

ВЕТВЛЕНИЕ ТРЕЩИН В ПЛАСТИНЕ ПРИ УДАРЕ

В. М. Верчук

(Днепропетровск)

Рассматривается задача о распространении трещин при большом числе актов ветвления в полубесконечной неоднородной пластине, на грань которой действует ударная нагрузка. Используется теория случайных процессов. Определяются среднее квадратичное расстояние и среднее квадратичное угловое отклонение трещин от оси ветвления — величины, которые являются удобными для сравнения с экспериментальными данными.

1. Точные решения динамических уравнений теории упругости [1,2] показали, что в изотропной упруго-хрупкой пластине ветвление трещины на две возможно при ее скорости, большей $0.6 c_t$ (скорости поперечных упругих волн). Угол между ожидаемым ответвлением и направлением распространения трещины, которая движется со скоростью, составляющей $0.8 c_t$, равен $30-60^\circ$ [1]. В экспериментальных исследованиях [1,3,4] наблюдалось большое число актов ветвления трещин на две равноправные при хрупком разрушении пластин из различных материалов. При этом ветвление первой трещины происходило тогда, когда скорость ее распространения была выше некоторого значения. Угол между первой трещиной и образованной не превышал $20-40^\circ$.

В работе, используя теорию случайных процессов [5], определяются среднее квадратичное расстояние и среднее квадратичное угловое отклонение трещин от оси ветвления, которая совпадает с направлением распространения первой трещины. Большое число актов ветвления трещин на две равноправные изучается в полубесконечной неоднородной упруго-хрупкой пластине, на грань которой действует ударная нагрузка (фиг. 1)

2. Реальные материалы состоят из большого числа «первичных» элементов: зерен, кристаллов и т. д. В пределах каждого малого элемента материал однороден, но между собой элементы неоднородны по механическим свойствам или напряженно-деформированному состоянию. Такой материал будем называть «квазиоднородным». Пусть неоднородность состоит из квазиоднородного материала и содержит значительное число первичных элементов. Тогда под «неоднородной» средой будем понимать квазиоднородный материал, в котором статистически распределены неоднородности.

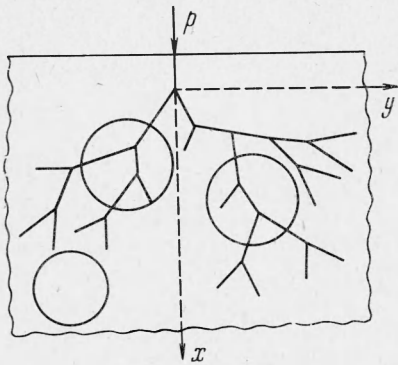
Определим понятие энергии трещины E . Уравнение энергетического баланса при распространении трещины [6], отнесенное ко всей ее длине, имеет вид

$$W = P + T \quad (2.1)$$

Здесь W — освобождаемая упругая энергия, $P = 2\gamma s$ — поверхностная энергия и $T = k\rho l^2 v^2 \sigma^2 / 2E^2$ — кинетическая энергия трещины (обозначения в P и T общепринятые). Под энергией распространяющейся трещины, полностью определенной физико-механическими характеристиками и напряженным состоянием материала, будем понимать сумму поверхност-

ной и кинетической энергий. При этом становится возможным энергетическое объяснение ветвления трещины. Распространение трещины приводит к увеличению освобождаемой упругой энергии. Кинетическая энергия при возрастании скорости разрушения увеличивается до некоторого предела, определенного максимально возможной скоростью распространения трещины. В соответствии с уравнением (2.1) должна возрастать и поверхностная энергия, т. е. должна увеличиваться поверхность разрушения, что и объясняет образование новых трещин у вершины распространяющейся.

Таким образом, процесс ветвления происходит тогда, когда энергия трещины достигает определенного значения. При достаточно большой скорости распространения трещины основной вклад в ее энергию вносит, очевидно, кинетическая энергия. Поэтому данный вывод не противоречит ранее



Фиг. 1

полученным теоретическим [1,2] и экспериментальным [3,4] результатам о влиянии скорости распространения трещины на ее ветвление.

