УДК 517.988.68

Регуляризующие алгоритмы с оптимальным и экстраоптимальным качеством*

А.С. Леонов

Национальный исследовательский ядерный университет (МИФИ), Каширское шоссе, 31, Москва, 115409
E-mail: asleonov@mephi.ru

Леонов А.С. Регуляризующие алгоритмы с оптимальным и экстраоптимальным качеством // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2016. — Т. 19, № 4. — С. 371–383.

Вводится понятие качества приближенных решений некорректно поставленных обратных задач и изучаются апостериорные оценки качества для различных регуляризующих алгоритмов (РА). Приводятся примеры типичных функционалов качества, возникающих при решении линейных и нелинейных обратных задач. Предлагаются методика и численный алгоритм вычисления апостериорных оценок качества приближенных решений общих нелинейных обратных задач. Вводятся новые понятия оптимального и экстраоптимального качества регуляризующего алгоритма. Развивается теория регуляризующих алгоритмов с оптимальным и экстраоптимальным качеством, в которой, в частности, изучаются оптимальные свойства оценочной функции качества. Приводятся примеры регуляризующих алгоритмов с экстраоптимальным качеством решений и результаты численных экспериментов по апостериорной оценке качества.

DOI: 10.15372/SJNM20160403

Ключевые слова: *некорректные задачи, регуляризующие алгоритмы, качество приближенного решения, апостериорная оценка качества, РА с экстраоптимальным качеством.*

Leonov A.S. Regularizing algorithms with optimal and extra-optimal quality // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2016. — Vol. 19, № 4. — P. 371–383.

The notion of a special quality for approximate solutions to ill-posed inverse problems is introduced. A posteriori estimates of the quality are studied for different regularizing algorithms (RA). Examples of typical quality functionals are provided, which arise in solving linear and nonlinear inverse problems. The techniques and the numerical algorithm for calculating a posteriori quality estimates for approximate solutions of general nonlinear inverse problems are developed. The new notions of optimal and extra-optimal quality of a regularizing algorithm are introduced. The theory of regularizing algorithms with optimal and extra-optimal quality is presented, which includes an investigation of optimal properties for estimation functions of the quality. Examples of regularizing algorithms with extra-optimal quality of solutions are given, as well as examples of regularizing algorithms without such property. The results of numerical experiments illustrate a posteriori quality estimation.

Keywords: *ill-posed problems, regularizing algorithms, quality of approximate solution, a posteriori quality estimates, RA with extra-optimal quality.*

1. Введение

Пусть Z и U — нормированные пространства с элементами z и u соответственно. В пространстве Z зададим некоторую топологию секвенциальной сходимости τ. Пусть

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 14-01-00182-а, № 14-01-91151-ГФЕН-а).

© А.С. Леонов, 2016

далее, $\mathcal{D} \neq \varnothing$ — заданное "множество ограничений" в Z, $F : Z \to U$ — некоторый оператор, возможно, нелинейный. Предположим, что операторное уравнение

$$F(z) = u \tag{1}$$

имеет для данной правой части $u \in U$ единственное решение $\bar{z} \in \mathcal{D}$.

Будем считать, что вместо точных данных задачи мы знаем их приближения: оператор $F_h : Z \to U$ и элемент $u_\delta \in U$. Приближенные данные (F_h, u_δ), аппроксимирующие точные данные (F, u), удовлетворяют условиям: $\|F_h(z) - F(z)\| \le \Psi(h, \Omega[z])$, $\|u_\delta - u\| \le \delta$, в которых величины $\eta = (h, \delta)$ являются известными характеристиками точности аппроксимации, а $\Omega[z] \ge 0$ — заданный функционал. Свойства функционала $\Omega[z]$ и меры аппроксимации $\Psi(h, \Omega[z])$ будут указаны ниже. Требуется по данным $(F_h, u_\delta, h, \delta, \Psi)$ найти устойчивое приближение $z_\eta \in \mathcal{D}$ для $\bar{z}$: $z_\eta \xrightarrow{\tau} \bar{z}$ при $\eta \to 0$.

Такая задача в общем случае является некорректно поставленной, и для ее решения следует применять регуляризующие алгоритмы (см. [1]). Получаемые в результате приближения могут значительно отличаться друг от друга для разных РА. Представляется естественным применять те РА, которые дают приближенные решения с некоторыми дополнительными оптимальными свойствами. Например, можно использовать РА, оптимальные по порядку точности [2–9], или глобально экстраоптимальные РА [10–13], или локально экстраоптимальные РА [14, 15] и т. д. Формализуем вопрос о "качестве" приближений, получаемых с помощью регуляризующих алгоритмов, вводя дополнительную меру качества $Q(z_\eta, \bar{z})$ приближенного решения z_η относительно точного решения $\bar{z}$. Здесь $Q(z_1, z_2)$ — функционал, определенный для всех $z_1, z_2 \in \mathcal{D}$.

Величина $Q(z_\eta, \bar{z})$ при неизвестном $\bar{z}$ может быть только оценена (априорно или апостериорно). Нас интересуют *апостериорные оценки качества* приближенных решений рассматриваемого РА (по функционалу качества Q), т. е. оценки для $Q(z_\eta, \bar{z})$, получаемые после решения обратной задачи. Оценки могут быть получены по следующей схеме.

Вычислив z_η, найдем величины $\Delta_\eta = C\|F_h(z_\eta) - u_\delta\|$, $R_\eta = C\Omega[z_\eta]$, где $C > 1$ — заданная константа. Введем множество

$$\mathcal{Z}_\eta = \left\{ z \in \mathcal{D} : \ \|F_h(z) - u_\delta\| \le \Delta_\eta, \ \Omega[z] \le R_\eta \right\}$$

и предположим, что $\bar{z} \in \mathcal{Z}_\eta$. Тогда

$$Q(z_\eta, \bar{z}) \le \sup\left\{ Q(z_\eta, z) : \ z \in \mathcal{Z}_\eta \right\} \triangleq E_Q(\eta). \tag{2}$$

Определение 1. Назовем функцию $E_Q(\eta)$ апостериорной оценкой качества приближенного решения z_η (по функционалу Q).

Пример 1. Примеры апостериорных оценок качества.

