ПМТФ, № 1, 1965

РЕШАЕМАЯ МОДЕЛЬ СЛАБОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

В. Е. Захаров

(Новосибирск)

Рассматривается модель слабой турбулентности, допускающая решение. Имеются три типа взаимодействующих волн, законы дисперсии которых выбраны так, что возможен переход к диффузионному приближению в k-пространстве. Находится установившийся спектр турбулентности при наличии областей неустойчивости, прозрачности и затухания. В работе содержится также изложение формального аппарата нелинейной волновой динамики.

При рассмотрении турбулентности плазмы встречаются случаи, когда турбулентное состояние представляет собой совокупность интенсивных взаимодействующих колебаний. Если принять, что амплитуды колебаний не слишком велики, и воспользоваться гипотезой о случайности фаз, то такое состояние можно описывать при помощи кинетического уравнения [1-4]. При этом естественно говорить о слабой турбулентности плазмы.

Решение кинетических уравнений наталкивается на большие математические трудности, так что обычно пользуются оценками по порядку величины.

Подобная ситуация встречается не только в плазме, но и, например, в теории гравитационных волн на поверхности жидкости. Поэтому целесообразно говорить об общей нелинейной волновой динамике, т. е. рассматривать произвольную среду, в которой могут распространяться волны, нелинейно взаимодействующие между собой.

В рамках нелинейной волновой динамики можно построить модели, для которых возможно решение кинетических уравнений. Рассмотрение одной такой модели и является целью настоящей статьи.

Возможность решения модели возникает потому, что в данном случае возможно перейти к диффузионному приближению в $\mathbf{k}$-пространстве. При этом удается решить получающиеся дифференциальные уравнения и получить установившийся спектр турбулентности при наличии области неустойчивости и области затухания.

В статье используется аппарат нелинейной волновой динамики, частично применявшийся ранее в работах [1,5]. Ввиду того что этот аппарат не является общеизвестным, его изложение предпослано основному содержанию статьи.

§ 1. Формализм нелинейной волновой динамики. Сущность формализма состоит в переходе к новым переменным — комплексным амплитудам волн, являющимся классическими аналогами квантовых операторов рождения и уничтожения частиц. Метод перехода совпадает с методом вариации произвольных постоянных в теории дифференциальных уравнений.

Будем рассматривать распространение волн в бесконечной однородной среде. Пусть среда описывается набором n действительных переменных $\chi_1, \ldots, \chi_n$, зависящим от времени и координат, и эти переменные удовлетворяют уравнению, содержащему линейную и билинейную часть, инвариантному относительно пространственно-временных сдвигов.

Самый общий вид такого уравнения есть

$$\int_{-\infty}^{t} dt_1 \int d\mathbf{r}_1 G_{nm}(t-t_1, \mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\, \chi_m(t_1, \mathbf{r}_1)\, dt_1\, d\mathbf{r}_1 = \tag{1.1}$$

$$= \int_{-\infty}^{t} dt_1 \int_{-\infty}^{t} dt_2 \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 L_{nml}(t-t_1,\ t-t_2,\ \mathbf{r}-\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}-\mathbf{r}_2)\, \chi_m(t_1,\mathbf{r}_1)\ \chi_l(t_2,\mathbf{r}_2)$$

Здесь G_{nm} и L_{nml} — действительные коэффициентные функции. Если уравнение (1.1) будут дифференциальными, то они будут содержать производные δ-функций.

После преобразования Фурье по времени и координатам получим

$$G_{mn}(\mathbf{k}, \omega)\,\chi_m(k, \omega) = \int d\omega_1 \int d\omega_2 \int d\mathbf{k}_1 \int d\mathbf{k}_2 L_{nml}(\omega, \omega_1, \omega_2, \mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \times$$
$$\times\, \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2)\,\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\,\chi_m(\mathbf{k}_1, \omega_1)\,\chi_l(\mathbf{k}_2, \omega_2) \quad (1.2)$$

Вследствие действительности исходных функций выполняются соотношения эрмитовости

$$\chi_n^+(k, \omega) = \chi_n^*(-\mathbf{k}, -\omega) = \chi_n(\mathbf{k}, \omega), \quad G_{nm}^+(\mathbf{k}, \omega) = G_{nm}(\mathbf{k}, \omega) \quad (1.3)$$
$$L_{nml}^+(\omega, \omega_1, \omega_2, \mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = L_{nml}(\omega, \omega_1, \omega_2, \mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$$

Будем считать ω комплексным. При этом G и L обладают определенными аналитическими свойствами по частотным переменным.

