ПМТФ, № 3, 1963

ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА ИЗЛУЧЕНИЯ В ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЕ ПРИ УСЛОВИЯХ, БЛИЗКИХ К РАВНОВЕСНЫМ

В. С. Имшенник, Ю. И. Морозов

(*Москва*)

В систему уравнений гидродинамики при высоких температурах должны быть включены члены, учитывающие роль излучения, а также уравнение, описывающее перенос излучения.

Таким образом, можно прийти к уравнениям радиационной гидродинамики. Основной вопрос, который решается при этом, состоит в формулировке релятивистски ковариантного кинетического уравнения переноса излучения с учетом движения в среде. Наиболее существенный вклад в этот вопрос был сделан Томасом [1] и Синджем [2]. Система уравнений радиационной гидродинамики для общего релятивистского случая записана Прокофьевым [3] (там же дан список литературы). Собственно в уравнения, описывающие движение в среде, излучение входит в виде дивергенции тензора энергии-импульса излучения. Вообще говоря, вид этого тензора весьма сложен и нужно совместно рассматривать уравнения среды и уравнение переноса излучения.

Однако в условиях, близких к равновесным, можно вычислять этот тензор последовательными приближениями и в дальнейшем рассматривать общие уравнения, получаемые из суммы тензоров — среды и излучения. Такая процедура очень сильно упрощает задачи радиационной гидродинамики. Если ограничиться вторым приближением в вычислении тензора энергии-импульса (учесть линейные по градиентам гидродинамических величин члены), то получится обобщение известного в астрофизике приближения лучистой теплопроводности с введением средней по Росселанду [4, 5]. В данной работе вычисляется тензор энергии-импульса излучения в этом приближении. Раньше этот тензор был вычислен Томасом [1], но процедура его вычисления нестандартна и приводит к очень громоздким интегралам. Основой нашего метода вычисления будет вычисление тензора энергии-импульса излучения сначала в собственной системе отсчета, а потом преобразование его к фиксированной системе отсчета по формулам тензорного исчисления. Предварительно приведем необходимые формулы релятивистских преобразований и основное релятивистски ковариантное уравнение переноса излучения с кратким выводом.

§ 1. Релятивистски ковариантное уравнение переноса излучения с учетом движения в среде. Пусть в данной системе координат S (имеет смысл называть ее фиксированной) скорость движения вещества произвольна как по направлению, так и по величине в каждой точке пространства $\mathbf{r}$ и в каждый момент времени t. Запишем преобразования Лоренца в векторной форме. Пусть, как обычно,

$$\mathbf{r}_\parallel' = \theta\,(\mathbf{r}_\parallel + \mathbf{q}t), \qquad \mathbf{r}_\perp' = \mathbf{r}_\perp, \qquad t' = \theta\left(t + \frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_\parallel}{c^2}\right) \tag{1.1}$$

Здесь

$$\mathbf{r}_\parallel = \frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}{q^2}\,\mathbf{q}, \qquad \mathbf{r}_\perp = \mathbf{r} - \mathbf{r}_\parallel, \qquad \theta = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \beta = \frac{q}{c}$$

Система отсчета S' движется относительно системы отсчета S со скоростью $-\mathbf{q}$. Если подставить $\mathbf{r}_\parallel$ и $\mathbf{r}_\perp$ в (1.1), то получим искомый вид:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + (\theta - 1)\,\frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}{q^2}\,\mathbf{q} + \theta\,\mathbf{q}t, \qquad t' = \theta\left(t + \frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}{c^2}\right) \tag{1.2}$$

Из инвариантности фазы $2\pi i\,(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \nu t)$ следует, что

$$\mathbf{K} = \left\{\mathbf{k};\ i\,\frac{\nu}{c}\right\} = \left\{\frac{\nu}{c}\,\mathbf{l};\ i\,\frac{\nu}{c}\right\}$$

будет представлять собой 4-вектор, преобразующийся по формулам $K_i' = (\partial x_i' / \partial x_l) K_l$, где элементы матрицы преобразования $\partial x_i' / \partial x_l$ находятся из (1.2) с заменой t на $\tau = ict$. Таким образом, получим

$$\frac{\nu'}{c}\mathbf{l}' = \frac{\nu}{c}\left[\mathbf{l} + (\theta - 1)\frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{l}}{q^2}\mathbf{q} + \frac{\mathbf{q}}{c}\theta\right], \qquad i\frac{\nu'}{c} = i\frac{\nu}{c}\theta\left[1 + \frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{l}}{c}\right] \tag{1.3}$$

Введем обозначение

$$L = \theta\left[1 + \frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{l}}{c}\right] \tag{1.4}$$