а. Глобальные апостериорные оценки точности приближенных решений (см. [10–13], а также [16–21]). Пусть Z — нормированное пространство с топологией сходимости по норме. Функционал качества задается как $Q(z_\eta, \bar{z}) = \|z_\eta - \bar{z}\|$. Оценка (2) имеет вид

$$\|z_\eta - \bar{z}\| \le \sup\left\{ \|z_\eta - z\| : \ z \in \mathcal{Z}_\eta \right\} \triangleq \varepsilon(\eta). \tag{3}$$

б. Локальные апостериорные оценки точности приближенных решений (см. [14, 15]). Пусть $Z = Z(T)$ — нормированное пространство функций $z(s)$, определенных в замкнутой области $T \subset \mathbb{R}^N$. Считаем, что τ — топология слабой (или сильной) сходимости в Z.

Будем рассматривать задачу приближенного вычисления значения линейного непрерывного функционала $\langle f_s, z\rangle$, зависящего от выбранной точки $s \in T$, на элементе $\bar{z}$. Качество получаемого приближения $\langle f_s, z_\eta\rangle$ будем оценивать функционалом $Q(z_\eta, \bar{z}) = |\langle f_s, z_\eta - \bar{z}\rangle|$. Оценка (2) — локальная апостериорная оценка точности приближенного решения по функционалу f — имеет здесь вид

$$|\langle f_s, z_\eta - \overline{z}\rangle| \le \sup\left\{|\langle f_s, z_\eta - z\rangle| : \ z \in \mathcal{Z}_\eta\right\} \stackrel{\Delta}{=} E_f(\eta).$$

На практике часто встречаются следующие функционалы, для которых нужно получить локальные апостериорные оценки точности приближенных решений.

б1. Поточечное оценивание точности приближенного решения z_η [15]:

$$\langle f_s, z\rangle = z(s), \quad \mathcal{D} = C(T); \qquad E_f(\eta) = \sup\left\{|z(s) - z_\eta(s)| : \ z \in \mathcal{Z}_\eta\right\}.$$

б2. Оценивание точности средних значений приближенного решения в некоторой окрестности $B(s)$, $B(s) \subset T$, точки $s \in T \setminus \partial T$ [14]:

$$\langle f_s, z\rangle = \frac{1}{\operatorname{mes} B(s)} \int\limits_{B(s)} z(x)\,dx, \quad \mathcal{D} = L_2(T);$$

$$E_f(\eta) = \sup\left\{\frac{1}{\operatorname{mes} B(s)} \left| \int\limits_{B(s)} \left[z(x) - z_\eta(x)\right] dx\right| : \ z \in \mathcal{Z}_\eta\right\}.$$

в. Еще один пример апостериорной оценки качества приближенных решений будет приведен в пункте 5.

В данной работе изучаются апостериорные оценки качества вида (2) и вводится новое понятие РА с экстраоптимальным качеством как регуляризующего алгоритма, который обладает оптимальной по порядку апостериорной оценкой качества $E_Q(\eta)$. Указываются примеры конкретных РА, имеющих и не имеющих заданное свойство экстраоптимального качества.

В дальнейшем мы считаем выполненными следующие предположения.

(А) Функционалы $J[z] = \left\|F(z) - u\right\|$, $J_\eta[z] = \left\|F_h(z) - u_\delta\right\|$ и $\Omega\,[z]$ — τ-полунепрерывны снизу на $\mathcal{D}$.

(Б) Непустые множества $\Omega_K = \{z \in \mathcal{D} : \ \Omega\,[z] \le K\}$ — τ-секвенциально компактны.

(В) Мера аппроксимации $\Psi(h, \Omega)$ непрерывна при h, $\Omega \ge 0$, возрастает по переменной Ω при каждом $h > 0$; кроме того, $\Psi(h, \Omega) > 0$ при h, $\Omega > 0$ и $\Psi(0, \Omega) = 0$ при $\Omega \ge 0$.

(Г) Используемый регуляризующий алгоритм дает приближенные решения z_η, удовлетворяющие *условиям регулярности* [5]:

$$\overline{\lim_{\eta\to 0}}\Omega\,[z_\eta] \le \bar{C} = \Omega\,[\bar{z}], \qquad \lim_{\eta\to 0}\left\|F_h(z_\eta) - u_\delta\right\| = 0.$$

(Д) Функционал $Q(z_1, z_2)$ определен для всех z_1, $z_2 \in \mathcal{D}$ и τ-непрерывен по совокупности переменных; кроме того, $Q(z, \bar{z}) \ge Q(\bar{z}, \bar{z}) \ge 0 \ \forall\, z, \bar{z} \in \mathcal{D}$, и выполнено неравенство (аналог неравенства треугольника): $Q(z_1, z_2) \le Q(z_0, z_1) + Q(z_0, z_2) \ \forall\, z_0, z_1, z_2 \in \mathcal{D}$.

Замечание 1. Предположения **(А)**–**(Д)** обеспечивают сходимости $z_\eta \xrightarrow{\tau} \bar{z}$, $\Omega\,[z_\eta] \to \Omega\,[\bar{z}]$ при $\eta \to 0$ (см. [5, 7]), а поэтому имеют место и сходимости $\Delta_\eta \to 0$, $R_\eta \to C\Omega\,[\bar{z}]$.

Замечание 2. Если условия регулярности выполнены с некоторым числом $\bar{C}$, $\bar{C} > \Omega\,[\bar{z}]$, то гарантируется лишь сходимость $z_\eta \xrightarrow{\tau} \tilde{z}$ [5, 7].

Замечание 3. Условие **(Д)** выполнено для функционалов Q из примера 1 (**а**, **б**), а также для примера, приведенного ниже в пункте 5.

2. Состоятельность оценки качества РА

Будем говорить, что оценка качества (2) состоятельна, если $\lim_{\eta\to 0} E_Q(\eta) = Q(\bar{z}, \bar{z})$ для всякого элемента $\bar{z} \in \mathcal{D}$. Следующая теорема дает достаточные условия состоятельности.

Теорема 1. *При выполнении предположений* **(А)**–**(Д)**: 1) *точная верхняя грань* (2) *конечна и достигается*; 2) *справедлива сходимость* $\lim_{\eta\to 0} E_Q(\eta) = Q(\bar{z}, \bar{z})\ \forall\, \bar{z} \in \mathcal{D}$.

