u_f^h, p^h, u_p^h, h^h; v_f^h, q^h, v_p^h, \psi^h\big) = {} & a_f\big(u_f^h, v_f^h\big) - b_f\big(v_f^h, p^h\big) + b_f\big(u_f^h, q^h\big) + \\ & a_p\big(u_p^h, v_p^h\big) - b_p\big(v_p^h, h^h\big) + b_p\big(u_p^h, \psi^h\big) + c_\Gamma\big(v_f^h - v_p^h, h^h\big) + \\ & \frac{\delta}{h}\Big(\big(u_f^h - u_p^h\big) \cdot n_f\Big)\Big(\big(v_f^h - v_p^h\big) \cdot n_f\Big)_\Gamma \end{aligned} \tag{34}$$

для завершения доказательства непрерывности стабилизированной конечно-элементной схемы. □

(ii) Коэрцитивность стабилизированной конечно-элементной схемы.

Теорема 2. *Существует постоянная $\beta > 0$, такая что неравенство*

$$\sup_{\left(u_f^h, p^h, u_p^h, h^h\right) \in \left(X_{fh}, Q_{fh}; X_{ph}, Q_{ph}\right)} \frac{\tilde{L}\big(u_f^h, p^h, u_p^h, h^h; v_f^h, q^h, v_p^h, \psi^h\big)}{\big|\big\|v_f^h, q^h, v_p^h, \psi^h\big\|\big|} \ge \beta \big|\big\|u_f^h, p^h, u_p^h, h^h\big\|\big| \tag{35}$$

верно для всех $\big(v_f^h, q^h, v_p^h, \psi^h\big) \in \big(X_{fh}, Q_{fh}, X_{ph}, Q_{ph}\big)$.

Доказательство. Построим $\big(\hat{v}_f^h, \hat{q}^h, \hat{v}_p^h, \hat{\psi}^h\big)$, такое что

$$\tilde{L}\big(u_f^h, p^h, u_p^h, h^h; \hat{v}_f^h, \hat{q}^h, \hat{v}_p^h, \hat{\psi}^h\big) \ge C\big(\big|\big\|u_f^h, p^h, u_p^h, h^h\big\|\big|\big)\big(\big|\big\|\hat{v}_f^h, \hat{q}^h, \hat{v}_p^h, \hat{\psi}^h\big\|\big|\big). \tag{36}$$

Для ясности разделим доказательство на шаги.

Шаг 1. Зададим $\big(v_f^h, q^h, v_p^h, h^h\big) = \big(u_f^h, p^h, u_p^h, h^h + \nabla \cdot u_p^h\big)$. Тогда получим

$$\begin{aligned} \tilde{L}\big(u_f^h, p^h, u_p^h, h^h; u_f^h, p^h, u_p^h, \psi^h + \nabla \cdot u_p^h\big) = {} & \big\|u_f^h\big\|_1^2 + \big\|u_f^h\big\|_{\Gamma_f}^2 + \big\|u_p^h\big\|_{\mathrm{div}}^2 + \\ & \frac{\delta}{h}\big\|u_f^h - u_p^h\big\|_\Gamma^2 + c_\Gamma\big(u_f^h - u_p^h, h^h\big). \end{aligned} \tag{37}$$

Имеем

$$a_f\big(u_f^h, u_f^h\big) \ge \bar{C}\|u_f^h\|\|u_f^h\|,$$

$$\tilde{L}\big(u_f^h, p^h, u_p^h, h^h; u_f^h, p^h, u_p^h, \psi^h + \nabla\cdot u_p^h\big) \ge \bar{C}\|u_f^h\|_1^2 + \|u_p^h\|_{\mathrm{div}}^2 + \frac{\delta}{h}\|u_f^h - u_p^h\|_\Gamma^2 + c_\Gamma\big(u_f^h - u_p^h, h^h\big). \tag{38}$$

Легко увидеть, что

$$c_\Gamma\big(u_f^h - u_p^h, h^h\big) \ge -\frac{\big(\rho g C_v C_{\mathrm{inv}}\big)^2}{\gamma h C_2}\|\big(u_f^h - u_p^h\big)\cdot n_f\|_\Gamma^2 - \frac{\gamma C_2}{4}\|h^h\|^2,$$

где γ — действительный положительный параметр, определенный ниже.

Шаг 2. Пусть $\big(v_f^h, q^h, v_p^h, h^h\big) = \big(-\gamma W_f^h, 0, -\gamma W_p^h, 0\big)$, где W_f^h и W_p^h удовлетворяют (23) и (24) соответственно. Видно, что на основании определения $\|\big(W_f^h - W_p^h\big)\cdot n_f\|_\Gamma = \lambda_3\|(u_f^h - u_p^h)\cdot n_f\|_\Gamma$, $\|W_f^h\|_\Gamma = \lambda_3\|u_f^h\|_\Gamma$ и того факта, что верны (21)–(24), имеем

$$\tilde{L}\big(u_f^h, p^h, u_p^h, h^h; -\gamma W_f^h, 0, -\gamma W_p^h, 0\big) \ge -\frac{\gamma\lambda_1^2}{2C_1}\|u_f^h\|_1^2 - \frac{\gamma\lambda_2^2}{2}\|u_p^h\|_{\mathrm{div}}^2\|h^h\| + \frac{\gamma C_1}{2}\|p^h\|^2 + \gamma C_2\|h^h\|^2 - \frac{\gamma\delta\lambda_3}{h}\|\big(u_f^h - u_p^h\big)\cdot n_f\|_\Gamma^2 - \frac{\gamma\lambda_3^2\rho^2 g^2\hat{C}_v^2\hat{C}_{\mathrm{inv}}^2}{hC_2}\|\big(u_f^h - u_p^h\big)\cdot n_f\|_\Gamma^2,$$

где δ — действительный параметр, определяемый на следующем шаге.