Тогда равенства (1.3) примут вид:

$$\nu' = \nu L, \qquad \mathbf{l}' = \frac{1}{L}\left[\mathbf{l} + (\theta - 1)\frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{l}}{q^2}\mathbf{q} + \frac{\mathbf{q}}{c}\theta\right] \tag{1.5}$$

При помощи этих формул найдем, что в системе отсчета S'

$$L = \frac{1}{\theta(1 - \mathbf{q}\cdot\mathbf{l}'/c)} \tag{1.6}$$

Связь элементов телесных углов и частот в обеих системах отсчета устанавливается дифференцированием (1.6) при $q = \text{const}$ и (1.5) при $L = \text{const}$ соответственно:

$$d\omega' = \frac{1}{L^2}d\omega, \qquad d\nu' = Ld\nu \tag{1.7}$$

Выразим интенсивность излучения $I'_{\nu'}$ в системе отсчета S' через интенсивность излучения I_ν в системе отсчета S, исходя из корпускулярного смысла теории переноса излучения. Пусть в S' покоящаяся площадка dS' расположена перпендикулярно $\mathbf{q}$. Число квантов излучения с частотой от ν' до $\nu' + d\nu'$, проходящих через эту площадку за время dt' под углом φ' к нормали внутри телесного угла $d\omega'$, пропорционально

$$\frac{I'_{\nu'}}{\nu'}dS'd\nu'dt'd\omega'\frac{\mathbf{l}'\cdot\mathbf{q}}{q} \tag{1.8}$$

Это должно совпадать с числом квантов, подсчитанным в системе S:

$$\frac{I_\nu}{\nu}dS\,d\nu\,dt\,d\omega\frac{\mathbf{l}\cdot\mathbf{q}}{q} + \frac{I_\nu}{\nu}\frac{q}{c}dS\,d\nu\,dt\,d\omega \tag{1.9}$$

Здесь элементарная площадка dS перпендикулярна $\mathbf{q}$ и покоится в системе отсчета S', причем $dS' = dS$; второй член представляет собой число квантов данного сорта, заключенных в объеме $dSqdt$. Приравнивая (1.9) и (1.8) при помощи (1.4) — (1.7) и уравнения собственного времени $dt' = \theta^{-1}dt$ в S' (последнее можно получить из (1.2) с $dr' = 0$), находим:

$$I'_{\nu'} = L^3 I_\nu \tag{1.10}$$

Пользуясь (1.5), можно представить (1.10) в виде инварианта

$$\frac{I'_{\nu'}}{\nu'^3} = \frac{I_\nu}{\nu^3} = \text{inv} \tag{1.11}$$

Отсюда видно, что I_ν / ν^3 с точностью до постоянного множителя есть Лоренц — инвариантная функция распределения фотонов [2, 3].

Уравнение переноса излучения может быть сразу написано в системе отсчета S. На основании баланса энергии

$$(1/c)\dot{I}_\nu + \mathbf{l}\cdot\nabla I_\nu = -\rho k_\nu I_\nu - \rho\sigma_\nu I_\nu + \rho\varepsilon_\nu +$$
$$+ \int_0^\infty \rho\sigma_{\nu_1}\frac{d\nu_1}{4\pi}\int_{(4\pi)} I_{\nu_1}(\mathbf{r}, \mathbf{l}_1, t)\,\Omega(\nu_1, \nu; \mathbf{l}_1, \mathbf{l}, \mathbf{r}, t)\,d\omega_1 \tag{1.12}$$

В этом уравнении учтены процессы поглощения, рассеяния и излучения радиации (массовые коэффициенты поглощения, рассеяния и излучения соответственно равны k_ν, σ_ν и ε_ν; Ω—ядро интегрального члена рассеяния в данный пучок, обращающееся в единицу при когерентности и изотропности рассеяния).

Установим связь феноменологических коэффициентов k_ν, σ_ν, ε_ν и Ω с атомными константами взаимодействия радиации с веществом. Для этой цели прежде всего рассмотрим трансформационные свойства оператора

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{l}\cdot\nabla$$

Легко вычислить из (1.2): (1.13)

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}=\theta\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}+\frac{\mathbf{q}\cdot\nabla'}{c}\right],\ \mathbf{l}\cdot\nabla=\mathbf{l}\cdot\left[\nabla'+(\theta-1)\frac{\mathbf{q}}{q^2}\,\mathbf{q}\cdot\nabla'+\frac{1}{c^2}\,\theta\mathbf{q}\,\frac{\partial}{\partial t'}\right]$$

Если далее в правую часть этих формул подставить $\mathbf{l}$ через $\mathbf{l}'$, использовав для этой цели обращение формулы (1.5) (одновременная замена $\mathbf{l}$ на $\mathbf{l}'$ и $\mathbf{q}$ на $-\mathbf{q}$, в том числе и в L), и сложить оба операторных соотношения, то найдем