Доказательство. Возьмем какую-либо максимизирующую последовательность $\{z_n\} \subset \mathcal{Z}_\eta$ для супремума из (2). Тогда

$$Q(z_\eta, z_n) \to E_Q(\eta), \quad n \to \infty, \tag{4}$$

причем по определению множества $\mathcal{Z}_\eta$ выполнено неравенство $\Omega\,[z_n] \le R_\eta$. Поэтому, согласно предположению **(Б)**, найдется τ-сходящаяся подпоследовательность $\left\{z_{n_k}\right\} \subset \{z_n\}$: $z_{n_k} \xrightarrow{\tau} \tilde{z}_\eta \in \mathcal{D}$. Отсюда и из предположения **(А)**, используя включение $z_{n_k} \in \mathcal{Z}_\eta$, получим

$$R_\eta \ge \varliminf_{k\to\infty} \Omega\,[z_{n_k}] \ge \Omega\,[\tilde{z}_\eta], \qquad \Delta_\eta \ge \varliminf_{k\to\infty} \left\|F_h(z_{n_k}) - u_\delta\right\| \ge \left\|F_h(\tilde{z}_\eta) - u_\delta\right\|, \tag{5}$$

т. е. $\tilde{z}_\eta \in \mathcal{Z}_\eta$. Тогда вследствие (4) и τ-непрерывности функционала Q:

$$E_Q(\eta) = \lim_{k\to\infty} Q(z_\eta, z_{n_k}) = Q(z_\eta, \tilde{z}_\eta), \tag{6}$$

и этим доказана часть 1) теоремы.

Из оценок (5) и сходимостей $\Delta_\eta \to 0$, $R_\eta \to C\Omega\,[\bar{z}]$, отмеченных в замечании 1, следуют соотношения:

$$\varlimsup_{\eta\to 0} \Omega\,[\tilde{z}_\eta] \le \lim_{\eta\to 0} R_\eta = C\Omega\,[\bar{z}], \qquad \lim_{\eta\to 0} \left\|F_h(\tilde{z}_\eta) - u_\delta\right\| = \lim_{\eta\to 0} \Delta_\eta = 0, \tag{7}$$

означающие выполнение для элементов $\tilde{z}_\eta$ условий регулярности с константой $\bar{C} = C\Omega\,[\bar{z}] \ge \Omega\,[\bar{z}]$. Тогда, как отмечалось в замечании 2, справедлива сходимость $\tilde{z}_\eta \xrightarrow{\tau} \bar{z}$ при $\eta \to 0$. Поэтому из соотношения (6) и предположения **(Д)** следует часть 2) теоремы:

$$\lim_{\eta\to 0} E_Q(\eta) = \lim_{\eta\to 0} Q(z_\eta, \tilde{z}_\eta) = Q(\bar{z}, \bar{z}). \qquad \square$$

Из теоремы 1 ясно, что для нахождения оценки качества (2) можно использовать численные методы оптимизации функционалов. Можно так же, как в [9–12], применять методы, учитывающие специфику функционала Q.

Как указано в пункте 1, локальная апостериорная оценка (2) верна, если $\bar{z} \in \mathcal{Z}_\eta$. В [12, 13] приведены достаточные условия такого включения.

Теорема 2. *Предположим, что* $\Omega[\bar{z}] > 0$ *и* $\delta + \Psi(h, \Omega[\bar{z}]) \le \Delta_\eta$ *при достаточно малых* η *(т. е. при* $0 < \|\eta\| \le \eta_0 = \mathrm{const}$*). Тогда* $\bar{z} \in \mathcal{Z}_\eta$ *при таких* η*.*

3. Оптимальность качества регуляризующих алгоритмов

В работах [2–9, 12–15] развита теория глобально и локально оптимальных по порядку регуляризующих алгоритмов. В данном пункте даются основные положения аналогичной теории оптимальности качества РА.

Вернемся к задаче (1), предполагая выполненными условия **(А)**–**(Д)**. Предположим также, что оператор F в уравнении (1) инъективный. Введем специальное множество элементов $M_R = \{z \in \mathcal{D} : \ \Omega[z] \le R\}$, где $R \ge \Omega[\bar{z}]$. Из предположения **(Б)** следует τ-компактность множества M_R, а, значит, и ограниченность на нем τ-непрерывного функционала $Q(z_1, z_2)$: $0 \le Q(z_1, z_2) \le b_R = \mathrm{const}\ \forall\, z_1, z_2 \in M_R$.

Определим специальный класс разрешимых на $\mathcal{D}$ операторных уравнений вида

$$\bar{F}(z) = \bar{u}, \quad z \in \mathcal{D}, \tag{8}$$

где $\bar{u} \in U$, а $\bar{F} : Z \to U$ — некоторый оператор. Для этого при фиксированном множестве M_R и при известных приближенных данных $(F_h, u_\delta, h, \delta)$ задачи (1) введем класс $\Sigma_{M_R}(\eta)$ всех задач типа (8) с точными данными $(\bar{F}, \bar{u})$, которые имеют единственные решения $\bar{z}(\bar{F}, \bar{u})$, принадлежащие множеству M_R, причем выполнено следующее условие аппроксимации точных данных $(\bar{F}, \bar{u})$ приближенными (F_h, u_δ) на точном решении $\bar{z}(\bar{F}, \bar{u})$:

$$\Big| \big\|F_h\big(\bar{z}(\bar{F}, \bar{u})\big) - u_\delta\big\| - \big\|\bar{F}\big(\bar{z}(\bar{F}, \bar{u})\big) - \bar{u}\big\| \Big| = \big\|F_h(\bar{z}(\bar{F}, \bar{u})) - u_\delta\big\| \le C\big(\delta + \Psi\,(h, R)\,\big) \equiv H.$$

Описанный класс $\Sigma_{M_R}(\eta)$ задается аналитически как

$$\Sigma_{M_R}(\eta) = \Big\{ \big(\bar{F}, \bar{u}\big) : \ \bar{F}\big(\bar{z}(\bar{F}, \bar{u})\big) = \bar{u}, \ \bar{z}(\bar{F}, \bar{u}) \in M_R, \ \big\|F_h\big(\bar{z}(\bar{F}, \bar{u})\big) - u_\delta\big\| \le H \Big\}.$$

Множество $\Sigma_{M_R}(\eta)$ не пусто, т. к. содержит точные данные (F, u) задачи (1). Будем искать приближенное решение z_η операторного уравнения (1) с помощью некоторого метода P_η: $z_\eta = P_\eta(F_h, u_\delta, \eta)$. Зададим следующую характеристику качества регуляризующего алгоритма P_η:

$$\begin{aligned} \Delta_Q(\eta, P_\eta) &= \Delta_Q(\eta, P_\eta; F_h, u_\delta; M_R) \\ &= \sup_{\bar{F}, \bar{u}} \Big\{ Q\big(P_\eta(F_h, u_\delta, \eta), \bar{z}(\,\bar{F},\,\bar{u})\big) : \ \forall\,(\bar{F},\,\bar{u}) \in \Sigma_{M_R}(\eta) \Big\}. \end{aligned}$$

Величины $\Delta_Q(\eta, P_\eta)$ конечны, т. к. функционал Q — τ-непрерывен на компакте M_R по совокупности аргументов.