Принимаются следующие гипотезы:

- 1) каждая трещина с энергией, превышающей некоторую величину, ветвится на две;
- 2) ветвление трещин происходит в квазиоднородном материале и в неоднородностях [пластины, при этом бесконечно тонкая граница перехода не является источником трещин];
- 3) угловое отклонение трещин при ветвлении мало.

Получим векторное уравнение для вероятности $a(\mathbf{R}, y, x) d\mathbf{R}^* dy$ нахождения трещины в пределах $\mathbf{R}, \mathbf{R} + d\mathbf{R}$ на расстоянии x от грани пластины и с горизонтальным отклонением $y, y + dy$ от оси ветвления, совпадающей с направлением распространения первой трещины. При этом

$$d\mathbf{R}^* = \frac{dR_x dR_y}{k_1}$$

где \mathbf{R} — векторный аналог энергии трещины E , k_1 — параметр формы трещины.

Пусть $b(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}) d\mathbf{R}^*$ определяет вероятность рождения трещины с $\mathbf{R}, \mathbf{R} + d\mathbf{R}$ от трещины с \mathbf{R}_1 ; $c(x)$ — плотность неоднородностей в плоскости, тогда $k_2 c(x) dx / \cos \alpha$ есть вероятность попадания трещины в неоднородность в слое dx . Здесь α — угол между вертикалью и направлением распространения трещины, k_2 — постоянная для данного материала пластины.

Рассмотрим трещину с \mathbf{R} , вершина которой находится на расстоянии x от грани пластины. Вероятность того, что трещина в слое $h - x$ (выше x) не попадет в неоднородность, равна $\exp \{ [L(h) - L(x)] / \cos \alpha \}$, где

$$L(x) = \int_x^\infty c(x_1) dx_1.$$

Вероятность появления этой трещины из неоднородности, которая находится в слое $h, h + dh$, есть $L_1(h) dh / \cos \alpha$. Вероятность того, что предшествующая трещина имела $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_1 + d\mathbf{R}_1$, равна $a(\mathbf{R}_1, \mathbf{r}, h) d\mathbf{R}_1^* d\mathbf{r}$, где $\mathbf{r}, \mathbf{r} + d\mathbf{r}$ — ее смещение от оси ветвления трещин.

Уравнение для функции распределения a трещин имеет вид

$$a(\mathbf{R}, y, x) = - \int_x^\infty \int a(\mathbf{R}_1, r, h) b(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}) \exp \frac{L(h) - L(x)}{\cos \alpha} \times \\ \times L_1(h) dh / \cos \alpha d\mathbf{R}_1^* + a(\mathbf{R}, r_\infty, \infty) \exp \frac{-L(x)}{\cos \alpha} \quad (2.2)$$

где

$$r = y - R_y(h - x) / R_x, \quad r = r_\infty \text{ при } h = \infty$$

Дифференцируем (2.2) по x и y

$$\frac{\partial a}{\partial L} \cos \alpha - \frac{R_y}{RL_1} \frac{\partial a}{\partial y} + a = \int a(\mathbf{R}_1) b(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}) d\mathbf{R}_1^* \quad (2.3)$$

Здесь L_1 — функция L . Для пластины с постоянной плотностью неоднородностей в пластине $L_1 = -k_2 c$; при этом единицу длины можно выбрать так, чтобы $k_2 c = 1$.