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{l}\cdot\nabla=L\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{l}'\cdot\nabla'\right] \tag{1.14}$$

или, согласно (1.5), в инвариантном виде:

$$\nu\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{l}\cdot\nabla\right]=\nu'\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}+\mathbf{l}'\cdot\nabla'\right]=\mathrm{inv} \tag{1.15}$$

При помощи инвариантов (1.11) — (1.15) преобразуем уравнение переноса (1.12) в систему отсчета S'. Для этого умножим его на $1/\nu^2$ и образуем уже полученные инварианты:

$$\nu\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{l}\cdot\nabla\right]\frac{I_\nu}{\nu^3}=-(\rho k_\nu\nu)\frac{I_\nu}{\nu^3}-(\rho\sigma_\nu\nu)\frac{I_\nu}{\nu^3}+$$

$$+\left(\frac{\rho\varepsilon_\nu}{\nu^2}\right)+\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_{(4\pi)}(\rho\sigma_{\nu_1}\nu_1)\frac{I_{\nu_1}}{\nu_1{}^3}\left(\frac{\nu_1\Omega(\nu_1,\nu,\mathbf{l}_1,\mathbf{l},\mathbf{r},t)}{\nu^2}\right)\nu_1 d\nu_1 d\omega_1 \tag{1.16}$$

Под интегралом здесь также выделен инвариант $\nu_1 d\nu_1 d\omega_1$, вытекающий из (1.5) и (1.7). Уравнение (1.16) имеет релятивистски ковариантный вид. В скобках заключены новые инвариантные выражения, которые следуют из инвариантности левой части (1.16) и сомножителей этих выражений. Таким образом, в системе отсчета S' мы имеем: (1.17)

$$\nu'\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}+\mathbf{l}'\cdot\nabla'\right]\frac{I'_{\nu'}}{\nu'^3}=-(\rho'k'_{\nu'}\nu')\frac{I'_{\nu'}}{\nu'^3}-(\rho'\sigma'_{\nu'}\nu')\frac{I'_{\nu'}}{\nu'^3}+$$

$$+\left(\frac{\rho'\varepsilon'_{\nu'}}{\nu'^2}\right)+\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_{(4\pi)}(\rho'\sigma'_{\nu'_1}\nu_1{}')\frac{I'_{\nu_1'}}{\nu_1{}'^3}\left(\frac{\nu_1{}'\Omega'(\nu_1{}',\nu';\mathbf{l}_1{}',\mathbf{l}',\mathbf{r}',t')}{\nu'^2}\right)\nu_1{}'d\nu_1{}'\,d\omega_1{}'$$

Заметим, что здесь выносить $1/\nu'^3$ из под знака дифференцирования уже нельзя, если под S' подразумевать собственную систему отсчета в каждой точке пространства и в любой момент времени. Выпишем четыре новых инвариантных выражения:

$$\rho k_\nu\nu=\rho'k'_{\nu'}\nu'=\mathrm{inv},\qquad \rho\,\frac{\varepsilon_\nu}{\nu^2}=\rho'\,\frac{\varepsilon'_{\nu'}}{\nu'^2}=\mathrm{inv} \tag{1.18}$$

$$\rho\sigma_\nu\nu=\rho'\sigma'_{\nu'}\nu'=\mathrm{inv},\qquad \frac{\nu_1\Omega(\nu_1,\nu;\mathbf{l}_1,\mathbf{l},\mathbf{r},t)}{\nu^2}=\frac{\nu_1{}'\Omega'(\nu_1{}',\nu';\mathbf{l}_1{}',\mathbf{l}',\mathbf{r}',t')}{\nu'^2}=\mathrm{inv}$$

Далее, если S' — собственная система отсчета, положим $\mathbf{q} = -\mathbf{v}$, где $\mathbf{v}$ — локальная макроскопическая скорость движения вещества, и заменим штрихи на индекс нуль. Тогда при помощи (1.18) выразим феноменологические коэффициенты уравнения (1.12) через атомные константы взаимодействия радиации с веществом

$$\rho k_\nu = L\rho_0 k_{\nu_0}{}^\circ, \qquad \rho\varepsilon_\nu = \frac{1}{L^2}\rho_0\varepsilon_{\nu_0}{}^\circ, \qquad \rho\sigma_\nu = L\rho_0\sigma_{\nu_0}{}^\circ \tag{1.19}$$

$$\Omega(\nu_1, \nu; \mathbf{l}_1, \mathbf{l}, \mathbf{r}, t) = \frac{L_1}{L^2}\Omega_0(\nu_{10}, \nu_0; \mathbf{l}_{10}, \mathbf{l}_0, \mathbf{r}_0, t_0)$$

Выражения L в (1.19) можно записать, согласно (1.4) и (1.6) (для L_1 выражения аналогичны):

$$L = \frac{1}{\theta(1 + \mathbf{v}\cdot\mathbf{l}_0/c)} = \theta\left(1 - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{l}}{c}\right) \tag{1.20}$$

Итак, в наиболее общем случае процесс переноса излучения в движущейся среде может быть описан в фиксированной системе отсчета уравнением переноса (1.12) совместно с соотношениями (1.19). В собственной системе отсчета S', обозначаемой как S_0, имеет место уравнение (1.17). При этом нужно оговаривать, что ν' $(= \nu_0)$ зависит от $\mathbf{r}'$ $(= \mathbf{r}_0)$ и t' $(= t_0)$.