Для того чтобы имело смысл говорить о линеаризации, функция $L_{nml}(\omega, \omega_1, \omega_2, \mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ не должна обращаться в бесконечность при действительных значениях аргументов. Линеаризованное уравнение имеет вид

$$G_{nm}(\mathbf{k}, \omega)\,\chi_m(\mathbf{k}, \omega) = 0$$

Оно имеет решение при некоторых значениях $\omega_s(\mathbf{k})$, определяемых из условия

$$\det|G_{nm}| = 0 \quad (1.4)$$

Сделаем следующие предположения о нулях уравнения (1.4).

1) Число нулей конечно, что соответствует конечному числу типов волн, могущих распространяться в среде.

2) Нули в уравнение (1.4) входят парами, так что их можно нумеровать положительными и отрицательными индексами, причем

$$\omega_{\pm s}(\mathbf{k}) = \pm\,\omega_{0s}(\mathbf{k}) + i\nu(\mathbf{k}) \quad (1.5)$$

Действительную часть частоты можно выбрать положительной. Это условие есть следствие симметрии относительно отражения координат и выполняется в неподвижной среде.

3) Функция $\omega_{0s}(\mathbf{k}) \not\equiv 0$. Этим условием исключаются из рассмотрения неволновые движения среды. В реальных случаях, например в гидродинамике, такие движения могут присутствовать — тогда их необходимо рассматривать особо.

Не будем также рассматривать случай кратных корней уравнения (1.4) — он возникает, например, при рассмотрении волн различной поляризации в негиротропной среде. Принципиально этот случай не вызывает трудностей, но ведет к усложнению выкладок.

Общее эрмитово решение уравнения (1.4) есть

$$\chi_n(\mathbf{k}, \omega) = \sum_{s=-p}^{p} A_{ns}(\mathbf{k})\,a_s(\mathbf{k})\,\delta(\omega - \omega_s(\mathbf{k})), \quad A_{n,-s}(\mathbf{k}) = A_{ns}^+(\mathbf{k})$$
$$a_{-s}(\mathbf{k}) = a_s^+(\mathbf{k}) \quad (1.6)$$

Будем искать решение нелинейного уравнения (1.2) в виде

$$\chi_n(\mathbf{k}, \omega) = \sum_{s=-p}^{p} A_{ns}(\mathbf{k})\,a_s(\mathbf{k}, \omega) \quad (1.7)$$

Здесь $a_s(\mathbf{k}, \omega)$ — новые переменные. Подставим (1.7) в (1.2). Левая часть уравнения (1.2) приобретает вид

$$G_{nm}(\mathbf{k}, \omega)\,A_{ms}(\mathbf{k})\,a_s(\mathbf{k}, \omega) = G_{ns}^{(1)}(\mathbf{k}, \omega)\,(\omega - \omega_s(\mathbf{k}))\,a_s(\mathbf{k}, \omega) \quad (1.8)$$

Ранг r матрицы $G_{ns}^{(1)}$ равен рангу матрицы A_{ns} и, очевидно, не может быть больше $2p$. Если $r = 2p$, то преобразованное уравнение может быть сразу разрешено относительно $(\omega - \omega_s(\mathbf{k}))\,a_s(\mathbf{k}, \omega)$. Если $r < 2p$, то необходимо наложить $2p-r$ дополнительных условий на a_s. Условия эти выберем в виде

$$\sum_{s=-p}^{p} (\omega-\omega_s(\mathbf{k}))^{\alpha} a_s(\mathbf{k}) = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, 2p-r) \tag{1.9}$$

