УДК 539.3

ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ОРТОТРОПНОЙ ПЛОСКОСТИ С ЩЕЛЬЮ ПРИ УСЛОВИЯХ КОНТАКТА БЕРЕГОВ ТИПА ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ

Ю. А. Боган

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Построена система гиперсингулярных уравнений для задачи, сформулированной в заглавии статьи. Обсуждаются качественные свойства решения этой системы.

Введение. Задача продольного сдвига для плоскости с щелью, заполненной малоподатливым на сдвиг материалом, изучена автором в [1]. В настоящей работе рассматривается аналогичная задача в теории упругости. В отличие от антиплоской задачи здесь существует два варианта условий сопряжения на берегах щели: 1) касательное напряжение пропорционально скачку касательного перемещения; 2) нормальное напряжение пропорционально скачку нормального перемещения. Подобного рода условия сопряжения возникают в теории упругости при решении задачи о контакте упругих областей с тонкой прослойкой, коэффициенты упругости которой значительно больше коэффициентов упругости вмещающей среды (см., например, [2]). Изучаемые задачи сопряжения приведены к системам гиперсингулярных уравнений; показано, что они с точностью до коэффициентов совпадают с системой уравнений, выведенной в [1], и допускают тот же анализ.

1. Рассмотрим первый вариант. Примем закон Гука для ортотропного материала в виде

$$\sigma_{11} = d_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x} + d_{12}\frac{\partial u_2}{\partial y}, \qquad \sigma_{22} = d_{12}\frac{\partial u_1}{\partial x} + d_{22}\frac{\partial u_2}{\partial y}, \qquad \sigma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x}.$$

Предполагается, что матрица упругих постоянных положительно определена: $d_{11} > 0$, $d_{22} > 0$, $d_{11}d_{22} - d_{12}^2 > 0$. Напряжения и коэффициенты в законе Гука безразмерны и отнесены к модулю сдвига; u_1, u_2 — перемещения. Пусть щель лежит на прямой $y = 0$ и занимает интервал $(-a, a)$ оси x; R_-^2 — нижняя полуплоскость $y < 0$, R_+^2 — верхняя $y > 0$. Зададим условия сопряжения полуплоскостей в виде

$$[u_2] = 0, \qquad [\sigma_{22}] = 0, \qquad y = \pm 0; \tag{1}$$

$$[u_1] = 0, \qquad [\sigma_{12}] = 0, \qquad y = \pm 0, \qquad |x| > a; \tag{2}$$

$$\sigma_{12}(x, +0) = k[u_1](x, +0) + f(x), \qquad |x| \leqslant a\cdot \tag{3}$$

$$\sigma_{12}(x, -0) = k[u_1](x, -0), \qquad |x| \leqslant a. \tag{4}$$

Здесь функция $f(x)$ известна, она моделирует действие поверхностных сил на щели; квадратные скобки обозначают скачок функции. Коэффициент k задан и положителен, его называют коэффициентом вязкости.

Поясним более подробно физический смысл условий (3) и (4). С физической точки зрения предполагается, что щель заполнена упругим материалом с малым модулем Юнга, причем толщина щели и модуль Юнга сравнимы по порядку. Для уравнения Лапласа (стационарная теплопроводность) подобная задача изучалась в [3]. С механических позиций можно сказать, что появление условий (3) и (4) означает, что изменением решения по x можно пренебречь по сравнению с его изменением по y. Однако это не единственная ситуация, в которой возможно появление подобного рода условий. Если, например, предположить, что щель заполнена большим количеством микрощелей и провести при этом осреднение по количеству микрощелей, то эта операция также приведет к условиям типа (3) и (4).