Проведем над a преобразование Фурье по y

$$\psi(\mathbf{R}, \rho, L) = \int a(\mathbf{R}, y, L) \exp(-i\rho y) dy \quad (2.4)$$

Тогда

$$\psi = \sum_m \psi_m(\mathbf{R}, L) \rho^m / m! \quad (2.5)$$

где

$$\psi_m = \int (-iy)^m a(\mathbf{R}, y, L) dy \quad (2.6)$$

Уравнение для ψ получаем из (2.3)

$$\frac{\partial \psi}{\partial L} \cos \alpha - \frac{i\rho \cdot \mathbf{R}}{L_1 R} \psi + \psi = \int \psi(\mathbf{R}_1) b(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}) d\mathbf{R}_1^* \quad (2.7)$$

Дифференцируем (2.7) m раз по ρ и полагаем $\rho = 0$. Получаемые уравнения для ψ_m запишем в прежних переменных

$$\frac{\partial x(\mathbf{R})}{\partial L} \cos \alpha + x(\mathbf{R}) = \int x(\mathbf{R}_1) b(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}) d\mathbf{R}_1^* \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial y(\mathbf{R})}{\partial L} \cos \alpha + y(\mathbf{R}) = \int y(\mathbf{R}_1) b(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}) d\mathbf{R}_1^* \quad (2.9)$$

Используем обозначения: β — угол между \mathbf{R} и \mathbf{R}_1 , β_1 — угол между \mathbf{R}_1 и вертикалью. Тогда

$$\cos \hat{\beta}_1 = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

Уравнения (2.8) и (2.9) принимают вид

$$\frac{\partial x(E, \cos \alpha)}{\partial L} \cos \alpha + x(E, \cos \alpha) = \int_E^\infty \int_{-1}^{+1} x(E_1, \cos \beta_1) b(E_1, E, \cos \beta) dE_1 d(\cos \beta) \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial y(E, \cos \alpha)}{\partial L} \cos \alpha + y(E, \cos \alpha) = \int_E^\infty \int_{-1}^{+1} y(E_1, \cos \beta_1) b(E_1, E, \cos \beta) dE_1 d(\cos \beta) \quad (2.11)$$

3. Определим среднее квадратичное расстояние и среднее квадратичное угловое отклонение трещин от оси, совпадающей с направлением рас-

пространения первой трещины. Эти величины, как известно, соответственно имеют вид

$$\langle d^2(E, L) \rangle = \left[\int_{-1}^{+1} x(E, \cos \alpha, L) d(\cos \alpha) \right] \left[\int_{-1}^{+1} y(E, \cos \alpha, L) d(\cos \alpha) \right]^{-1} \quad (3.1)$$

$$\langle f^2(E, L) \rangle = \left[\int_{-1}^{+1} y(E, \cos \alpha, L) \sin^2 \alpha d(\cos \alpha) \right] \left[\int_{-1}^{+1} y(E, \cos \alpha, L) d(\cos \alpha) \right]^{-1} \quad (3.2)$$

Для нахождения $\langle d^2 \rangle$ и $\langle f^2 \rangle$ необходимо определить коэффициенты в разложении $x(E, \cos \alpha)$ и $y(E, \cos \alpha)$ по полиномам Лежандра

$$x(E, \cos \alpha) = \sum_{K=0}^{\infty} \left(K + \frac{1}{2} \right) x_K(E) P_K(\cos \alpha) \quad (3.3)$$

$$y(E, \cos \alpha) = \sum_{K=0}^{\infty} \left(K + \frac{1}{2} \right) y_K(E) P_K(\cos \alpha) \quad (3.4)$$

Тогда искомые величины будут иметь вид

$$\langle d^2(E) \rangle = x_0(E)/y_0(E) \quad (3.5)$$

$$\langle f^2(E) \rangle = 2/3 [y_0(E) - y_2(E)]/y_0(E) \quad (3.6)$$

Подставляем (3.3) и (3.4) соответственно в уравнения (2.10) и (2.11), которые при этом упрощаются. Применяя теорему сложения для полиномов Лежандра

$$P_K(\cos \beta_1) = P_K(\cos \alpha) P_K(\cos \beta) \quad (3.7)$$

при условии, что

$$b_K(E_1, E) = \int_{-1}^{+1} b(E_1, E, \cos \beta) P_K(\cos \beta) d(\cos \beta) \quad (3.8)$$