Очевидно, они независимы между собой и не выражаются линейно через $A_{ns}(\mathbf{k})$. Уравнения (1.8) и (1.9) могут быть разрешены относительно $(\omega-\omega_s(\mathbf{k}))\, a_s(\mathbf{k}, \omega)$. В результате получим

$$(\omega-\omega_s(\mathbf{k}))\, a_s = -\int d\omega_1 \int d\omega_2 \int d\mathbf{k}_1 \int d\mathbf{k}_2\, M_{ss_1s_2}(\omega, \omega_1, \omega_2, \mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \times$$
$$\times\, \delta(\omega-\omega_1-\omega_2)\, \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\, a_{s1}(\mathbf{k}_1, \omega_1)\, a_{s2}(\mathbf{k}_2, \omega_2) \tag{1.10}$$

Здесь $M_{ss_1s_2}$ — преобразованная функция L_{nml}. После обратного преобразования Фурье по времени получим

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - \omega_s(\mathbf{k})\right) a_s(\mathbf{k}, t) = \int_{-\infty}^{t} dt_1 \int_{-\infty}^{t} dt_2 M_{ss_1s_2}(t-t_1, t-t_2, \mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \times$$
$$\times\, \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\, a_{s_1}(t_1, \mathbf{k}_1)\, a_{s_2}(t_2, \mathbf{k}_2)\, d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \tag{1.11}$$

Для достаточно малых амплитуд уравнение (1.11) можно упростить. Совершим замену переменных

$$a_s(\mathbf{k}, t) = c_s(\mathbf{k}, t)\, e^{-i\omega_s(\mathbf{k})\, t} \tag{1.12}$$

Подставляя (1.12) в (1.11), получим

$$i\frac{\partial c_s}{\partial t} = \int d\mathbf{k}_1 \int d\mathbf{k}_2 \exp\{it[\omega_s(\mathbf{k}) - \omega s_1(\mathbf{k}_1) - \omega s_2(\mathbf{k}_2)]\} \int_0^{\infty} d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \times$$
$$\times\, M_{ss_1s_2}(\tau_1, \tau_2, \mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)\, c_{s1}(t-\tau_s, \mathbf{k}_1)\, c_{s2}(t-\tau, \mathbf{k}_2) \exp\{i[\omega_{s_1}(\mathbf{k}_1)\tau_1 + \omega_{s_2}(\mathbf{k}_2)\tau_2]\}$$

Если c_s достаточно малы, то можно пренебречь производными c_s по времени, как это делается в методе Боголюбова — Крылова, и вынести c_{s_1} и c_{s_2} из-под интегралов по τ. Возвращаясь к переменным a_s, получим

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - \omega_s(\mathbf{k})\right) a_s(\mathbf{k}, t) = \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 N_{ss_1s_2}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)\, \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\, a_{s_1}(\mathbf{k}_1)\, a_{s_2}(\mathbf{k}_2)$$

$$N_{ss_1s_2} = \int_0^{\infty} d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2\, M_{ss_1s_2}(\tau_1, \tau_2, \mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \exp\{i\omega_{s_1}(\mathbf{k}_1)\tau_1 + i\omega_{s_2}(\mathbf{k}_2)\tau_2\} \tag{1.13}$$

Если исходное уравнение имеет вид

$$i\frac{\partial \chi_n}{\partial t} + \int H_{nm}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\, \chi_m(\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}' = \iint H_{nml}^{(1)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}', \mathbf{r}-\mathbf{r}'')\, \chi_m(\mathbf{r}')\, \chi_l(\mathbf{r}'')\, d\mathbf{r}'\, d\mathbf{r}''$$

то уравнения сразу имеют вид (1.13).