Используем следующие два свойства Юнга:

$$\gamma\lambda_2\|u_p^h\|_{\mathrm{div}}\|h^h\| \le \frac{\gamma\lambda_2^2}{C_2}\|u_p^h\|_{\mathrm{div}}^2 + \frac{\gamma C_2}{4}\|h^h\| \tag{39}$$

и

$$\gamma\lambda_3\rho g\hat{C}_v\hat{C}_{\mathrm{inv}}h^{-\frac{1}{2}}\|\big(u_f^h - u_p^h\big)\cdot n_f\|_\Gamma\|h^h\| \le \frac{\gamma\lambda_3^2\rho^2 g^2\hat{C}_v^2\hat{C}_{\mathrm{inv}}^2}{hC_2}\|\big(u_f^h - u_p^h\big)\cdot n_f\|_\Gamma^2 + \frac{\gamma C_2}{4}\|h^h\|^2.$$

Для $a_\Gamma\big(u_f^h, v_f^h\big)$ имеем оценку:

$$0 \le a_\Gamma\big(u_f^h, v_f^h\big) = \|u_f^h\|_\Gamma \le C_1 h^{-\frac{1}{2}}\|u_f^h\|\,\|v_f^h\|, \tag{40}$$

где $C_1 = C_{\mathrm{inv}}^{\frac{1}{2}} C_v$.

Шаг 3. Обозначим $\big(\hat{v}_f^h, \hat{q}^h, \hat{v}_p^h, \hat{h}^h\big) = \big(u_f^h - \gamma w_f^h, p^h, u_p^h - \gamma w_p^h, \psi^h + \nabla\cdot u_p^h\big)$ и $\tilde{L}^h = \tilde{L}\big(u_f^h, p^h, u_p^h, h^h; u_f^h - \gamma w_f^h, p^h, u_p^h - \gamma w_p^h, \psi^h + \nabla\cdot u_p^h\big)$. Тогда

$$\tilde{L}^h \ge \left(1 - \frac{\lambda_1^2}{2C_1} - \frac{\gamma C_v^2 C_{\mathrm{inv}}^2}{hC_2}\right)\|u_f^h\|_1^2 + \left(1 - \frac{\gamma\lambda_2^2}{2C_1}\right)\|u_p^h\|_{\mathrm{div}}^2 + \frac{\gamma C_1}{2}\|p^h\|^2 + \frac{\gamma C_2}{4}\|h^h\|^2 + \left(\delta\frac{1-\gamma\lambda_3}{h} - \frac{\rho^2 g^2\hat{C}_v^2\hat{C}_{\mathrm{inv}}^2}{\gamma hC_2} - \frac{\gamma\lambda_3^2\rho^2 g^2\hat{C}_v^2\hat{C}_{\mathrm{inv}}^2}{hC_2}\right)|||u_f^h, p^h, u_p^h, h^h|||^2. \tag{41}$$

Теперь мы можем обеспечивать выполнение условий на γ и δ, используя

$$1-\bar{C}_1-\frac{\gamma\lambda_1^2}{C_1}\geq\frac{1}{2},\qquad 1-\frac{\gamma\lambda_2^2}{C_2}\geq\frac{1}{2},\qquad 1-\gamma\lambda_3\geq\frac{1}{4},$$

$$\delta\frac{1-\gamma\lambda_3}{h}-\frac{\rho^2g^2\hat{C}_v^2\hat{C}_{\mathrm{inv}}^2}{\gamma hC_2}-\frac{\gamma\lambda_3^2\rho^2g^2\hat{C}_v^2\hat{C}_{\mathrm{inv}}^2}{hC_2}\geq\frac{\delta}{2h}.$$

Используем параметры γ и δ (γ мало, а δ — достаточно большое):

$$\begin{cases}\gamma\leq\min\left\{\left(\dfrac{C_1}{\lambda_1^2}-\dfrac{2C_vC_{\mathrm{inv}}^2C_1}{\lambda_1^2h^{1/2}}\right),\dfrac{2C_2}{\lambda_2^2},\dfrac{1}{4\lambda_3}\right\},\\ \delta\geq\dfrac{4\rho^2g^2\hat{C}_v^2\hat{C}_{\mathrm{inv}}^2}{\gamma C_2}\left(1+\gamma^2\lambda_3^2\right).\end{cases}$$