Теорема 3. *Если* $z_\eta = P_\eta(F_h, u_\delta, \eta) \xrightarrow{\tau} \bar{z}(F, u)$ *при* $\eta \to 0$*, то* $\Delta_Q(\eta, P_\eta; F_h, u_\delta; M_R) \to Q\big(\bar{z}(F, u), \bar{z}(F, u)\big)$*.*

Доказательство. Возьмем произвольное η, $0 < \|\eta\| \le \eta_0$. Тогда по определению величины $\Delta_Q(\eta, P_\eta)$ для любой последовательности $\varepsilon_n \to +0$ найдутся пары $\big(\bar{F}_n(\eta), \bar{u}_n(\eta)\big) \in \Sigma_{M_R}(\eta)$, для которых

$$\Delta_Q(\eta, P_\eta) = \Delta_Q(\eta, P_\eta; F_h, u_\delta; M_R) \le Q\Big(P_\eta(F_h, u_\delta, \eta), \bar z\left(\bar F_n(\eta), \bar u_n(\eta)\right)\Big) + \varepsilon_n, \qquad (9)$$

причем $z_n(\eta) \equiv \bar z\left(\bar F_n(\eta), \bar u_n(\eta)\right) \in M_R$ и $\left\|F_h(z_n(\eta)) - u_\delta\right\| \le H$. В силу τ-компактности множества M_R найдется подпоследовательность $\{z_{n_k}(\eta)\}$ такая, что $z_{n_k}(\eta) \xrightarrow{\tau} z^*(\eta) \in M_R$. Тогда по условию **(A)** и условиям аппроксимации

$$\begin{aligned}\left\|F(z^*(\eta)) - u\right\| &\le \varliminf_{k\to\infty} \left\|F(z_{n_k}(\eta)) - u\right\| \\ &\le \varliminf_{k\to\infty} \Big\{\left\|F(z_{n_k}(\eta)) - F_h(z_{n_k}(\eta))\right\| + \left\|F_h(z_{n_k}(\eta)) - u_\delta\right\| + \left\|u_\delta - u\right\|\Big\} \\ &\le \varliminf_{k\to\infty} \left[\Psi(h, \Omega\left[z_{n_k}(\eta)\right]) + H + \delta\right] \le \Psi(h, R) + H + \delta \le 2H,\end{aligned}$$

т. е.

$$\left\|F(z^*(\eta)) - u\right\| \le 2H. \qquad (10)$$

Так как $z^*(\eta) \in M_R$ для любого η, $0 < \|\eta\| \le \eta_0$, то найдется такая последовательность $\eta_m \to 0$, что соответствующая последовательность $z^*(\eta_m)$ τ-сходится: $z^*(\eta_m) \xrightarrow{\tau} z^* \in M_R$, причем из (10) и условий **(A)** и **(B)** получим

$$\left\|F(z^*) - u\right\| \le \varliminf_{m\to\infty} \left\|F(z^*(\eta_m)) - u\right\| \le 2C \lim_{m\to\infty} \big(\Psi(h_m, R) + \delta_m\big) = 0.$$

Отсюда и из единственности решения уравнения (1) следует, что $z^* = \bar z(F, u)$.

Далее, из (9) и τ-непрерывности функционала Q следует, что для любого η такого, что $0 < \|\eta\| \le \eta_0$:

$$\Delta_Q(\eta, P_\eta) \le \lim_{k\to\infty} \left\{Q\big(P_\eta(F_h, u_\delta, \eta), z_{n_k}(\eta)\big) + \varepsilon_{n_k}\right\} = Q\big(P_\eta(F_h, u_\delta, \eta), z^*(\eta)\big).$$

Поэтому, учитывая условие $P_\eta(F_h, u_\delta, \eta) \xrightarrow{\tau} \bar z(F, u)$ теоремы, сходимость $z^*(\eta_m) \xrightarrow{\tau} z^* = \bar z(F, u)$ и неравенство треугольника из **(Д)**, получим

$$\varlimsup_{m\to\infty} \Delta_Q(\eta_m, P_{\eta_m}) \le \lim_{m\to\infty} Q\big(P_{\eta_m}(F_{h_m}, u_{\delta_m}, \eta_m), z^*(\eta_m)\big) = Q\big(\bar z(F, u), \bar z(F, u)\big).$$

Так как $\Delta_Q\big(\eta_m, P_{\eta_m}\big) \ge Q(\bar z(F, u), \bar z(F, u))$, то отсюда следует сходимость

$$\lim_{m\to\infty} \Delta_Q(\eta_m, P_{\eta_m}) = Q\big(\bar z(F, u), \bar z(F, u)\big).$$

Рассуждая “от противного”, можно убедиться, что аналогичное соотношение будет верно и для произвольной последовательности $\eta_m \to 0$. Поэтому $\lim_{\eta\to 0} \Delta_f(\eta, P_\eta) = Q\big(\bar z(F, u), \bar z(F, u)\big)$. □

Смысл теоремы 3 состоит в следующем: если P_η — это РА, то его характеристика качества $\Delta_Q(\eta, P_\eta)$ по функционалу Q состоятельна: $\Delta_Q(\eta, P_\eta) \to Q\big(\bar z(F, u), \bar z(F, u)\big)$ при $\eta \to 0$.

Определение 2. Пусть $\mathcal{P} = \{P\}$ — класс всех возможных регуляризующих алгоритмов P для задачи (1). При фиксированном множестве M_R *оптимальным качеством* решения $\bar z$ будем называть число $\Delta_Q^{\text{opt}}(\eta) = \Delta_Q^{\text{opt}}(\eta; F_h, u_\delta; M_R) = \inf\{\Delta_Q(\eta, P) : \forall\, P \in \mathcal{P}\}$. Будем говорить, что регуляризующий алгоритм P_η имеет *качество Q, оптимальное по порядку*, если для любых η, $\|\eta\| < \eta_0 = \text{const}$, и всяких соответствующих этим η допустимых приближенных данных (F_h, u_δ) выполнено неравенство

$$0 \le \Delta_Q(\eta, P_\eta; F_h, u_\delta; M_R) - \Delta_Q^{\mathrm{opt}}(\eta; F_h, u_\delta; M_R) \le k_0 \Delta_Q^{\mathrm{opt}}(\eta; F_h, u_\delta; M_R)$$

с некоторой константой $k_0 > 0$.