Заметим, что коммутативный характер умножения величин χ и a_s нигде не использовался. Это означает, что проведенная процедура годится для квантовой теории. Уравнения (1.13) и (1.14) в этом случае будут гайзенберговскими уравнениями для операторов уничтожения и рождения частиц. Теперь заметим, что $a_{-s}(\mathbf{k}) = \overset{*}{a_s}(-\mathbf{k})$. Подставляя это соотношение в уравнение (1.13) и меняя знак, где это нужно, получим окончательно

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - \omega_s(\mathbf{k})\right) a_s(\mathbf{k}) = \int d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2 \,[N_{s\,s_1s_2}^{(1)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)\, \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\, a_{s_1}(\mathbf{k}_1) \times$$
$$\times\, a_{s_2}(\mathbf{k}_2) + 2N_{s\,s_1s_2}^{(2)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)\, \delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\, a_{s_1}^*(\mathbf{k}_1)\, a_{s_2}(\mathbf{k}_2) + N_{s\,s_1s_2}^{(3)} \times$$
$$\times\, (\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)\, \delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)\, a_{s_1}^*(\mathbf{k}_1)\, a_{s_2}^*(\mathbf{k}_2)] \tag{1.14}$$

Уравнения (1.14) будем называть уравнениями в нормальной форме. Их число совпадает с числом типов волн.

Особый интерес представляет случай, когда среда прозрачна. Тогда все $\omega_s(k)$ действительны, и существует такая нормировка a_s, что между $N^{(1)}$, $N^{(2)}$ и $N^{(3)}$ имеются определенные соотношения симметрии.

Если определить прозрачность среды как сохранение некоторого действительного функционала от a_s, имеющего билинейную и трилинейную части, то можно показать, что этот функционал H является гамильтонианом для системы, и (1.14) получаются варьированием H по правилу

$$i\frac{\partial a_s}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta a_s^*} \tag{1.15}$$

Самый общий вид такого гамильтониана есть

$$\begin{aligned} H = \sum_s \int \omega_s(\mathbf{k})\, a_s(\mathbf{k})\, a_s^*(\mathbf{k})\, d\mathbf{k} + \int [H_{s\,s_1 s_2}^{(1)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)\, a_s^*(\mathbf{k})\, a_{s_1}(\mathbf{k}_1)\, a_{s_2}(\mathbf{k}_2) + \\ + H_{s s_1 s_2}^{*(1)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)\, a_s(\mathbf{k})\, a_{s_1}^*(\mathbf{k}_1)\, a_{s_1}^*(\mathbf{k}_2)]\, \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\, d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2 + \\ + \int [H_{s s_1 s_2}^{(2)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)\, a_s(\mathbf{k})\, a_{s_1}(\mathbf{k}_1)\, a_{s_2}(\mathbf{k}_2) + \\ + H_{s\,s_1 s_2}^{*(2)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)\, a_s^*(\mathbf{k})\, a_{s_1}^*(\mathbf{k}_1)\, a_{s_2}^*(\mathbf{k}_2)]\, \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)\, d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2 \end{aligned} \tag{1.16}$$

Здесь

$$\begin{aligned} H_{s\,s_1 s_2}^{(1)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = H_{s\,s_2 s_1}^{(1)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1) \\ H_{s\,s_1 s_2}^{(2)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = H_{s_1\,s s_2}^{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}, \mathbf{k}_2) = H_{s\,s_2 s_1}^{(2)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1) \end{aligned} \tag{1.17}$$

Теперь можно написать самый общий вид нормальных уравнений в прозрачной среде

$$\begin{aligned} \left(i\frac{\partial}{\partial t} - \omega_s(\mathbf{k})\right) a_s(\mathbf{k}) = \int d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2\, [H_{s\,s_1 s_2}^{(1)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)\, a_{s_1}(\mathbf{k}_1)\, a_{s_2}(\mathbf{k}_2)\, \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) + \\ + 2H_{s_1 s s_2}^{*}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}, \mathbf{k}_2)\, \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\, a_{s_1}^*(\mathbf{k}_1)\, a_{s_2}(\mathbf{k}_2) + \\ + H_{s\,s_1 s_2}^{*(2)}\, a_{s_1}^*(\mathbf{k}_1)\, a_{s_2}^*(\mathbf{k}_2)\, \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)] \end{aligned}$$

Многие задачи плазменной турбулентности приводят к негамильтоновым уравнениям, даже если свободные уравнения гамильтоновы [6,7]. В этих случаях существенную роль играет так называемое нелинейное затухание Ландау. Однако будем рассматривать только гамильтоновский случай и при построении моделей исходить непосредственно из гамильтонианов.