Получим

$$\begin{aligned}\tilde{L}^h\geq&\left(1-\frac{\lambda_1^2}{2C_1}-\frac{\gamma C_v^2C_{\mathrm{inv}}^2}{hC_2}\right)\|u_f\|_1^2+\left(1-\frac{\gamma\lambda_2^2}{2C_1}\right)\|u_p^h\|_{\mathrm{div}}^2+\frac{\gamma C_1}{2}\|p^h\|^2+\frac{\gamma C_2}{4}\|h^h\|^2+\\&\left(\frac{\delta}{h}-\frac{\gamma\delta\lambda_3}{h}-\frac{\rho^2g^2\hat{C}_v^2\hat{C}_{\mathrm{inv}}^2}{\gamma hC_2}-\frac{\gamma\lambda_3^2\rho^2g^2\hat{C}_v^2\hat{C}_{\mathrm{inv}}^2}{hC_2}\right)\||u_f^h,p^h,u_p^h,h^h|\|^2\\ \geq&\ C_4\||u_f^h,p^h,u_p^h,h^h|\|\,\||u_f^h-\gamma w_f^h,p^h,u_p^h-\gamma w_p^h,\psi^h+\nabla\cdot u_p^h|\|\\ =&\ C\||u_f^h,p^h,u_p^h,h^h|\|\,\||\hat{u}_f^h,\hat{p}^h,\hat{u}_p^h,\hat{\psi}^h|\|.\end{aligned}$$

Это завершает доказательство теоремы. □

6. Оценка ошибки

Теперь можем получить оценку погрешности. Эта оценка основана на непрерывности и коэрцитивности стабилизированной конечно-элементной схемы.

Теорема 3. *Пусть* (u_f,p,u_p,h) *— точное решение,* (u_f^h,p^h,u_p^h,h^h) *— стабилизированное конечно-элементное решение;* $\|u_f\|_2$, $\|p\|$, $\|u_p\|_2$, $\|h\|$ *— ограниченные нормы. Имеем*

$$\|u_f-u_f^h\|_1+\|p-p^h\|+\|u_p-u_p^h\|_{\mathrm{div}}+\|h-h^h\|\leq Ch$$

для всех $(u_f,p,u_p,h)\in(X_f,Q_f,X_p,Q_p)$ *и* $(u_{fh},p^h,u_p^h,h^h)\in(X_{fh},Q_{fh},X_{ph},Q_{ph})$.

Доказательство. Вычитая (27) из (14) и используя первое уравнение (5) границы раздела, определим уравнение ошибки следующим образом:

$$\begin{aligned}L\big(u_f,p,u_p,h\,;\,&v_f^h,q^h,v_p^h,\psi^h\big)-\tilde{L}\big(u_f^h,p^h,u_p^h,h^h;v_f^h,q^h,v_p^h,\psi^h\big)\\&=\tilde{L}\big(u_f,p,u_p,h;v_f^h,q^h,v_p^h,\psi^h\big)-\tilde{L}\big(u_f^h,p^h,u_p^h,h^h;v_f^h,q^h,v_p^h,\psi^h\big)\\&=\tilde{L}\big(u_f-u_f^h,p-p^h,u_p-u_p^h,h-h^h;v_f^h,q^h,v_p^h,\psi^h\big)=0.\end{aligned}\tag{42}$$

Используя интерполяцию $(\bar{u}_f,\bar{p},\bar{u}_p,\bar{h})$ решения (u_f,p,u_p,h) из (X_f,Q_f,X_p,Q_p) в конечно-элементные пространства $(X_{fh},Q_{fh},X_{ph},Q_{ph})$, мы можем разделить ошибки на две части:

$$u_f - u_f^h = \big(u_f - \bar{u}_f\big) + \big(\bar{u}_f - u_f^h\big) = \bar{e}_f - e_f^h, \tag{43}$$
$$p - p^h = \big(p - \bar{p}\big) - \big(\bar{p} - p^h\big) = \bar{\eta} - \eta^h, \tag{44}$$
$$u_p - u_p^h = \big(u_p - \bar{u}_p\big) + \big(\bar{u}_p - u_p^h\big) = \bar{e}_p - e_p^h, \tag{45}$$

и

$$h - h^h = \big(h - \bar{h}\big) + \big(\bar{h} - h^h\big) = \bar{\theta} - \theta^h. \tag{46}$$

Ошибки интерполяции определяются следующим образом:

$$\big\|\bar{e}_f\big\|_1 + \big\|\bar{\eta}\big\| \le Ch\big(\big\|u_f\big\|_2 + \big\|p\big\|_1\big), \tag{47}$$
$$\big\|\bar{e}_p\big\|_{\mathrm{div}} + \big\|\bar{\theta}\big\| \le Ch\big(\big\|u_p\big\|_2 + \big\|h\big\|_1\big). \tag{48}$$

Мы видим, что

$$\tilde{L}\big(e_f^h, \eta^h, e_p^h, \theta^h; v_f^h, q^h, v_p^h, \psi^h\big) = -\tilde{L}\big(\bar{e}_f, \bar{\eta}, \bar{e}_p, \bar{\theta}; v_f^h, q^h, v_p^h, \psi^h\big). \tag{49}$$