Подчеркнем, что константа k_0 в определении 2 не зависит от η, F_h, u_δ и R.

По аналогии с теорией глобальных и локальных оценок точности из [2, 3, 7, 13–15] введем оценочные функции:

$$\Theta(H,R) = \sup\left\{Q\big(\bar z(\bar F_1,\, \bar u_1), \bar z(\bar F_2,\, \bar u_2)\big) :\ \forall\, (\bar F_1,\, \bar u_1), (\bar F_2,\, \bar u_2) \in \Sigma_{M_R}(\eta)\right\},$$

$$\omega(t,R) \ = \sup\left\{Q(z_1, z_2) :\ \forall\, z_{1,2} \in M_R,\ \big\|F_h(z_{1,2}) - u_\delta\big\| \le t\right\}.$$

Они конечны, т. к. τ-непрерывная на компакте $z \in M_R$ функция $Q(z_1, z_2)$ ограничена. Из включения $\bar z = \bar z(F, u) \in M_R$ и вытекающего из условий аппроксимации неравенства $\big\|F_h(\bar z) - u_\delta\big\| \le \delta + \Psi\big(h, \Omega\,[\bar z]\big) \le H$ следует, что функция $\omega(t, R)$ определена по крайней мере при $t \ge H$. Следующие две леммы являются аналогами известных утверждений, используемых в теории глобальных и локальных оценок точности (см., например, [7, гл. 2, § 6], а также [2–4, 6]).

Лемма 1. *Выполнена оценка* $\Delta_Q^{\mathrm{opt}}(\eta; F_h, u_\delta; M_R) \ge \frac{1}{2}\Theta(H, R)$.

Доказательство. По определению функции $\Theta(H, R)$ для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся пары $\big(\bar F_1, \bar u_1\big), \big(\bar F_2, \bar u_2\big) \in \Sigma_{M_R}(\eta)$ такие, что $Q\big(\bar z\big(\bar F_1, \bar u_1\big), \bar z\big(\bar F_2, \bar u_2\big)\big) \ge \Theta(H, R) - \varepsilon$. Тогда для любого метода $P \in \mathcal{P}$ из неравенства треугольника для Q вытекает неравенство

$$\Delta_Q(\eta, P; F_h, u_\delta; M_R) \ge \max\left\{Q\big(P(F_h, u_\delta, \eta), \bar z(\bar F_1,\, \bar u_1)\big),\, Q\big(P(F_h, u_\delta, \eta), \bar z(\bar F_2,\, \bar u_2)\big)\right\}$$

$$\ge \frac{1}{2} Q\big(\bar z\big(\bar F_1, \bar u_1\big),\, \bar z\big(\bar F_2, \bar u_2\big)\big) \ge \frac{1}{2}\Theta(H, R) - \varepsilon.$$

Отсюда в силу произвольности метода $P \in \mathcal{P}$ и числа $\varepsilon > 0$ получается доказываемая оценка. □

Лемма 2. $\Theta(H, R) \ge \omega(H, R)$.

Доказательство. Так как множество M_R компактно в топологии τ, то из определения функции $\omega(t, R)$ следует, что при $t = H$ найдутся элементы $z_1,\, z_2 \in M_R$, для которых $\big\|F_h(z_{1,2}) - u_\delta\big\| \le H$ и выполнено равенство $Q(z_1, z_2) = \omega(H, R)$. Рассмотрим пары (F, u_1), (F, u_2), где $u_{1,2} = F(z_{1,2})$. Пары (F, u_1), (F, u_2), как точные данные уравнений $F(z) = u_{1,2}$, принадлежат множеству $\Sigma_{M_R}(\eta)$. Действительно, в силу инъективности оператора F эти уравнения имеют единственные решения $z_{1,2}$, причем $\big\|F_h(z_{1,2}) - u_\delta\big\| \le H$. Но тогда по определению функции $\Theta(H, R)$: $\Theta(H, R) \ge Q(z_1, z_2) = \omega(H, R)$. □

Из приведенных лемм получается

Следствие. $\Delta_Q^{\mathrm{opt}}(\eta; F_h, u_\delta; M_R) \ge \frac{1}{2}\Theta(H, R) \ge \frac{1}{2}\omega(H, R)$.

Следствие и теорема 3 обеспечивают сходимость $\omega(H, R) \to 0$ при $\eta \to 0$, т. е. при $H \to 0$.

4. Экстраоптимальное качество регуляризующих алгоритмов

Будем считать выполненными предположения пункта 3, полагая, что $R \geq C\Omega\,[\bar{z}]$. Множество $\mathcal{Z}_\eta = \left\{z \in \mathcal{D} : \Omega\,[z] \leq R_\eta, \|F_h(z) - u_\delta\| \leq \Delta_\eta\right\}$ из определения (2) функции $E_Q(\eta)$ будем записывать в виде $\left\{z \in \mathcal{D} : z \in M_{R_\eta}, \|F_h(z) - u_\delta\| \leq \Delta_\eta\right\}$.

Теорема 4. *Пусть при сделанных предположениях для каждого* η, $0 < \|\eta\| \leq \eta_0$, *выполнены неравенства*:

$$R_\eta \leq R, \quad \Delta_\eta \leq C\big(\delta + \Psi(h, R)\big) \equiv H. \tag{11}$$

Тогда оценочная функция $E_Q(\eta)$ *имеет оптимальный порядок качества*:

$$0 \leq E_Q(\eta) - \Delta_Q^{\text{opt}}(\eta; F_h, u_\delta; M_R) \leq \Delta_Q^{\text{opt}}(\eta; F_h, u_\delta; M_R).$$