§ 2. Модель трех волн. Рассмотрим следующую модель. Существуют волны трех типов — A, B и C, описываемые переменными соответственно $a_{\mathbf{k}}$, $b_{\mathbf{k}}$ и $c_{\mathbf{k}}$. Законы дисперсии волн следующие:

$$\omega_A \approx \omega_1, \qquad \omega_B = \omega_2, \qquad \omega_C = \sqrt{\omega_3^2 + \varepsilon^2 k^2} \tag{2.1}$$

Параметр ε является малым и впоследствии устремляется к нулю. Законы дисперсии подчинены условиям

$$\omega_3 < \omega_1 - \omega_2 \ll \omega_2 \tag{2.2}$$

Модель рассматривается в области волновых чисел

$$|k| < \varepsilon^{-1}\sqrt{\omega_2^2 - \omega_3^2} \tag{2.3}$$

В этой области единственным динамическим процессом в первом порядке теории возмущений является

$$A \rightleftarrows B + C \tag{2.4}$$

подчиняющийся законам сохранения

$$\omega_A = \omega_B + \omega_C, \qquad \mathbf{k}_A = \mathbf{k}_B + \mathbf{k}_C \tag{2.5}$$

Гамильтониан системы выберем в виде

$$H = \int \omega_A a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^* d\mathbf{k} + \int \omega_B b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^* d\mathbf{k} + \int \omega_C(\mathbf{k})\, c_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}^* d\mathbf{k} +$$

$$+ \lambda \int (a_{\mathbf{k}}^* b_{\mathbf{k}_1} c_{\mathbf{k}_2} + a_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}_1}^* c_{\mathbf{k}_2}^*)\, \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\, d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2 \qquad (2.6)$$

Как видно, рассматриваемая модель есть классический аналог известной квантовой модели Ли. Отсутствие кроссинговых членов является несущественным, так как в рассматриваемой области они не дают вклада в кинетическое уравнение.

Можно было рассмотреть более сложную модель, введя в гамильтониан взаимодействия какой-либо формфактор, но это не отразилось бы на качественных результатах работы.

Динамические уравнения в нормальной форме получаются варьированием гамильтониана (2.6). Они имеют вид

$$i\frac{\partial a_{\mathbf{k}}}{\partial t} - \omega_A a_{\mathbf{k}} = \lambda \int b_{\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}''}\, \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'')\, d\mathbf{k}'\, d\mathbf{k}''$$

$$i\frac{\partial b_{\mathbf{k}}}{\partial t} - \omega_B b_{\mathbf{k}} = \lambda \int a_{\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}''}^*\, \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k} - \mathbf{k}'')\, d\mathbf{k}'\, d\mathbf{k}'' \qquad (2.7)$$

$$i\frac{\partial c_{\mathbf{k}}}{\partial t} - \omega_C c_{\mathbf{k}} = \lambda \int b_{\mathbf{k}'}^* a_{\mathbf{k}''}\, \delta(\mathbf{k}'' - \mathbf{k}' - \mathbf{k})\, d\mathbf{k}'\, d\mathbf{k}''$$