найдем

$$\int_{-1}^{+1} x(E_1, \cos \beta_1) b(E_1, E, \cos \beta) d(\cos \beta) = \sum_{K=0}^{\infty} \left(K + \frac{1}{2} \right) x_K(E_1) b_K(E_1, E) \times \\ \times P_K(\cos \alpha) \quad (3.9)$$

Умножая (2.10) на $P_K(\cos \alpha)$ и интегрируя по $\cos \alpha$ от -1 до $+1$, получаем

$$\frac{\partial x_1(E)}{\partial L} + x_0(E) = \int_E^{\infty} x_0(E_1) b_0(E_1, E) dE_1 \quad (3.10)$$

Но $x(E, \cos \alpha)$ пропорционально $\sin^2 \alpha$, поэтому на основании гипотезы 3) выражением

$$x_1(E) - x_0(E) = \int_{-1}^{+1} x(E, \cos \alpha) (\cos \alpha - 1) d(\cos \alpha) \quad (3.11)$$

можно пренебречь, т. е. в (3.10) заменяем $x_1(E)$ на $x_0(E)$.

Решая полученное уравнение с помощью преобразования Меллина, получаем

$$x_0(E, L) = \frac{2v}{E_0^2} \int_{s_0 - i_\infty}^{s_0 + i_\infty} \left(\frac{E}{E_0}\right)^{-(s+1)} j(s) Q(s, L) ds \quad (3.12)$$

где

$$v = (2\pi i)^{-1}$$

$$Q(s, L) = \frac{L \exp[-t(s)L]}{t(s-1) - t(s)} - \frac{1}{2} L^2 \exp[-t(s)L] \quad (3.13)$$

Можно показать, что среднее число трещин на расстоянии L в пластине определяется выражением

$$y_0(E, L) = \frac{v}{E_0} \int_{s_0 - i_\infty}^{s_0 + i_\infty} \left(\frac{E}{E_0}\right)^{-(s+1)} \exp[-t(s)L] ds \quad (3.14)$$

где

$$t(s) = 1 - \int_0^\infty \left(\frac{E}{E_1}\right)^s E_1 b_0(E_1, E) d\left(\frac{E}{E_1}\right) \quad (3.15)$$

если ветвление началось от одной трещины с энергией E_0 .

Тогда среднее квадратичное расстояние трещин от оси ветвления, совпадающей с направлением распространения первой трещины, согласно выражению (3.5) равно отношению (3.12) к (3.14).

Умножая (2.11) на $P_K(\cos \alpha)$ и интегрируя по $\cos \alpha$ от -1 до $+1$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial L} [H_1 y_{K+1}(E) + H_2 y_{K-1}(E)] + y_K(E) = \int_E^\infty y_K(E_1) b_K(E_1, E) dE_1 \quad (3.16)$$

где

$$H_1 = \frac{K+1}{2K+1}, \quad H_2 = \frac{K}{2K+1}$$

В силу гипотезы 3) пренебрегаем членами, зависящими от коэффициента $(1 - \cos \alpha)^2$, который изменяется как среднее значение четвертой степени α .

Подставляя $K = 0$, $K = 1$ в уравнение (3.16) и вычитая результаты, находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} [y_0(E) - y_2(E)] + [y_0(E) - y_2(E)] &= \int_E^\infty [y_0(E_1) - y_2(E_1)] b_0(E_1, E) dE_1 + \\ &+ \int_E^\infty y_0(E_1) [b_0(E_1, E) - b_2(E_1, E)] dE_1 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Решение этого уравнения, полученное с помощью преобразования Меллина, имеет вид

$$\frac{2}{3} [y_0(E, L) - y_2(E, L)] = \frac{v}{E_0^2} \int_{s_0 - i_\infty}^{s_0 + i_\infty} \left(\frac{E}{E_0}\right)^{-(s+1)} j(s) G(s) ds \quad (3.18)$$