Доказательство. Первое неравенство из (11) означает, что $z_\eta \in M_R$, а второе — что $\|F_h(z_\eta) - u_\delta\| \leq \Delta_\eta \leq C\big(\delta + \Psi(h, R)\big) = H$. Поэтому

$$\begin{aligned} E_Q(\eta) &= \sup_z \left\{Q(z, z_\eta) : z \in M_{R_\eta}, \|F_h(z) - u_\delta\| \leq \Delta_\eta\right\} \\ &\leq \sup_z \big\{Q(z, z_\eta) : z \in M_R, \|F_h(z) - u_\delta\| \leq H\big\} \\ &\leq \sup_{z_1, z_2} \big\{Q(z_1, z_2) : z_{1,2} \in M_R, \|F_h(z_{1,2}) - u_\delta\| \leq H\big\} = \omega(H, R). \end{aligned} \tag{12}$$

Отсюда и из следствия получается сначала неравенство $E_Q(\eta) \leq 2\Delta_Q^{\text{opt}}(\eta; F_h, u_\delta; M_R)$, а затем и доказываемое неравенство. □

Замечание 4. Условия (11) выполнены для любого РА, приближенные решения которого удовлетворяют (хотя бы при достаточно малых h, δ) неравенствам:

$$\Omega\,[z_\eta] \leq \Omega\,[\bar{z}], \quad \|F_h(z_\eta) - u_\delta\| \leq \delta + \Psi\big(h, \Omega[z_\eta]\big). \tag{13}$$

Это вытекает из определения чисел R_η и Δ_η.

Определение 3. Будем говорить, что регуляризующий алгоритм $z_\eta = P_\eta(F_h, u_\delta, \eta)$ имеет *экстраоптимальное качество* Q (на M_R), если апостериорная оценка его качества — функция $E_Q(\eta)$ вида (2) — является оптимальной по порядку, т. е. найдется определяемая этим алгоритмом константа $k_1 > 0$ такая, что

$$0 \leq E_Q(\eta) - \Delta_Q^{\text{opt}}(\eta; F_h, u_\delta; M_R) \leq k_1 \Delta_Q^{\text{opt}}(\eta; F_h, u_\delta; M_R)$$

(хотя бы при достаточно малых $\|\eta\|$).

Из теоремы 4 и замечания 4 ясно, что достаточным условием локальной экстраоптимальности регуляризующего алгоритма является выполнение неравенств (13).

Пример 2. Если функционал качества Q удовлетворяет условиям **(Д)**, то тихоновский РА с апостериорным выбором параметра по обобщенному принципу невязки имеет экстраоптимальное качество при решении линейных обратных задач.

Уточним постановку задачи для этого примера. Будем считать, что Z — гильбертово пространство, τ — топология слабой сходимости в Z, U — нормированное пространство, а операторы $F = A$, $F_h = A_h$ — линейные и ограниченные из Z в U. Функционал $\Omega[z] \geq 0$ предполагается строго выпуклым и сильно полунепрерывным снизу в Z. Эти предположения обеспечивают выполнение условий **(А)** и **(Б)** (см. [7]). Кроме того, предположим, что $\Omega[z] \geq \Omega[0]\ \ \forall z \in Z$, и что выполнены условия аппроксимации **(В)** с $\Psi = h\Omega[z]$. Будем искать единственное решение $\bar{z} = \bar{z}(A,u)$ линейного уравнения (1). Применим метод регуляризации А.Н. Тихонова со сглаживающим функционалом вида

$$M^\alpha[z] = \alpha\Omega^2[z] + \left\|A_h z - u_\delta\right\|_U^2, \quad z \in Z. \tag{14}$$

При сформулированных условиях функционал (14) будет иметь для каждого $\alpha > 0$ единственную экстремаль z^α, реализующую его минимум в Z. Выберем параметр $\alpha = \alpha_\eta > 0$ по одному из вариантов обобщенного принципа невязки (ОПН) (см. [7]), а именно так, чтобы выполнялось равенство

$$\left\|A_h z^{\alpha_\eta} - u_\delta\right\|_U = \delta + h\Omega[z^{\alpha_\eta}].$$

Возможность такого выбора для η, $0 < \|\eta\| \leq \eta_0$, при условии $\bar{z} \neq 0$ обоснована в [7, 9]. Зададим приближенное решение в виде $z_\eta = z^{\alpha_\eta}$. В [7, 9] показано выполнение соотношений **(Г)** из пункта 1 для таких приближенных решений. Условие выбора параметра α_η сразу обеспечивает выполнение второго неравенства из (13) при $0 < \|\eta\| \leq \eta_0$. Из этого же условия, определения тихоновской экстремали $z_\eta = z^{\alpha_\eta}$ и условий аппроксимации точных данных обратной задачи приближенными получаются соотношения:

$$\begin{aligned}\alpha_\eta\Omega^2[z_\eta] + \left(\delta + h\Omega\left[z_\eta\right]\right)^2 &= \alpha_\eta\Omega^2[z_\eta] + \left\|A_h z_\eta - u_\delta\right\|_U^2 = M^{\alpha_\eta}[z_\eta] \\ &\leq M^{\alpha_\eta}[\bar{z}] = \alpha_\eta\Omega^2\left[\bar{z}\right] + \left\|A_h\bar{z} - u_\delta\right\|^2 \leq \alpha_\eta\Omega^2[\bar{z}] + \left(\delta + h\Omega[\bar{z}]\right)^2.\end{aligned}$$

Из них следует, что $\Omega[z_\eta] \leq \Omega[\bar{z}]$ при любых η, $0 < \|\eta\| \leq \eta_0$, т. е. выполнено первое неравенство из (13). Из замечания 4 следует, что метод регуляризации Тихонова с выбором α по обобщенному принципу невязки имеет экстраоптимальное качество.

Аналогичный результат справедлив и для обобщенного метода невязки [7, с. 154] и некоторых других алгоритмов из [7, 9], которые также будут иметь экстраоптимальное качество.

Отметим следствие определений 2, 3 и неравенства (2): на множестве M_R любой РА с экстраоптимальным качеством по функционалу Q имеет качество, оптимальное по порядку. Обратное, вообще говоря, неверно: не всякий оптимальный по порядку качества регуляризующий алгоритм будет иметь экстраоптимальное качество. Соответствующие примеры регуляризующего алгоритма для функционала Q (глобальной и локальной точности метода) приведены в [13, 15].

5. Пример оценки качества

Проиллюстрируем рассмотренную теорию на примере оценки качества вычисления вариации решения обратной задачи (1) с помощью метода регуляризации А.Н. Тихонова.