Из условия непрерывности теоремы 1, коэрцитивности $\tilde{L}$ в теореме 2 и следового и обратного неравенств имеем

$$\begin{aligned}
\beta\big\|e_f^h, \eta^h, e_p^h, \theta^h\big\| &\le \sup_{v_f^h, q^h, v_p^h, \psi^h} \frac{\tilde{L}\big(e_f^h, \eta^h, e_p^h, \theta^h; v_f^h, q^h, v_p^h, \psi^h\big)}{\big|\big\|v_f^h, q^h, v_p^h, \psi^h\big\|\big|} \\
&= \sup_{v_f^h, q^h, v_p^h, \psi^h} \frac{-\tilde{L}\big(\bar{e}_f, \bar{\eta}, \bar{e}_p, \bar{\theta}; v_f^h, q^h, v_p^h, \psi^h\big)}{\big|\big\|v_f^h, q^h, v_p^h, \psi^h\big\|\big|} \\
&\le C\big|\big\|\bar{e}_f, \bar{\eta}, \bar{e}_p, \bar{\theta}\big\|\big| \\
&\le C\big(\big\|\bar{e}_f\big\|_1 + \big\|\bar{\eta}\big\| + \big\|\bar{e}_p\big\|_{\mathrm{div}} + \big\|\bar{\theta}\big\| + h^{-\frac{1}{2}}\big\|\bar{e}_f - \bar{e}_p\big\|_\Gamma\big) \\
&\le C\big(\big\|\bar{e}_f\big\|_1 + \big\|\bar{\eta}\big\| + \big\|\bar{e}_p\big\|_{\mathrm{div}} + \big\|\bar{\theta}\big\| + h^{-1}\big\|\bar{e}_f - \bar{e}_p\big\|_\Gamma\big) \\
&\le Ch\big(\big\|u_f\big\|_2 + \big\|p\big\|_1 + \big\|u_p\big\|_2 + \big\|h\big\|_1\big).
\end{aligned} \tag{50}$$

И, наконец, из ошибки интерполяции мы получим оценку (42). □

7. Численные эксперименты

В данном пункте мы представим результаты численного эксперимента, основанного на смешанном методе конечных элементов, рассмотренном в этой статье, с использованием симулятора Comsol Multiphysics. Этот симулятор использует много решателей. В численном тесте мы используем решатель MUMPS для иллюстрации точности и эффективности метода. Рассмотрим глобальную область $\Omega = \big[0, 1\big] \times \big[-0.45, 0.15\big]$ численных вычислений для сцепленной системы, где область течения жидкости $\Omega_1 = \big[0, 1\big] \times \big[-0.45, 0\big]$ и область пористой среды $\Omega_2 = \big[0, 1\big] \times \big[0, 0.15\big]$. Поверхность раздела вычислительной области $\Gamma = \big[0, 1\big] \times \big\{0\big\}$.

Возьмем для численного теста физические параметры, приведенные в таблице 1, и граничные условия для уравнения Стокса, определяемые следующим образом:

$$C_{\mu,\beta} : \big(\nabla \mu u_f - pI\big) n_f = 0.$$

Источники инжекции $\rho u_p \cdot n_p = 1000\,\text{кг/с}$ помещен в средний левый угол резервуара, а $\rho u_p \cdot n_p = 0\,\text{кг/с}$ — у выхода в верхнем правом углу области Ω. Краевая задача Дарси определяется следующим образом:

$$u_p \cdot n_p = 0.$$

Таблица 1. Физические параметры управляющих уравнений

Параметр	Значение	Размерность
массовая плотность	1000	кг/м^3
динамическая вязкость	1	Па · с
проницаемость	0.5	м^2
пористость	0.1	1

Скорость и давление для этой задачи вычисляются с использованием нормальной сетки (рис. 2). Мы сравнили его с численным тестом с очень мелкой сеткой.

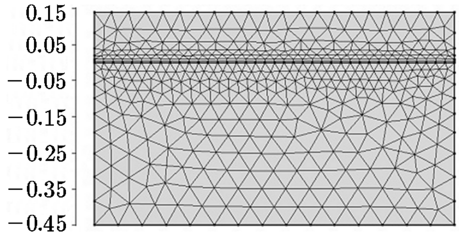

Рис. 2. Нормальная сетка области Ω

Рисунок 3 иллюстрирует скорость для нашего примера с нормальной сеткой и очень мелкой сеткой.

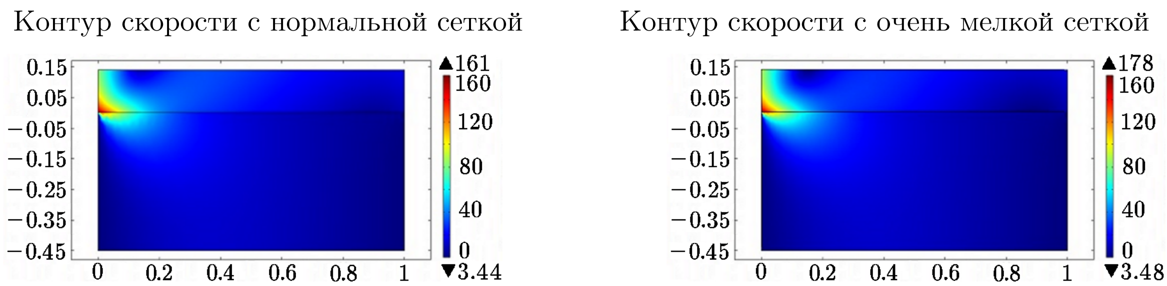

Рис. 3. Контур скорости с использованием смешанного метода конечных элементов

На рис. 4 показаны контуры давления в области потока жидкости с нормальной сеткой и очень мелкой сеткой. На рис. 5 показаны контуры давления в пористой среде с нормальной сеткой и очень мелкой сеткой.