где

$$G(s) = \exp[-t(s-1)L] - \exp[-t(s)L] \quad (3.19)$$

$$[t(s) - t(s-1)]j(s) = \frac{2}{3} \int_0^{\infty} \left(\frac{E}{E_1}\right)^s E_1^2 [b_0(E_1, E) - b_2(E_1, E)] d\left(\frac{E}{E_1}\right) \quad (3.20)$$

Можно показать, что $b_0(E_1, E)$ и $b_0(E_1, E) - b_2(E_1, E)$ имеют вид

$$b_0(E_1, E) = \frac{v}{E_1} \int_{s_0-i\infty}^{s_0+i\infty} \left(\frac{E}{E_1}\right)^{-(s+1)} (1-q_1) ds \quad (3.21)$$

$$\frac{2}{3} [b_0(E_1, E) - b_2(E_1, E)] = \frac{v}{E_1^2} \int_{s_0-i\infty}^{s_0+i\infty} \left(\frac{E}{E_1}\right)^{-(s+1)} (q_1 - q_2) n(s) ds \quad (3.22)$$

где

$$q_1 = q[Nl(s)], \quad q_2 = q[Nl(s-1)] \quad (3.23)$$

$$q(\sigma) = 1 - 2[1 - (1+\sigma)e^{-\sigma}] \sigma^{-2} \quad (3.24)$$

$$n(s) = [2 - l(s) - l(s-1)][l(s) - l(s-1)]^{-1} \quad (3.24)$$

$$l(s) = 1 - 2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \mu^s \lambda(\mu_1, \mu_2) d\mu_1 d\mu_2 \quad (3.25)$$

N — среднее число ветвлений, которые испытывает трещина при прохождении через неоднородность, $\lambda(\mu_1, \mu_2)$ — вероятность того, что энергии образующихся трещин были в отношениях μ_1, μ_2 к энергии первой трещины.

Из уравнений (3.15) и (3.21) следует:

$$t(s) = q[Nl(s)] \quad (3.26)$$

а из (3.20) и (3.22)

$$j(s) = n(s) \quad (3.27)$$

Итак, среднее квадратичное угловое отклонение от оси, совпадающей с направлением распространения первой трещины, согласно выражению (3.6) равно отношению (3.18) к (3.14).

4. Для получения результатов запишем начальное условие для числа трещин на расстоянии L от грани пластины

$$y_0(E, L=0) = \delta(E - E_0) \quad (4.1)$$

$$Y_0(E, L=0) = 1 \quad (4.2)$$

Выражение для $y_0(E, L)$ определено в (3.14) и

$$Y_0(E, L) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s_0-i\infty}^{s_0+i\infty} \left(\frac{E}{E_0}\right)^{-s} \exp[-t(s)L] \frac{ds}{s} \quad (4.3)$$

где $t(s)$ определяется в (3.26), (3.25) и (3.23).

Среднее квадратичное расстояние трещин от оси ветвления имеет вид

$$\langle d^2(E, L) \rangle = \frac{2v}{y_0(E, L) E_0^2} \int_{s_0-i\infty}^{s_0+i\infty} \left(\frac{E}{E_0}\right)^{-(s+1)} j(s) Q(s, L) ds \quad (4.4)$$

$$\langle D^2(E, L) \rangle = \frac{2v}{Y_0(E, L) E_0} \int_{s_0-i\infty}^{s_0+i\infty} \left(\frac{E}{E_0}\right)^{-s} j(s) Q(s, L) \frac{ds}{s} \quad (4.5)$$

где значения $v, j(s)$ и $Q(s, L)$ определены в п. 3.

Итак, среднее квадратичное расстояние трещин от оси ветвления, образованных в пластине при ударе, обратно пропорционально энергии первой трещины и сначала возрастает, а затем уменьшается вследствие ухода трещин из рассматриваемого энергетического интервала.