Приведем задачу теории упругости при граничных условиях (1)–(4) к системе интегральных уравнений. Для этого используем явное решение задачи теории упругости при заданных на границе перемещениях соответственно для верхней и нижней полуплоскостей. Заданные на границе функции будем называть плотностями. При помощи условий сопряжения (1)–(4) получим систему интегральных уравнений для определения плотностей. Введем интегральные операторы (аналоги потенциалов простого и двойного слоя для уравнения Лапласа):

$$\mathcal{K}_1(f,\lambda y)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)\lambda y}{(x-t)^2+\lambda^2y^2}\,dt,\qquad \mathcal{K}_2(f,\lambda y)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)(x-t)}{(x-t)^2+\lambda^2y^2}\,dt.$$

Положим $\gamma_1=(1+d_{12})/(d_{11}-\lambda_1^2)$, $\gamma_2=(1+d_{12})/(d_{11}-\lambda_2^2)$. Здесь λ_1,λ_2 — положительные корни уравнения $d_{22}\lambda^4-(d_{11}d_{22}-d_{12}^2-2d_{12})\lambda^2+d_{11}=0$.

Пусть при $y=+0$ заданы перемещения $u_1(x,+0)=f_1(x)$, $u_2(x,+0)=f_2(x)$. Тогда решение задачи теории упругости в верхней полуплоскости дается формулами

$$u_1^1(x,y)=\frac{\gamma_1}{\gamma_1-\gamma_2}\mathcal{K}_1(f_1,\lambda_1y)-\frac{\gamma_2}{\gamma_1-\gamma_2}\mathcal{K}_1(f_1,\lambda_2y)+\frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_1-\gamma_2}[\mathcal{K}_2(f_2,\lambda_1y)-\mathcal{K}_2(f_2,\lambda_2y)],$$

$$u_2^1(x,y)=\frac{1}{\gamma_1-\gamma_2}[\mathcal{K}_2(f_1,\lambda_1y)-\mathcal{K}_2(f_1,\lambda_2y)+\gamma_1\mathcal{K}_1(f_2,\lambda_2y)-\gamma_2\mathcal{K}_1(f_2,\lambda_1y)].$$

Положим $u_1(x,-0)=f_3(x)$, $u_2(x,-0)=f_4(x)$. Решение в нижней полуплоскости имеет следующий вид:

$$u_1^2(x,y)=\frac{\gamma_1}{\gamma_1-\gamma_2}[-\mathcal{K}_1(f_3,\lambda_1y)+\gamma_2\mathcal{K}_2(f_4,\lambda_1y)]-\frac{\gamma_2}{\gamma_1-\gamma_2}[-\mathcal{K}_1(f_3,\lambda_2y)+\gamma_1\mathcal{K}_2(f_4,\lambda_2y)],$$

$$u_2^2(x,y)=\frac{1}{\gamma_1-\gamma_2}[\mathcal{K}_2(f_3,\lambda_1y)-\mathcal{K}_2(f_3,\lambda_2y)]+\frac{1}{\gamma_1-\gamma_2}[\gamma_2\mathcal{K}_1(f_4,\lambda_1y)-\gamma_1\mathcal{K}_2(f_4,\lambda_2y)].$$

Верхние индексы 1 и 2 относятся соответственно к нижней и верхней полуплоскостям. Из (1) следует, что $f_2=f_4$, и, так как $[\sigma_{22}]=0$, то для любого вещественного x

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_2(t)+f_4(t)}{(x-t)^2}\,dt=0.$$

Поэтому естественно положить $f_2(t)+f_4(t)=0$, тогда $f_2(t)=f_4(t)=0$. Отсутствие скачка у u_1 и σ_{12} при $|x|>a$ приводит к равенству нулю $f_3(t)$ и $f_1(t)$ при $|t|>a$. Нетрудно подсчитать, что

$$\frac{\partial u_1^1}{\partial y}=\frac{l}{\pi}\int\limits_{-a}^{+a}\frac{f_1(t)}{(x-t)^2}\,dt,\qquad \frac{\partial u_1^2}{\partial y}=-\frac{l}{\pi}\int\limits_{-a}^{+a}\frac{f_1(t)}{(x-t)^2}\,dt.$$