Рассмотрим линейное интегральное уравнение первого рода

$$Az = \int_{-1}^{1} \frac{z\,dx}{1 + 100(s-x)^2} = u(x), \quad x \in [-1, 1], \tag{15}$$

с точным решением $\bar{z} = \left(1-s^2\right)^2 \in W_2^2[-1,1]$. Считаем $Z = U = L_2[-1,1]$, $\mathcal{D} = W_2^2[-1,1]$, и будем использовать регуляризатор $\Omega\,[z] = \|z\|_{W_2^2[-1,1]}$. Вычислим по решению $\bar{z}$ правую часть уравнения $u(x)$ и наложим на нее аддитивную нормально распределенную помеху с нулевым средним так, чтобы приближенная правая часть u_δ имела относительную ошибку $\|u_\delta - u\|_{L_2[-1,1]} \,/\, \|u\|_{L_2[-1,1]} = \delta$. После дискретизации задачи на равномерных сетках $\bigl\{x_i = s_i = -1 + 2(i-1)/(N-1),\ i = 1,\dots,N\bigr\}$ с шагом $h = 2/(N-1)$ по x, s для $N = 201$ и аппроксимации оператора A по формуле трапеций решим полученную систему линейных уравнений $\hat{A}\hat{z} = \hat{u}$, $\hat{z} \in \mathbb{R}^N$, с приближенными (сеточными) данными $A_h = \hat{A}$, $u_\delta = \hat{u}$:

$$\hat{A} = \left[\frac{h}{1+100(x_i - s_j)^2}\right], \quad \dim \hat{A} = N \times N; \qquad \hat{u} = \bigl[u_\delta(x_i)\bigr], \quad \dim \hat{u} = N \times 1,$$

по методу регуляризации А.Н. Тихонова из примера 2 с указанным там выбором параметра регуляризации. Тогда, если τ — топология слабой сходимости в $W_2^2[-1,1]$, то будут выполнены условия **(А)–(Г)** постановки задачи из пункта 1. Детальная проверка этих условий дана в [7, § 2.4, § 3.5].

Нас интересует оценка вариации $V(\bar{z}) = \bigvee_{-1}^{1}(\bar{z})$ искомого решения $\bar{z}(s)$ с помощью приближенных решений $\hat{z}_\eta = S\bigl\{\hat{z}_\eta(s_j)\bigr\}_{j=1}^{N}$, где S — оператор линейной интерполяции сеточных значений $\hat{z}_\eta(s_j)$ тихоновского приближенного решения на отрезок $[-1,1]$. Качество (точность) этой оценки будем характеризовать функционалом $Q(\hat{z}_\eta, \bar{z}) = \|V(\hat{z}_\eta) - V(\bar{z})\|$.

Убедимся, что так определенный функционал Q обладает свойствами **(Д)**, если считать, что τ есть топология слабой сходимости в $W_2^2[-1,1]$. Действительно, для функций $z(s) \in W_2^2[-1,1] \subset W_2^1[-1,1]$ справедлива формула $V(z) = \int_{-1}^{1} |z'(s)|\, ds$. Поэтому для произвольной последовательности $z_n(s) \in W_2^2[-1,1]$ выполнена оценка

$$\begin{aligned}\bigl|V(z_n) - V(z)\bigr| &\le \int_{-1}^{1} \bigl||z_n'(s)| - |z'(s)|\bigr|\, ds \le \int_{-1}^{1} \bigl|z_n'(s) - z'(s)\bigr|\, ds \\ &\le \sqrt{2}\left\{\int_{-1}^{1} \bigl|z_n'(s) - z'(s)\bigr|^2 ds\right\}^{1/2} \le \sqrt{2}\, \|z_n(s) - z(s)\|_{W_2^1}. \qquad (16)\end{aligned}$$

Так как пространство $W_2^2[-1,1]$ компактно вложено в $W_2^1[-1,1]$, то из слабой сходимости $z_n(s) \overset{W_2^2}{\rightharpoonup} z(s)$ вытекает сильная сходимость $z_n(s) \overset{W_2^1}{\rightarrow} z(s)$ и, значит, в силу (16) — сходимость $V(z_n) \to V(z)$. Отсюда следует свойство τ-непрерывности функционала Q по совокупности аргументов. Остальные свойства из группы **(Д)** для этого функционала очевидны.

Оценку качества Q получим, решая экстремальную задачу (2), которая принимает здесь вид

$$\begin{aligned}E_Q(\eta) &= \sup\bigl\{\bigl|V(\hat{z}_\eta) - V(z)\bigr| :\ z \in \mathcal{Z}_\eta\bigr\} \\ &= \sup\bigl\{\bigl|V(\hat{z}_\eta) - V(z)\bigr| :\ \bigl\|A_h z - u_\delta\bigr\| \le \Delta_\eta,\ \Omega[z] \le R_\eta\bigr\}.\end{aligned}$$

Для вариации $V[z]$ примем сеточную аппроксимацию $\hat{V}(z) = \sum_{k=1}^{N-1} |z(s_{k+1}) - z(s_k)|$, так что на самом деле мы будем вычислять сеточный аналог $\hat{E}_Q(\delta)$ оценочной функции $E_Q(\eta)$, решая задачу:

$$\hat{E}_Q^2(\delta) = \sup\left\{\left[\hat{V}(z) - \hat{V}(\hat{z}_\eta)\right]^2 : z \in \hat{\mathcal{Z}}_\eta\right\} \tag{17}$$

на указанной фиксированной сетке, т. е. при фиксированном операторе A_h. Здесь $\hat{\mathcal{Z}}_\eta$ — сеточный аналог множества $\mathcal{Z}_\eta$ (см. [15]). Задачи (17) решались для различных δ с помощью модулей оптимизации пакета МАТЛАБ. Полученная оценка точности вариации $\hat{E}_Q(\delta)$ в зависимости от погрешности правой части уравнения (15) показана на рисунке. Как следует из примера 2, эта оценка оптимальна по порядку.

Аналогичным образом можно численно оценивать различные виды качества приближенных решений обратных задач.