§ 2. Тензор энергии-импульса излучения в собственной системе отсчета. Запишем систему уравнений идеальной среды с учетом взаимодействия с излучением [1,6,7]

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = F_i, \qquad T_{ik} = (p + \varepsilon)\, u_i u_k + p\delta_{ik}, \qquad \frac{\partial(\rho_0 u_i)}{\partial x_i} = 0 \tag{2.1}$$

Здесь p — скалярное давление в среде, ε — внутренняя энергия с учетом энергии покоя, отнесенная к единице объема в собственной системе отсчета, ρ_0 — плотность среды в собственной системе отсчета.

Первое из уравнений (2.1), которое представляет собой закон сохранения энергии-импульса среды с учетом излучения, содержит в правой части 4-вектор F_i, описывающий обмен энергией-импульсом с излучением. Тензор энергии-импульса среды T_{ik} выражен через 4-скорость:

$$u_\alpha = \frac{v_\alpha}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (\alpha = 1, 2, 3), \qquad u_4 = \frac{i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{2.2}$$

Последнее уравнение (2.1) представляет собой закон сохранения числа частиц в среде. Легко понять, что 4-вектор F_i может быть следующим образом выражен через характеристики излучения:

$$F_\alpha = \frac{1}{c}\iint(\rho k_\nu I_\nu - \rho\varepsilon_\nu)\, l_\alpha d\nu d\omega, \qquad F_4 = -\frac{1}{ic}\iint(\rho k_\nu I_\nu - \rho\varepsilon_\nu)\, d\nu d\omega \tag{2.3}$$

Здесь интенсивность излучения I_ν удовлетворяет уравнению переноса (1.12) в фиксированной системе отсчета; l_α — направляющий косинус луча. В дальнейшем ограничимся случаем, когда рассеянием излучения в среде можно пренебречь. Коэффициенты поглощения и излучения радиации определяются из соотношений (1.19) с учетом (1.20). С другой стороны, F_i при помощи уравнения переноса (1.12) можно представить как дивергенцию тензора энергии-импульса излучения:

$$F_i = -\frac{\partial W_{ik}}{\partial x_k} \tag{2.4}$$

$$W_{\alpha\beta} = \frac{1}{c}\iint l_\alpha l_\beta I_\nu d\nu\, d\omega, \quad W_{\alpha 4} = \frac{i}{c}\iint l_\alpha I_\nu\, d\nu\, d\omega, \quad W_{44} = -\frac{1}{c}\iint I_\nu\, d\nu\, d\omega \tag{2.5}$$

Доказательство тензорного характера величины W_{ik} весьма просто существляется прямым способом, если воспользоваться матрицей преобразования $\partial x_i' \,/\, \partial x_k$ и соотношениями (1.5), (1.7) и (1.10). Однако и без этого по определению I_ν величины

$$K_{\alpha\beta} = \frac{1}{c}\iint l_\alpha l_\beta I_\nu d\nu\, d\omega, \qquad S_\alpha = \iint l_\alpha I_\nu\, d\nu d\omega, \qquad U = \frac{1}{c}\iint I_\nu d\nu\, d\omega$$

представляют собой компоненты потока импульса излучения, компоненты потока энергии излучения и плотность энергии излучения соответственно.

Согласно общим свойствам тензора энергии-импульса, справедливым для произвольной физической системы [6]

$$W_{\alpha\beta} = K_{\alpha\beta}, \qquad W_{\alpha 4} = (i/c) S_\alpha, \qquad W_{44} = -U$$

Величины W_{ik} из (2.5) удовлетворяют этим соотношениям. Закон сохранения энергии-импульса среды с излучением (2.1) можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(T_{ik} + W_{ik}) = 0 \tag{2.6}$$