Здесь $l=(\gamma_1\lambda_1-\gamma_2\lambda_2)/(\gamma_1-\gamma_2)=d_{11}(\lambda_1+\lambda_2)/(d_{11}+\lambda_1\lambda_2)$. Отсюда следует система гиперсингулярных уравнений для определения плотностей f_1, f_3

$$\frac{l}{\pi}\int\limits_{-a}^{+a}\frac{f_1(t)}{(x-t)^2}\,dt=k(f_1(x)-f_3(x))+f(x),\qquad -\frac{l}{\pi}\int\limits_{-a}^{+a}\frac{f_3(t)}{(x-t)^2}\,dt=k(f_1(x)-f_3(x)).$$

Вычитая и складывая эти уравнения, получим

$$\frac{l}{\pi}\int\limits_{-a}^{+a}\frac{m(t)}{(x-t)^2}\,dt = 2km(x)+f(x); \tag{5}$$

$$\frac{l}{\pi}\int\limits_{-a}^{+a}\frac{n(t)}{(x-t)^2}\,dt = f(x), \tag{6}$$

где $m(x) = f_1(x) - f_3(x)$; $n(x) = f_1(x) + f_3(x)$. Такая же система уравнений (с точностью до множителя l) построена в [1]. Интегралы в (5) и (6) следует трактовать как конечную часть по Адамару расходящегося интеграла. Как показано в [1], уравнение (5) можно привести к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, а уравнение (6) разрешимо в явном виде. На основании результатов работы [1] решения уравнений (5) и (6) при $f(x) \in C^{0,\alpha}$ принадлежат $C^{1,\alpha}$; при этом $m(x), n(x)$ обращаются в нуль на концах интервала, а их производные могут иметь корневые особенности при $x = \pm a$. Здесь $C^{s,\alpha}(-a,a)$ — банахово пространство функций, имеющих s непрерывных производных, причем производная порядка s удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\alpha \leqslant 1$. При малом k уравнение (5) сингулярно возмущено и его решение может быть получено методом сращиваемых асимптотических разложений [4].

2. Рассмотрим еще один вариант граничных условий на берегах щели. Пусть при $y = \pm 0$

$$[u_1] = 0, \quad [\sigma_{12}] = 0, \quad \sigma_{22}(x,+0) = s[u_2] + g(x), \quad \sigma_{22}(x,-0) = s[u_2], \quad |x| \leqslant a,$$
$$[u_2] = 0, \quad [\sigma_{22}] = 0, \quad |x| > a.$$

Предполагается, что $s > 0$. Используя данные выше решения задачи в перемещениях для верхней и нижней полуплоскостей, получим, что $f_1 = f_3 = 0, f_2(x) = f_4(x) = 0$ при $|x| > a$. На интервале $(-a,a)$ для плотностей f_1, f_3 имеем систему уравнений

$$-\frac{d_{22}l_1}{\pi}\int\limits_{-a}^{+a}\frac{f_2(t)}{(x-t)^2}\,dt = s[f_2(x) - f_4(x)] + g(x), \quad \frac{d_{22}l_1}{\pi}\int\limits_{-a}^{+a}\frac{f_4(t)}{(x-t)^2}\,dt = s[f_2(x) - f_4(x)].$$

Здесь $l_1 = \lambda_1\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2)/(d_{11} - \lambda_1\lambda_2)$. Эта система уравнений отличается от системы уравнений (5), (6) только коэффициентом $d_{22}l_1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Боган Ю. А.** Антиплоская деформация плоскости с щелью, заполненной материалом с малым модулем сдвига // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 5. С. 125–128.
2. **Geymonnat G., Krasucki F., Lenci S.** Analyse asymptotique du comportement d'un assemblage colle // Comp. Rend. Acad. Sci. Ser. I. 1996. T. 322, № 11. P. 1107–1112.
3. **Sanchez-Palencia E.** Nonhomogeneous media and vibration theory. Berlin: Springer-Verlag, 1980 (Lect. Notes Phys.; N 127).
4. **Movchan A. B., Willis J. R.** Asymptotic analysis of the reinforcement of a brittle crack by bridging fibres // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1993. V. 46, N 2. P. 331–350.

Поступила в редакцию 28/IV 1997 г.,
в окончательном варианте — 27/X 1997 г.