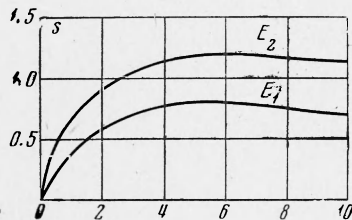
Для среднего квадратичного углового отклонения трещин от оси ветвления в пластине имеем

$$\langle f^2(E, L) \rangle = \frac{v}{y_0(E, L) E_0^2} \int_{s_0 - \epsilon_\infty}^{s_0 + \epsilon_\infty} \left(\frac{E}{E_0} \right)^{-(s+1)} j(s) G(s) ds \quad (4.6)$$

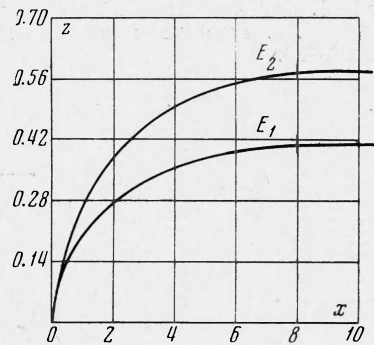
$$\langle F^2(E, L) \rangle = \frac{v}{Y_0(E, L) E_0} \int_{s_0 - \epsilon_\infty}^{s_0 + \epsilon_\infty} \left(\frac{E}{E_0} \right)^{-s} j(s) G(s) \frac{ds}{s} \quad (4.7)$$

где $G(s)$ определено в (3.19).

Таким образом, среднее квадратичное угловое отклонение трещин от оси ветвления, совпадающей с направлением распространения первой тре-



Фиг. 2



Фиг. 3

щины в полубесконечной упруго-хрупкой неоднородной пластине, обратно пропорционально энергии первой трещины и сначала возрастает, а затем стремится к некоторому постоянному значению.

На фиг. 2 и фиг. 3 показаны в относительных единицах зависимости от длины пластины величин s и z , которые соответственно равны корням квадратным из среднего квадратичного расстояния и среднего квадратичного углового отклонения трещин от оси ветвления в полубесконечной неоднородной пластине, на грань которой действует единичная ударная нагрузка. При этом ветвление начинается от одной трещины, которая имеет энергию E_0 .

Сравнение с известными данными по ветвлению трещин при разрушении стеклянных пластин, полученными Х. Шардиным с сотрудниками [3], показывает качественное согласие результатов предлагаемой теории (возрастание среднего квадратичного расстояния и среднего квадратичного углового отклонения трещин от оси ветвления в квазиоднородной пластине) с экспериментальными.

В работе [3] была применена следующая методика нагружения испытываемых образцов. Стеклянные пластины предварительно нагружались путем растяжения. Затем разрушение инициировалось ударом лезвия ножа в кромку пластины. При этом среднее квадратичное расстояние и среднее квадратичное угловое отклонение от оси ветвления, совпадающей с направлением распространения первой трещины, непрерывно возрастали.

Очевидно, это объясняется тем, что энергия образованных трещин увеличивалась за счет упругой энергии, накопленной в системе образец — машина.

Таким образом, нельзя ожидать полного качественного совпадения экспериментальных данных и теоретических (для частного случая квазиоднородной пластины) ввиду отличия рассматриваемой методики нагружения пластины от примененной в работе [3].

Автор благодарит Ю. Н. Работнова за ценное обсуждение работы

Поступила 10 V 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Yoffe E. H. The moving griffith crack. *Philos. Mag.*, Ser. 7, 1951, vol. 42, No. 330
2. C r a g g s J. W. On the propagation of a crack in an elastic — brittle material. *J Mech. Phys. Solids*, 1960, vol. 8, No. 1, pp. 66—75.
3. Ш а р д и н X. Исследование скорости разрушения. В сб. «Атомный механизм разрушения». М., Metallurgizdat, 1963, стр. 297.
4. Ф и н к е л ь В. М. Физика разрушения. М., «Металлургия», 1970, стр. 156.
5. И т о К. Вероятностные процессы, вып. 2. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
6. M o t t N. F. Fracture of metals; theoretical consideration. *Engng*, 1948, vol. 165, pp. 16—18.