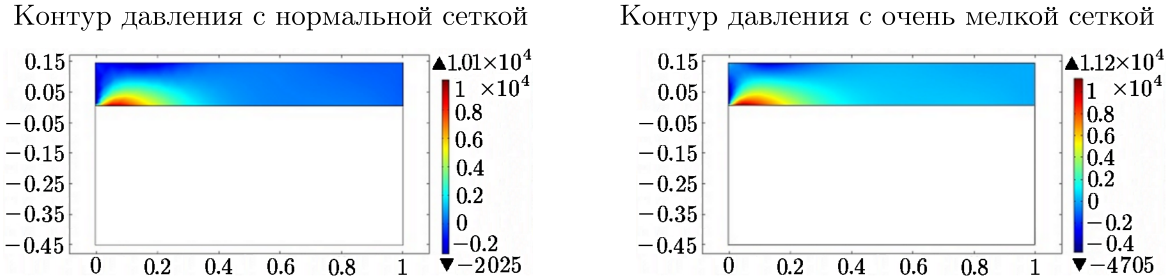

Рис. 4. Контур давления в Ω_1 с использованием смешанного метода конечных элементов

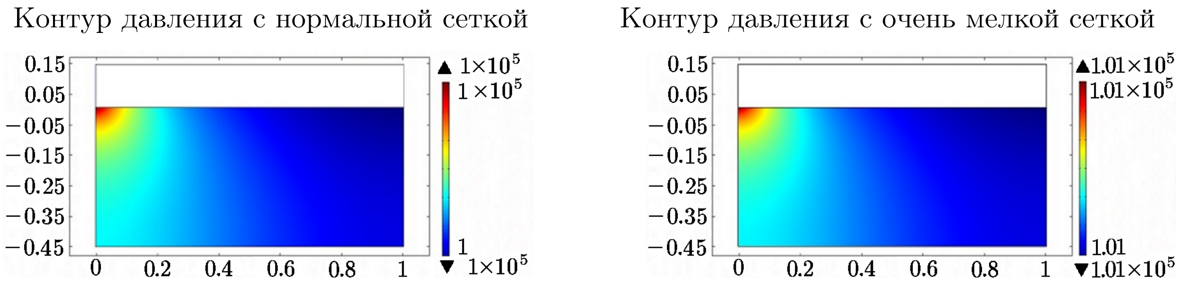

Рис. 5. Контур давления в Ω_2 с использованием смешанного метода конечных элементов

Чтобы изучить влияние сетки на погрешность и сходимость конечно-элементной схемы, мы выполним несколько численных тестов с различным размером сетки (рис. 6).

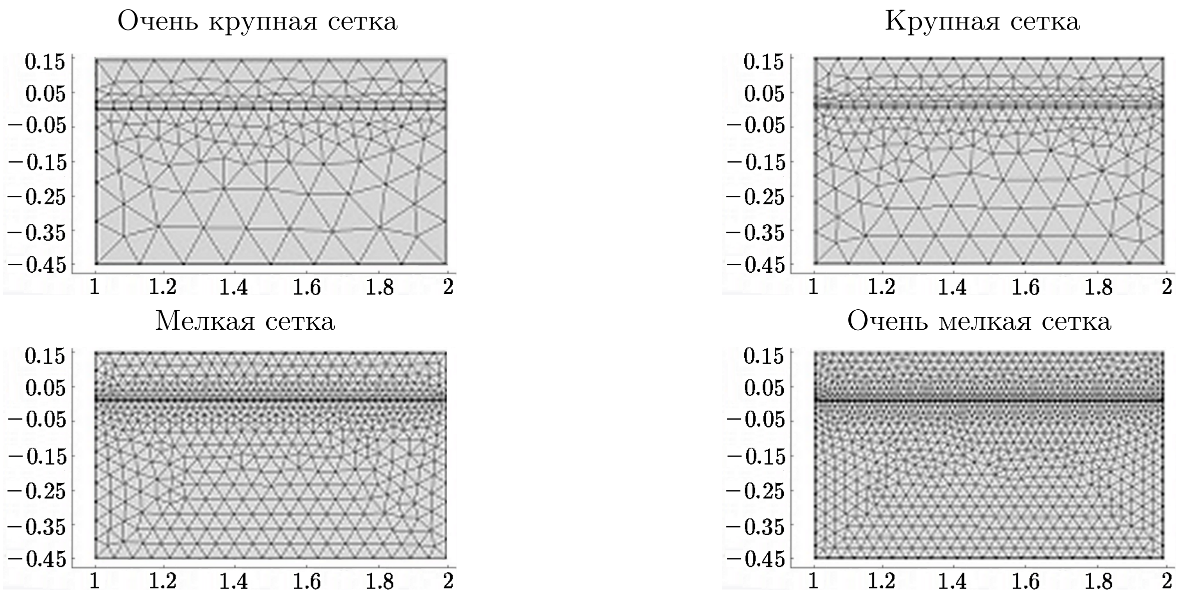

Рис. 6. Различные сетки области Ω

В табл. 2 представлены различные характеристики сеток: число элементов, максимальный и минимальный размеры элементов.