Из этой динамической системы можно получить систему кинетических уравнений подобно тому, как это сделано в работе А. А. Галеева и В. И. Карпмана [1]

$$\frac{\partial A_{\mathbf{k}}}{\partial t} = 4\pi\lambda^2 \int \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'')\, \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3)(\mathbf{k}'')) \times \qquad (2.8)$$

$$\times (B_{\mathbf{k}'} C_{\mathbf{k}''} - A_{\mathbf{k}} B_{\mathbf{k}'} - A_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}''})\, d\mathbf{k}'\, d\mathbf{k}'' + \nu_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}}$$

$$\frac{\partial B_{\mathbf{k}}}{\partial t} = 4\pi^2\lambda \int \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k} - \mathbf{k}'')\, \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3(\mathbf{k}'')) \times$$

$$\times (A_{\mathbf{k}'} C_{\mathbf{k}''} + A_{\mathbf{k}'} B_{\mathbf{k}} - B_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}''})\, d\mathbf{k}'\, d\mathbf{k}''$$

$$\frac{\partial C_{\mathbf{k}}}{\partial t} = 4\pi^2\lambda \int \delta(\mathbf{k}'' - \mathbf{k}' - \mathbf{k})\, \delta(\omega_1 - \omega_2(\mathbf{k}'') - \omega_3(\mathbf{k})) \times$$

$$\times (A_{\mathbf{k}'} B_{\mathbf{k}''} + C_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}'} - C_{\mathbf{k}} B_{\mathbf{k}''})\, d\mathbf{k}'\, d\mathbf{k}''$$

Здесь

$$A_{\mathbf{k}} = \langle a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^* \rangle, \qquad B_{\mathbf{k}} = \langle b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^* \rangle, \qquad C_{\mathbf{k}} = \langle c_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}^* \rangle$$

средние квадраты амплитуд волн. Очевидно, что стационарным уравнениям (2.8) удовлетворяют решения Рэлей — Джинса

$$A_{\mathbf{k}} = T / \omega_A, \qquad B_{\mathbf{k}} = T / \omega_B, \qquad C_{\mathbf{k}} = T / \omega_C$$

В первых двух уравнениях (2.8) пренебрегаем членом εk^2. Кроме того, формально введен член $\nu_{\mathbf{k}}$, учитывающий источники A-волн.

Законы сохранения (2.5) определяют, что в процессе будут участвовать только те C-волны, волновые числа которых подчиняются условию

$$k_c^2 = k_0^2 - \varepsilon \frac{k_A^2}{\omega_{s^2}}, \qquad k_0^2 = \frac{(\omega_1 - \omega_2)^2 - \omega_3^2}{s^2} \qquad (2.9)$$

т. е. лежат в весьма узком шаровом слое.

Интегрируя последнее из уравнений (2.8) по $\mathbf{k}$, замечаем, что член с производной по времени

$$\int \frac{\partial C}{\partial t} d\mathbf{k}$$

имеет порядок εk^2, и им можно пренебречь. Вводя среднее значение $C = \langle C_{\mathbf{k}} \rangle$, где усреднение ведется по объему шарового слоя, и полагая, что распределение C-волн сферически симметрично, получим

$$\int \delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'-\mathbf{k}'')\,(A_{\mathbf{k}'}B_{\mathbf{k}''}+CA_{\mathbf{k}'}-CB_{\mathbf{k}''})\,d\mathbf{k}'\,d\mathbf{k}'' \tag{2.10}$$

Далее ограничимся рассмотрением состояний, для которых

$$\frac{A_{\mathbf{k}}'}{A_{\mathbf{k}}} \ll \frac{1}{k_0}, \qquad \frac{B_{\mathbf{k}}'}{B_{\mathbf{k}}} \ll \frac{1}{k_0}$$

Разложим правые части уравнений (2.9) в ряд по k_0 и ограничимся вторым членом. Члены, содержащие первую степень k_0, обратятся в нуль. Ограничиваясь рассмотрением стационарных состояний, получим

$$\begin{gathered}(C-A_{\mathbf{k}})(B_{\mathbf{k}}+{}^1/_2\,k_0{}^2\Delta B_{\mathbf{k}})-CA_{\mathbf{k}}+\gamma_{\mathbf{k}}A_{\mathbf{k}}=0\\ (C+B_{\mathbf{k}})(A_{\mathbf{k}}+{}^1/_2\,k_0{}^2\Delta A_{\mathbf{k}})-CB_{\mathbf{k}}=0\end{gathered} \qquad \left(\gamma_{\mathbf{k}}=\frac{\nu_{\mathbf{k}}\sqrt{\omega_3{}^2+s^2k_0{}^2}}{4\pi\lambda^2 s^2}\right) \tag{2.11}$$