Далее перейдем к вычислению тензора W_{ik} при почти равновесных условиях, т. е. когда характерная длина пробега излучения в среде меньше масштаба изменения термодинамических величин p, ε, ρ_0 и скорости движения среды $\mathbf{v}$. Сначала вычислим W_{ik} в собственной системе отсчета S_0, что значительно проще. Из уравнения (1.12) во втором приближении, пренебрегая рассеянием и учитывая (1.19), получим (2.7)

$$I_\nu = \frac{\varepsilon_\nu}{k_\nu} - \frac{1}{\rho k_\nu}\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{l}\cdot\nabla\right]\frac{\varepsilon_\nu}{k_\nu} = \frac{1}{L^3}B_{\nu_0} - \frac{1}{L\rho_0 k_{\nu_0}{}^\circ}\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{l}\cdot\nabla\right]\frac{1}{L^3}B_{\nu_0}$$

В собственной системе отсчета предполагается справедливым [4, 5] закон Кирхгофа $\varepsilon_{\nu_0}{}^\circ \,/\, k_{\nu_0}{}^\circ = B_{\nu_0}$. Чтобы найти I_ν в собственной системе отсчета, нужно фиксированную систему отсчета отождествить с собственной системой отсчета в данной точке пространства $\mathbf{r}$ и в данный момент времени t. Для этого в (2.7) положим $\mathbf{v} = 0$, за исключением выражений, подлежащих дифференцированию (при этом учтем, что ν_0 зависит от $\mathbf{v}$). Тогда из (2.7), подставляя L из (1.20) и имея в виду, что

$$B_{\nu_0} \sim \frac{\nu_0{}^3}{\exp\,(h\nu_0 \,/\, kT) - 1}$$

найдем (2.8)

$$I_{\nu_0} = B_{\nu_0} - \frac{1}{\rho_0 k_{\nu_0}{}^\circ}\cdot\frac{\partial B_{\nu_0}}{\partial T}\left\{\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t_0} + \mathbf{l}_0\cdot\nabla_0\right]T - \frac{T}{c}\left[\mathbf{l}_0\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t_0} + \mathbf{l}_0\cdot\nabla_0\right)\mathbf{v}_0\right]\right\}$$

Здесь использован тот факт, что под знаком дифференцирования заданной постоянной является $\nu = \nu_0 \,/\, L$ (см. (1.5)). Эту формулу для интенсивности излучения I_{ν_0} можно получить иначе, исходя из уравнения переноса (1.17), относящегося к собственной системе отсчета (рассеянием пренебрегается). Во втором приближении из (1.17) имеем

$$\overset{\circ}{I}_{\nu_0} = B_{\nu_0} - \frac{\nu_0{}^3}{\rho_0 k_{\nu_0}{}^0}\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t_0} + \mathbf{l}_0\cdot\boldsymbol{\nabla}_0\right]\frac{B_{\nu_0}}{\nu_0{}^3} \tag{2.9}$$

Это снова приводит к (2.8), если положить $\nu_0 = \nu L$ и в выражении для L считать $\mathbf{v} = 0$ вне знака дифференцирования. Таким образом, $\overset{\circ}{I}_{\nu_0} = I_{\nu_0}$, что естественно, поскольку обе системы отсчета тождественны друг другу. Следует заметить, что величина $\mathbf{v}_0$ в (2.8) относится к собственной системе отсчета. Далее выражение I_{ν_0} подставим в (2.5) и вычислим путем интегрирования по частоте и направлениям тензор $\overset{\circ}{W}_{ik}$ в собственной системе отсчета. Введем обозначение средней Росселанда

$$\frac{1}{\varkappa}=\left(\frac{dB_0}{dT}\right)^{-1}\int\limits_0^\infty \frac{1}{k_{\nu_0}{}^\circ}\frac{\partial B_{\nu_0}}{\partial T}d\nu_0, \qquad B_0=\int\limits_0^\infty B_{\nu_0}d\nu_0 \tag{2.10}$$

При помощи этой формулы во всех элементах $W_{ik}{}^\circ$ производится интегрирование I_{ν_0} из (2.8) по частоте

$$\int\limits_0^\infty I_{\nu_0}d\nu_0=B_0-\frac{1}{\rho_0\varkappa}\frac{dB_0}{dT}\left[\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t_0}+\mathbf{l}_0\cdot\nabla_0\right)T+\frac{T}{c}\,\mathbf{l}_0\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t_0}+\mathbf{l}_0\nabla_0\right)\mathbf{v}_0\right] \tag{2.11}$$