Таблица 2. Характеристики сеток

Сетка	Число элементов	Макс. размер элемента	Мин. размер элемента
Очень крупная	306	0.67	0.002
Крупная	487	0.1	3.0E−4
Нормальная	892	0.053	1.60E−4
Мелкая	1331	0.037	1.25E−4
Очень мелкая	2267	0.0266	1.01E−4

Теперь покажем изменение ошибки как функцию числа итераций для нормальной сетки (рис. 7). Чтобы изучить влияние сетки на погрешность и сходимость конечно-элементной схемы, выполним несколько численных тестов с различными размерами сетки (см. рисунки). В моделировании мы используем решатель MUMPS. Этот решатель очень полезен для решения больших разреженных линейных систем.

Рис. 7. Число итераций ошибки для нормальной сетки

На рис. 8 показано изменение ошибки как функция числа итераций для сетки, представленной на рис. 3.

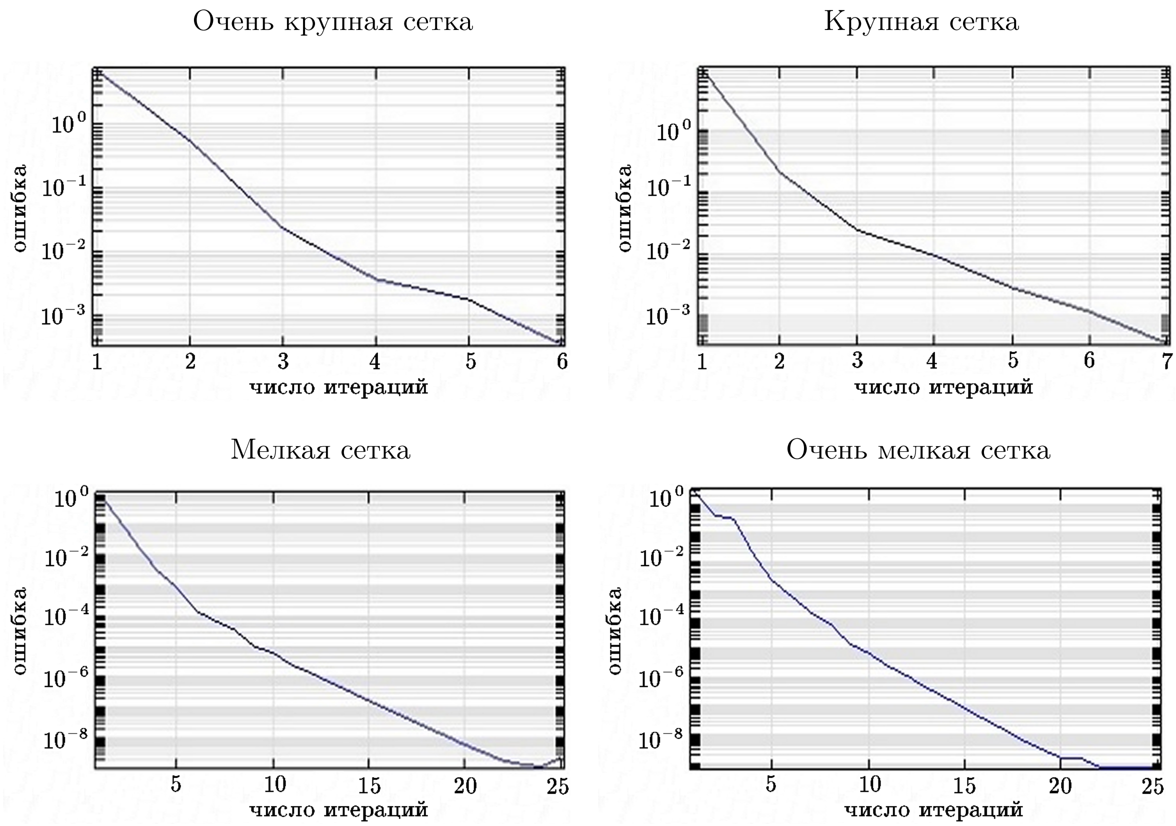

Рис. 8. Число итераций ошибки для разных сеток (рис. 3)

Рисунки 7 и 8 показывают, что в случае мелкой сетки число итераций для получения хорошего решения меньше.

В таблице 3 представлены ошибки нашей задачи на различных сетках. Пусть ошибка $Erru = \left\|u - u^h\right\|_0$, где u — скорость в области потока жидкости, а $Errp = \left\|p - p^h\right\|_0$, где p — давление в пористой среде.

Таблица 3 показывает эффективность метода; когда сетка достаточно мала, ошибка приближается к нулю.