Применение условия (2.10) к уравнениям (2.11) дает

$$\int A_{\mathbf{k}}\nu_{\mathbf{k}}\,d\mathbf{k}=0 \tag{2.12}$$

Это условие дополняет систему (2.11). Далее положим (2.13)

$$\nu_k=\nu_1 \ \text{ при } |\mathbf{k}|>k_1,\qquad \nu_k=0 \ \text{ при } k_2>|\mathbf{k}|>k_1,\qquad \nu_k=-\nu_2 \ \text{ при } |\mathbf{k}|>k_2$$

Соответственно значения $\gamma_{\mathbf{k}}$ есть γ_1 и γ_2.

Такой выбор источников имитирует реальную ситуацию, когда в области длинных волн имеется неустойчивость, а в области коротких волн — затухание. Будем считать, что $k_2 \gg k_1$.

Из второго уравнения (2.11) выразим $B_{\mathbf{k}}$ и, пользуясь малостью члена с лапласианом, разложим в ряд по $k_0{}^2$ до первого члена. Подставляя результат в первое уравнение, получим для $A_{\mathbf{k}}$ уравнение

$$\Delta A_{\mathbf{k}}+\frac{1}{C-A_{\mathbf{k}}}(\nabla A_{\mathbf{k}})^2+\frac{\gamma_{\mathbf{k}}A_{\mathbf{k}}(c-A\mathbf{k})}{k_0{}^2C^2}=0 \tag{2.14}$$

Решаем его в трех областях, где ν_k, а следовательно, и γ_k постоянны.

1. *Решение в области неустойчивости*. Примем, что область неустойчивости узкая. Тогда решение в этой области можно получить, разлагая $A_{\mathbf{k}}$ в ряд по степеням $\mathbf{k}$. Получим (A_0 — неизвестная пока константа)

$$A_{\mathbf{k}}=A_0-ak^2 \qquad \left(a=\frac{\gamma_1A_0(C-A_0)}{6k_0{}^2C^2}\right) \tag{2.15}$$

Условием применимости разложения будет $a \ll 1$.

2. *Решение в области прозрачности*. В этой области

$$\Delta A_k+\frac{1}{C-A_k}(\nabla A_k)^2=0 \tag{2.16}$$

Общим сферически-симметричным решением уравнения (2.15) будет

$$A_k=C+\alpha e^{\beta/k} \qquad (a,\ \beta=\mathrm{const}) \tag{2.17}$$

3. *Решение в области затухания*. Считаем, что в этой области A_k мало. Приводим линеаризированное уравнение (2.13) и его решение

$$\Delta A_k=\frac{\gamma_6}{Ck_0{}^2}A_k=0,\qquad A_k=\frac{\delta}{k}\exp\left[-\left(\frac{\gamma_2}{C}\right)^{1/2}\frac{k_2}{k_0}\right] \qquad (\delta=\mathrm{const}) \tag{2.18}$$

Для применимости исходных предположений необходимо, чтобы

$$\gamma_2\,/\,C \ll 1 \tag{2.19}$$

Условие (2.12) с точностью до членов старших порядков дает

$$\frac{\gamma_1}{3}k_1{}^3A_0=\delta k_2k_0\sqrt{C\gamma^2}\exp\left[-\left(\frac{\gamma_2}{C}\right)^{1/2}\frac{k_2}{k_0}\right] \tag{2.20}$$

Производя сшивку решений в точке k_1, получим приближенно для области прозрачности

$$A_k \approx C - (C - A_0) \exp\left(-\frac{\gamma_1 A_0 k_1^3}{3C^2 k_0^2 k}\right) \qquad (2.21)$$