Оставшееся интегрирование по телесному углу дает:

$$W_{\alpha\beta}{}^\circ=\delta_{\alpha\beta}\frac{4\pi}{3c}B_0-\frac{4\pi}{c\rho_0\varkappa}\frac{dB}{dT}\left[\frac{1}{3c}\,\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial T}{\partial t_0}+\frac{T}{15c}\left(\frac{\partial v_{0\alpha}}{\partial x_{0\beta}}+\frac{\partial v_{0\beta}}{\partial x_{0\alpha}}+\delta_{\alpha\beta}\nabla_0\cdot\mathbf{v}_0\right)\right]$$

$$W_{\alpha4}{}^\circ=-i\frac{4\pi}{c\rho_0\varkappa}\frac{dB}{dT}\left[\frac{1}{3}\frac{\partial T}{\partial x_{0\alpha}}+\frac{T}{3c^2}\frac{\partial v_{0\alpha}}{\partial t_0}\right] \tag{2.12}$$

$$W_{44}{}^\circ=-\frac{4\pi}{c}B_0+\frac{4\pi}{c\rho_0\varkappa}\frac{dB_0}{dT}\left[\frac{1}{c}\frac{\partial T}{\partial t_0}+\frac{T}{3c}\nabla_0\cdot\mathbf{v}_0\right]$$

Таким образом, в (2.12) получены выражения тензора энергии-импульса излучения в собственной системе отсчета S_0 для произвольной точки пространства и момента времени.

Во избежание недоразумения, здесь следует заметить, что при вычислении тензора $W_{ik}{}^\circ$ нельзя подставлять в интегралы (2.5) $I_{\nu_0}{}^\circ$ из решения уравнения (1.17) с $\mathbf{v}\neq 0$. Формальное построение таких величин по формулам, конечно, можно сделать. Но их совокупность в этом случае уже не будет представлять собой тензора. Отличие от тензора возникает только в членах второго приближения, где существенна зависимость $\mathbf{v}$ от $\mathbf{r}_0$, t_0. В отмеченном обстоятельстве отражается нетривиальный характер прямого доказательства тензорного характера величин W_{ik} из (2.5), когда I_ν удовлетворяет уравнению переноса (1.12) в фиксированной системе отсчета S. При вычислении I_{ν_0} по (2.8) использовалась интенсивность I_ν определенная в (2.7) при помощи (1.12).

§ 3. Тензор энергии-импульса излучения в фиксированной системе отсчета. В уравнения (2.6) входит тензор W_{ik}, вычисленный в фиксированной системе отсчета S. Полученный в предыдущем параграфе тензор $\overset{\circ}{W}_{ik}$ может быть теперь использован, чтобы с помощью известных формул преобразования тензоров [6] найти W_{ik}:

$$W_{ik}=\frac{\partial x_i}{\partial x_l{}^\circ}\frac{\partial x_k}{\partial x_m{}^\circ}\overset{\circ}{W}_{lm} \tag{3.1}$$

Система отсчета S движется относительно системы отсчета S_0 со скоростью $-\mathbf{v}$. Поэтому из формул преобразования (1.2) получим выражения для $\mathbf{r}$ и t, заменив $\mathbf{q}$ на $\mathbf{v}$ и поменяв местами штрихованные величины с нештрихованными (кроме того, вместо штрихов в собственной системе отсчета поставим индексы нуль),

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+(\theta-1)\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}_0}{v^2}\mathbf{v}-\frac{i}{c}\theta\mathbf{v}\tau_0, \qquad \tau=\theta\left[\tau_0+i\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}_0}{c}\right] \tag{3.2}$$

Из формул (3.2) находим матрицу преобразования

$$\|\alpha_{ik}\|=\left\|\frac{\partial x_i}{\partial x_k{}^\circ}\right\|=\left\|\begin{matrix}\delta_{\alpha\beta}+(\theta-1)\,v_\alpha v_\beta/v^2 & -(i/c)\,\theta v_\alpha\\ (i/c)\,\theta v_\beta & \theta\end{matrix}\right\| \tag{3.3}$$

Специально подчеркнем, что в рассматриваемой задаче преобразования Лоренца применяются в векторном виде (3.3), так как поле скоростей $\mathbf{v}$ в фиксированной системе отсчета S предполагается произвольным.

В первом приближении, в котором тензор $W_{ik}^{\circ} = W_{ik}^{\circ(1)}$ имеет диагональный вид, после преобразования (3.1) получаем известное выражение [1]:

$$\| W_{ik}^{(1)} \| = \left\| \begin{matrix} \frac{4\pi B_0}{3c}\,\delta_{\alpha\beta} + \frac{4\pi B_0}{3c}\,\frac{4\theta^2}{c^2}\,v_\alpha v_\beta & i\,\frac{4\pi B_0}{3c}\,\frac{4\theta^2}{c}\,v_\alpha \\ i\,\frac{4\pi B_0}{3c}\,\frac{4\theta^2}{c}\,v_\beta & \frac{4\pi B_0}{3c} - \frac{4\pi B_0}{3c}\,4\theta^2 \end{matrix} \right\| \qquad (3.4)$$