Таблица 3. Ошибки уравнений скорости и давления

Число элементов	$Erru$	$Errp$
306	0.0013	0.00047
487	0.0011	0.00038
892	0.0008	0.00029
1331	0.00053	0.0002
2267	0.00053	0.00018

8. Выводы

В данной статье исследовали смешанный метод конечных элементов для решения модели Стокса–Дарси с новым граничным условием. В исследовании использовали дискретизацию смешанных методов конечных элементов для анализа устойчивости и сходимости. Мы предложили стабилизированную схему конечных элементов. Для гарантии корректности ввели член стабилизации временной дискретизации. Чтобы показать особенность схемы и численных методов, провели численный тест на другой сетке и сравнили результаты. Этот численный тест показал точность и эффективность предложенного смешанного метода конечных элементов.

Литература

1. **Adams R.A., Fournier J.J.F.** Sobolev Spaces, 2nd ed. — Amsterdam: Elsevier, 2003. — (Pure Appl. Math.; Vol. 140).
2. **Ainsworth M., Oden J.** A posteriori error estimators for the Stokes and Oseen equations // SIAM J. Numer. Anal. — 1997. — Vol. 34. — P. 228–245.
3. **Arbogast T., Brunson D.S.** A computational method for approximating a Darcy-Stokes system governing a vuggy porous medium // Comput. Geosci. — 2007. — Vol. 11. — P. 207–218.
4. **Arnold D.N., Brezzi F., Fortin M.** A stable finite element for the Stokes equations // Calcolo. — 1984. — Vol. 21. — P. 337–344.
5. **Amaziane B., El Ossmani M., Serres C.** Numerical modeling of the flow and transport of radionuclides in heterogeneous porous media // Comput. Geosci. — 2008. — Vol. 12. — P. 437–449.
6. **Babuska I.** Error-bounds for finite element method // Numer. Math. — 1971. — Vol. 16. — P. 322–333.
7. **Badea L., Discacciati M., Quarteroni A.** Numerical analysis of the Navier–Stokes/Darcy coupling // Numer. Math. — 2010. — Vol. 115. — P. 195–227.
8. **Bank R.E., Welfert B.** A posteriori error estimates for the Stokes problem // SIAM J. Numer. Anal. — 1991. — Vol. 28. — P. 591–623.
9. **Benzi M., Golub G.H., Liesen J.** Numerical solution of saddle point problems // Acta Numer. — 2005. — Vol. 14. — P. 1–137.
10. **Boubendir Y., Tlupova S.** Domain decomposition methods for solving Stokes–Darcy problems with boundary integrals // SIAM J. Sci. Comput. — 2013. — Vol. 35. — P. B82–B106.
11. **Brezzi F., Fortin M.** Mixed and Hybrid Finite Element Methods. — NY: Springer, 1991. — (Springer Series in Computational Mathematics; Vol. 15).
12. **Brezzi F., Douglas J.Jr., Fortin M., Marini L.D.** Efficient rectangular mixed finite elements in two and three space variables // Math. Model. Num. Anal. — 1987. — Vol. 21. — P. 581–604.
13. **Brezzi F.** On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers // RAIRO Anal. — 1974. — Vol. 8. — P. 129–151.

14. **Burman E., Hansbo P.** A unified stabilized method for Stokes' and Darcy's equations // J. Comput. Appl. Math. — 2007. — Vol. 198. — P. 35–51.

15. **Cai M., Mu M., Xu J.** Numerical solution to a mixed Navier–Stokes/Darcy model by the two-grid approach // SIAM J. Numer. Anal. — 2009. — Vol. 47. — P. 3325–3338.

16. **Camaño J., Gatica G.N., Oyarzúa R., Ruiz-Baier R., Venegas P.** New fully-mixed finite element methods for the Stokes-Darcy coupling // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. — 2015. — Vol. 295. — P. 362–395.

17. **Cao Y., Gunzburger M., He X.M., Wang X.** Robin-Robin domain decomposition methods for the steady-state Stokes–Darcy system with the Beavers–Joseph interface condition // Numer. Math. — 2011. — Vol. 117. — P. 601–629.

18. **Cao Y., Gunzburger M., Hua F., Wang X.** Coupled Stokes–Darcy model with Beavers–Joseph interface boundary condition // Commun. Math. Sci. — 2010. — Vol. 8. — P. 1–25.

19. **Carstensen C., Funken S.A.** A posteriori error control in low-order finite element discretizations of incompressible stationary flow problems // Math. Comp. — 2001. — Vol. 70. — P. 1353–1381.

20. **Chavent G., Jaffre J.** Mathematical Models and Finite Elements in Reservoir Simulation. — Netherlands: Elsevier Science Publishers BV, 1986.

21. **Discacciati M., Miglio E., Quarteroni A.** Mathematical and numerical models for coupling surface and groundwater flows // Appl. Numer. Math. — 2002. — Vol. 43. — P. 57–74.

22. **Discacciati M., Quarteroni A.** Convergence analysis of a subdomain iterative method for the finite element approximation of the coupling of Stokes and Darcy equations // Comput. Vis. Sci. — 2004. — Vol. 6. — P. 93–103.