Заметим, что A_k должно быть порядка или меньше C (в конце это оправдается). Тогда вследствие (2.15) показатель экспоненты мал, и A_k мало меняется на протяжении области прозрачности и равно приближенно A_0. Поэтому при сшивке в точке k_2 необходимо проявлять осторожность, именно вблизи k_2 существует область, где линеаризация уравнения (2.14) незаконна, и решение (2.18) будет неточным. Поэтому в точке k_2 будем сшивать только функции, но не их производные. Имеем

$$A_0 \approx \frac{\delta}{k_2} \exp\left[-\left(\frac{\gamma_2}{c}\right)^{1/2} \frac{k_2}{k_0}\right] \qquad (2.22)$$

Подставляя (2.22) в (2.21), получим

$$C = \frac{1}{\gamma^2}\left(\frac{\gamma_1 k_1^3}{3k_0 k_2^2}\right)^2 \qquad (2.23)$$

Теперь A_0 можно найти из следующего соображения. Из формулы (2.21) видно, что A_k в области прозрачности мало отличается от распределения Рэлея — Джинса для некоторой неизвестной температуры. Считая, что газ A-волн и газ C-волн находятся в состоянии, близком к тепловому равновесию, можно положить

$$A_0 = \frac{\omega_C(k_0)}{\omega_A} C, \quad \omega_C(k_0) = \omega_1 - \omega_2, \quad \text{или } A_0 = \frac{(\omega_1 - \omega_2)^2}{4\pi\lambda^2 s^2} \frac{1}{\nu_2}\left(\frac{\nu_1 k_1^3}{3k_0 k_2^2}\right)^2 \qquad (2.24)$$

Из (2.24) следует, что $A_0 \ll C$. Подставляя (2.23) в (2.15) и (2.19), получим условия применимости проведенного рассмотрения

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^4 \ll 1, \qquad \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\frac{k_0 k_2^2}{k_1^3} \ll 1 \qquad (2.25)$$

Как видно из настоящей работы, спектр слабой турбулентности действительно имеет тот характер, каким он обычно представлялся, т. е. установление турбулентности происходит за счет баланса энергии между волнами, рождающимися в области неустойчивости и затухающими в области поглощения. Однако простая оценка, приравнивающая по порядку величины член $\nu_1 A$ и нелинейный, оказывается очень грубой.

Интересным является результат, что спектр в области прозрачности мало отличается от распределения Рэлей — Джинса.

Метод, примененный в настоящей работе, может быть обобщен на класс задач, для которых поверхности в $\mathbf{k}$-пространстве, описываемые уравнениями

$$\omega(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1) = \omega(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k}_1), \qquad \omega(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) = \omega(\mathbf{k}) + \omega(\mathbf{k}_1)$$

будут замкнутыми, причем их максимальный размер не зависит от $\mathbf{k}$.

Поступила 2 VII 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Галеев А. А., Карпман В. И. Турбулентная теория слабонеравновесной разреженной плазмы и структура ударных волн. Ж. эксперим. и теор. физ., 1963, т. 44, стр. 592.
2. Самас М.,... Shock — waves in collision — free plasmas. Nuclear fusion. Supplement; part 2. International atomic energly agency. Vienna, 1962.
3. Веденов А. А. Квазилинейная теория плазменных колебаний. Сб. «Вопросы теории плазмы», т. 3, Госатомиздат, 1963.
4. Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И. Слаботурбулентная плазма в магнитном поле. Ж. эксперим. и теор. физ., 1963, т. 43, стр. 2234.
5. Карпман В. И. О нелинейных эффектах в электродинамике прозрачной среды. Ж. эксперим. и теор. физ., 1963, т. 44, стр. 1307.
6. Карпман В. И. К теории слаботурбулентной плазмы. Докл. АН СССР, 1963, т. 152, № 2, стр. 587.
7. Петвиашвили В. И. Нелинейные колебания и некоторые эффекты, вызванные продольным током в плазме. Ж. эксперим. и теор. физ., 1963, т. 45, стр. 1467.