В дальнейшем будет вычисляться добавка в тензоре W_{ik}, появляющаяся во втором приближении. Введем обозначение

$$W_{ik} = W_{ik}^{(1)} + W_{ik}^{(2)} \qquad (3.5)$$

Согласно (3.1)

$$W_{ik}^{(2)} = \alpha_{il}\alpha_{km}W_{lm}^{0(2)} = A\alpha_{il}\alpha_{km}F_{lm}, \qquad A = -\frac{1}{c}\,\frac{4\pi}{\rho_0\varkappa}\,\frac{dB_0}{dT} \qquad (3.6)$$

$$F_{\alpha\beta} = i\,\frac{1}{3}\,\delta_{\alpha\beta}\,\frac{\partial T}{\partial\tau_0} + \frac{T}{15}\left[\frac{\partial\gamma_{0\beta}}{\partial x_{0\alpha}} + \frac{\partial\gamma_{0\alpha}}{\partial x_{0\beta}} + \delta_{\alpha\beta}\nabla_0\cdot\boldsymbol{\gamma}_0\right] \qquad (3.7)$$

$$F_{\alpha 4} = i\left[\frac{1}{3}\,\frac{\partial T}{\partial x_{0\alpha}} + i\,\frac{T}{3}\,\frac{\partial\gamma_{0\alpha}}{\partial\tau_0}\right], \qquad F_{44} = -\left[i\,\frac{\partial T}{\partial\tau_0} + \frac{T}{3}\,\nabla_0\cdot\boldsymbol{\gamma}_0\right], \qquad \boldsymbol{\gamma}_0 = \frac{\mathbf{v}_0}{c}$$

Используя (3.3), из формул (3.7) получим выражения для элементов тензора $W_{ik}^{(2)}$ через F_{lm}, приведенные в несколько ином виде в работе [3]:

$$\frac{1}{A}W_{\mu\nu}^{(2)} = F_{\mu\nu} + \frac{\theta-1}{\beta^2}\,\beta_\eta\,(\beta_\mu F_{\eta\nu} + \beta_\nu F_{\eta\mu}) + \frac{(\theta-1)^2}{\beta^4}\,\beta_\mu\beta_\nu\beta_\eta\beta_\rho F_{\eta\rho} -$$
$$- \theta^2\beta_\mu\beta_\nu F_{44} - i\theta\left[\beta_\nu F_{\mu 4} + \beta_\mu F_{\nu 4} + 2\,\frac{\theta-1}{\beta^2}\,\beta_\mu\beta_\nu\beta_\eta F_{\eta 4}\right] \qquad (3.8)$$

$$\frac{1}{A}W_{\mu 4}^{(2)} = \theta\left[i\,\frac{\theta-1}{\beta^2}\,\beta_\mu\beta_\eta\beta_\rho F_{\eta\rho} + i\beta_\eta F_{\mu\eta} + \right.$$
$$\left. + F_{\mu 4} + \frac{\theta(1+\beta^2)-1}{\beta^2}\,\beta_\mu\beta_\eta F_{\eta 4} - i\beta_\mu\theta F_{44}\right] \qquad (3.9)$$

$$\frac{1}{A}W_{44}^{(2)} = \theta^2\,(-\beta_\eta\beta_\rho F_{\eta\rho} + 2i\beta_\eta F_{\eta 4} + F_{44}) \qquad (3.10)$$

Подстановки F_{lm} из (3.7) в уравнения $W_{ik}^{(2)}$ (3.8) — (3.10) еще недостаточно для получения искомого выражения. В (3.7) нужно перейти к координатам — времени и скорости среды в системе отсчета S. При этом следует использовать следующие из (3.2) операторные соотношения:

$$i\,\frac{\partial}{\partial\tau_0} = \theta\left[i\,\frac{\partial}{\partial\tau} + \boldsymbol{\beta}\cdot\nabla\right], \qquad \nabla_0 = \nabla + i\theta\boldsymbol{\beta}\,\frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{(\theta-1)\,\boldsymbol{\beta}}{\beta^2}\,\boldsymbol{\beta}\cdot\nabla \qquad (3.11)$$

а также релятивистский закон сложения скоростей в векторном виде.

$$\boldsymbol{\gamma}_0 = \frac{1}{\theta\,(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\gamma})}\left[\boldsymbol{\gamma} + \frac{(\theta-1)\,\boldsymbol{\beta}}{\beta^2}\,\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\beta}\theta\right] \qquad (3.12)$$

В любой данной мировой точке $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\beta}$ и после проведения дифференцирования также полагается $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\beta}$. Из (3.12) видно, что в таком случае действие любого дифференциального оператора D на γ_0 сводится к следующему:

$$D\gamma_0 = \theta\left[D\gamma + \frac{(\theta-1)\beta}{\beta^2}\beta\cdot D\gamma\right] \equiv \theta\left[D\beta + \frac{(\theta-1)\beta}{\beta^2}\beta\cdot D\beta\right] \qquad (3.13)$$