23. **Du G., Zuo L.** Local and parallel finite element method for the mixed Navier-Stokes/Darcy model with Beavers-Joseph interface conditions // Acta Math. Sci. — 2017. — Vol. 37B. — P. 1331–1347.

24. **Elakkad A., Elkhalfi A., Guessous N.** An a posteriori error estimate for mixed finite element approximations of the Navier-Stokes equations // J. Korean Math. Soc. — 2011. — Vol. 48, № 3. — P. 529–550.

25. **Elman H., Silvester D., Wathen A.** Finite Elements and Fast Iterative Solvers with Applications in Incompressible Fluid Dynamics, 2nd ed. — Oxford: Oxford University Press, 2014.

26. **Gatica G.N., Oyarzúa R., Sayas F.J.** Analysis of fully-mixed finite element methods for the Stokes–Darcy coupled problem // Math. Comput. — 2011. — Vol. 80. — P. 1911–1948.

27. **Gatica G.N., Oyarzúa R., Sayas F.J.** Convergence of a family of Galerkin discretizations for the Stokes–Darcy coupled problem // Numer. Methods Partial Differential Equations. — 2011. — Vol. 27. — P. 721–748.

28. **Ghia U., Ghia K., Shin C.** High-Re solutions for incompressible flow using the Navier–Stokes equations and a multigrid method // J. Comput. Phys. — 1982. — Vol. 48. — P. 387–395.

29. **Girault V., Rivière B.** DG approximation of coupled Navier–Stokes and Darcy equations by Beaver–Joseph–Saffman interface condition // SIAM J. Numer. Anal. — 2009. — Vol. 47. — P. 2052–2089.

30. **He X.M., Li J., Lin Y.P., Ming J.** A domain decomposition method for the steady-state Navier–Stokes–Darcy model with the Beavers–Joseph interface condition // SIAM J. Sci. Comput. — 2015. — Vol. 37. — P. S264–S290.

31. **Hecht F., Pironneau O., Le Hyaric A., Ohtsuka K.** Freefem++. — URL: http://www.freefem.org/ff++.

32. Incompressible Computational Fluid Dynamics / M. Gunzburger, R. Nicolaides. — Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

33. **Lipnikov K., Vassilev D., Yotov I.** Discontinuous Galerkin and mimetic finite difference methods for coupled Stokes–Darcy flows on polygonal and polyhedral grids // Numer. Math. — 2014. — Vol. 126. — P. 321–360.
34. **Mu M., Xu J.** A two-grid method of a mixed Stokes–Darcy model for coupling fluid flow with porous media flow // SIAM J. Numer. Anal. — 2007. — Vol. 45. — P. 1801–1813.
35. **Mu M., Zhu X.** Decoupled schemes for a non-stationary mixed Stokes–Darcy model // Math. Comput. — 2010. — Vol. 79. — P. 707–731.
36. **Payne L.E., Straughan B.** Analysis of the boundary condition at the interface between a viscous fluid and a porous medium and related modelling questions // J. Math. Pures Appl. — 1998. — Vol. 77. — P. 317–354.
37. **Pearson J.W., Pestana J., Silvester D.J.** Refined saddle-point preconditioners for discretized Stokes problems // Numer. Math. — 2018. — Vol. 138 — P. 331–363. — DOI: 10.1007/s00211-017-0908-4.
38. **Roberts J., Thomas J.M.** Mixed and Hybrid methods // Handbook of Numerical Analysis / P. Ciarlet and J. Lions. — North Holland, 1990. — Vol. II: Finite Element Methods (Part I). — P. 523–639.
39. **Rui H., Zhang R.** A unified stabilized mixed finite element method for coupling Stokes and Darcy flows // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. — 2009. — Vol. 198. — P. 2692–2699.
40. **Saffman P.** On the boundary condition at the surface of a porous medium // Stud. Appl. Math. — 1971. — Vol. 50. — P. 93–101.
41. **Shan L., Zheng H.** Partitioned time stepping method for fully evolutionary Stokes–Darcy flow with Beavers–Joseph interface conditions // SIAM J. Numer. Anal. — 2013. — Vol. 51. — P. 813–839.
42. **Urquiza J.M., N'Dri D., Garon A., Delfour M.C.** Coupling Stokes and Darcy equations // Appl. Numer. Math. — 2008. — Vol. 58. — P. 525–538.
43. **Zuo L., Hou Y.** A decoupling two-grid algorithm for the mixed Stokes–Darcy model with the Beavers–Joseph interface condition // Numer. Methods Partial Differential Equations. — 2014. — Vol. 30. — P. 1066–1082.
44. **Zuo L., Hou Y.** A two-grid decoupling method for the mixed Stokes–Darcy model // J. Comput. Appl. Math. — 2015. — Vol. 275. — P. 139–147.
45. **Zuo L., Hou Y.** Numerical analysis for the mixed Navier–Stokes and Darcy problem with the Beavers–Joseph interface condition // Numer. Methods Partial Differential Equations. — 2015. — Vol. 31. — P. 1009–1030.

Поступила в редакцию 5 февраля 2019 г.
После исправления 10 апреля 2019 г.
Принята к печати 19 декабря 2019 г.