Подставляя F_{ik} из (3.7) в (3.8) — (3.10) с применением соотношений (3.11), (3.13) и вводя 4-скорость (2.2), получим (3.14)

$$\frac{1}{A}W_{\mu\nu}^{(2)} = \frac{1}{3}(\delta_{\mu\nu} + 6u_\mu u_\nu)\left[u_4\frac{\partial}{\partial\tau} + u_\eta\frac{\partial}{\partial x_\eta}\right]T + \frac{1}{3}\left[u_\mu\frac{\partial}{\partial x_\nu} + u_\nu\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right]T +$$

$$+\delta_{\mu\nu}\frac{T}{15}\left[\frac{\partial u_4}{\partial\tau} + \frac{\partial u_\eta}{\partial x_\eta}\right] + \frac{T}{15}\left[\frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu} + \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu}\right] + \frac{2}{5}T\left[\frac{\partial}{\partial\tau}(u_\mu u_\nu u_4) + \frac{\partial}{\partial x_\eta}(u_\mu u_\nu u_\eta)\right]$$

$$\frac{1}{A}W_{\mu 4}^{(2)} = \left[2u_\mu u_4^2 + \frac{1}{3}u_\mu\right]\frac{\partial T}{\partial\tau} + 2u_\mu u_4 u_\eta\frac{\partial T}{\partial x_\eta} + \qquad (3.15)$$

$$+\frac{1}{3}u_4\frac{\partial T}{\partial x_\mu} + \frac{T}{15}\left[\frac{\partial u_\mu}{\partial\tau} + \frac{\partial u_4}{\partial x_\mu}\right] + \frac{2}{5}T\left[\frac{\partial}{\partial\tau}(u_\mu u_4^2) + \frac{\partial}{\partial x_\eta}(u_\eta u_\mu u_4)\right]$$

$$\frac{1}{A}W_{44}^{(2)} = (2u_4^3 + u_4)\frac{\partial T}{\partial\tau} + \left(2u_4^2 + \frac{1}{3}\right)u_\eta\frac{\partial T}{\partial x_\eta} + \qquad (3.16)$$

$$+\frac{T}{5}\left[\frac{\partial u_4}{\partial\tau} + \frac{1}{3}\frac{\partial u_\eta}{\partial x_\eta}\right] + \frac{2}{5}T\left[\frac{\partial}{\partial\tau}(u_4^3) + \frac{\partial}{\partial x_\eta}(u_\eta u_4^2)\right]$$

Легко проверить, что выражения $W_{ik}^{(2)}$ совпадает с формулой (8) в [1], если учесть небольшую разницу в множителях компонент тензоров.

В заключение приведем $W_{ik}^{(2)}$ в наиболее простом галилеевском одномерном плоском случае

$$u_\alpha = \begin{cases}\beta & (\alpha = 1),\\ 0 & (\alpha = 2, 3),\end{cases} \qquad u_4 = i, \qquad \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \begin{cases}\partial/\partial x & (\alpha = 1)\\ 0 & (\alpha = 2, 3)\end{cases} \qquad (3.17)$$

Будем пренебрегать всеми членами $\sim\beta^2$ и получим из (3.14) — (3.16)

$$\frac{1}{A}W_{11}^{(2)} = \frac{1}{3c}\frac{\partial T}{\partial t} + \beta\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{T}{5}\frac{\partial\beta}{\partial x} \qquad (3.18)$$

$$\frac{1}{A}W_{14}^{(2)} = \frac{i}{3}\frac{\partial T}{\partial x}, \qquad \frac{1}{A}W_{44}^{(2)} = -\frac{5}{3}\beta\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{T}{3}\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (3.19)$$

По сравнению с нерелятивистским рассмотрением [4, 5] здесь новым результатом будет появление членов вязкости излучения в (3.18).

Таким образом, решение весьма широкого класса задач радиационной гидродинамики может быть получено на основе уравнений (2.6) с подстановкой W_{ik} из (3.4) и (3.14) — (3.16), а в простейшем галилеевском одномерном случае из (3.18) — (3.19).

Поступила 14 III 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Thomas L. H. The radiation field in a fluid in motion. The Quarterly Journal of Mathematics, Oxford series, 1930 vol. 1.
2. Синдж Д. Л. Релятивистский газ. М., ГИИЛ, 1960.
3. Прокофьев В. А. Уравнение переноса в релятивистской радиационной гидродинамике. ДАН СССР, 1961, 140, стр. 1033.
4. Чандрасекар С. Введение в учение о строении звезд. М., ИЛ, 1950.
5. Франк-Каменецкий Д. А. Физические процессы внутри звезд. М., Гос. изд. физ.- мат. лит., 1959.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. Изд. 2-е, МЛ, ГИТТЛ, 1948.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Изд. 2-е, перераб. и дополн., М., ГИТТЛ, 1953.