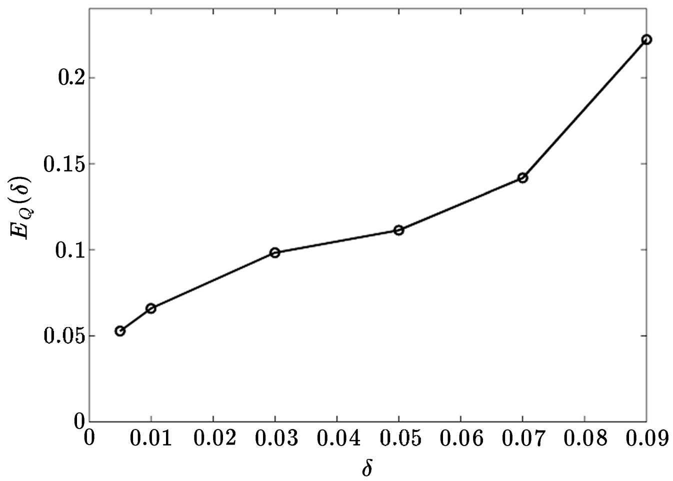

Рис. Оценки качества вычисления вариации решения обратной задачи (1) с помощью метода регуляризации А.Н. Тихонова второго порядка для различных δ

Литература

1. **Тихонов А.Н, Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979.
2. **Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. — М.: Наука, 1978.
3. **Танана В.П.** Методы решения операторных уравнений. — М.: Наука, 1981.
4. **Вайникко Г.М.** Методы решения линейных некорректно поставленных задач в гильбертовых пространствах. — Тарту: Изд-во ТГУ, 1982.
5. **Морозов В.А.** Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. — М.: Наука, 1987.
6. **Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.** Итеративные методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1989.
7. **Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.** Нелинейные некорректные задачи. — М.: Наука, 1995.
8. **Engl H.W., Hanke M., and Neubauer A.** Regularization of Inverse Problems. — Dordrecht: Kluwer, 1996.
9. **Леонов А.С.** Решение некорректно поставленных обратных задач. Очерк теории, практические алгоритмы и демонстрации в МАТЛАБ. — М.: Книжный дом "ЛИБРОКОМ", 2009.

10. **Леонов А.С.** Об апостериорных оценках точности решения линейных некорректно поставленных задач и экстраоптимальных регуляризующих алгоритмах // Вычисл. методы и программирование. — 2010. — Т. 11, № 1. — С. 14–24.

11. **Леонов А.С.** Экстраоптимальные апостериорные оценки точности решения некорректных задач продолжения потенциальных геофизических полей // Физика Земли. — 2011. — № 6. — С. 69–78.

12. **Леонов А.С.** Апостериорные оценки точности решения некорректно поставленных обратных задач и экстраоптимальные регуляризующие алгоритмы их решения // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2012. — Т. 15, № 1. — С. 85–102.

13. **Leonov A.S.** Extra-optimal methods for solving ill-posed problems // J. of Inverse and Ill-posed Problems. — 2012 — Vol. 20, iss. 5–6. — P. 637–665.

14. **Leonov A.S.** Locally extra-optimal regularizing algorithms // J. of Inverse and Ill-posed Problems. — 2014. — Vol. 22, iss. 5. — P. 713–737.

15. **Леонов А.С.** Поточечно экстраоптимальные регуляризующие алгоритмы // Вычисл. методы и программирование. — 2013. — Т. 14, № 1. — С. 198–205.

16. **Винокуров В.А., Гапоненко Ю.Л.** Апостериорные оценки решения некорректных обратных задач // ДАН СССР. — 1982. — Т. 263, № 2. — С. 277–280.

17. **Дорофеев К.Ю., Титаренко В.Н., Ягола А.Г.** Алгоритмы построения апостериорных оценок погрешностей для некорректных задач // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2003. — Т. 43, № 1. — С. 12–25.

18. **Ягола А.Г., Николаева Н.Н., Титаренко В.Н.** Оценка погрешности решения уравнения Абеля на множествах монотонных и выпуклых функций // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2003. — Т. 6, № 2. — С. 171–180.

19. **Бакушинский А.Б.** Апостериорные оценки точности для приближенных решений нерегулярных операторных уравнений // Докл. РАН. — 2011. — Т. 437, № 4. — С. 439–440.

20. **Bakushinskii A.B., Smirnova A., and Liu H.** A posteriori error analysis for unstable models // J. of Inverse and Ill-posed Problems. — 2012. — Vol. 20, iss. 4. — P. 411–428.

21. **Бакушинский А.Б., Леонов А.С.** Новые апостериорные оценки погрешности приближенных решений нерегулярных операторных уравнений // Вычисл. методы и программирование. — 2014. — Т. 15. — С. 359–369.

Поступила в редакцию 24 ноября 2015 г.,
в окончательном варианте 2 февраля 2016 г.

Литература в транслитерации

1. **Tikhonov A.N, Arsenin V.Ya.** Metody resheniya nekorrektnykh zadach. — M.: Nauka, 1979.

2. **Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P.** Teoriya linejnykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniya. — M.: Nauka, 1978.

3. **Tanana V.P.** Metody resheniya operatornykh uravnenii. — M.: Nauka, 1981.

4. **Vainikko G.M.** Metody resheniya linejnykh nekorrektno postavlennykh zadach v gil'bertovykh prostranstvakh. — Tartu: Izd-vo TGU, 1982.

5. **Morozov V.A.** Regulyarnye metody resheniya nekorrektno postavlennykh zadach. — M.: Nauka, 1987.

6. **Bakushinskii A.B., Goncharskii A.V.** Iterativnye metody resheniya nekorrektnykh zadach. — M.: Nauka, 1989.

7. **Tikhonov A.N., Leonov A.S., Yagola A.G.** Nelinejnye nekorrektnye zadachi. — M.: Nauka, 1995.
8. **Engl H.W., Hanke M., and Neubauer A.** Regularization of Inverse Problems. — Dordrecht: Kluwer, 1996.
9. **Leonov A.S.** Reshenie nekorrektno postavlennykh obratnykh zadach. Ocherk teorii, prakticheskie algoritmy i demonstracii v MATLAB. — M.: Knizhnyy dom "LIBROKOM", 2009.
10. **Leonov A.S.** Ob aposteriornykh ocenkakh tochnosti resheniya lineynykh nekorrektno postavlennykh zadach i ekstraoptimal'nykh regulyarizuyushchikh algoritmakh // Vychisl. metody i programmirovanie. — 2010. — T. 11, № 1. — S. 14–24.
11. **Leonov A.S.** Ekstraoptimal'nye aposteriornye ocenki tochnosti resheniya nekorrektnykh zadach prodolzheniya potencial'nykh geofizicheskikh poley // Fizika Zemli. — 2011. — № 6. — S. 69–78.
12. **Leonov A.S.** Aposteriornye ocenki tochnosti resheniya nekorrektno postavlennykh obratnykh zadach i ekstraoptimal'nye regulyarizuyushchie algoritmy ikh resheniya // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2012. — T. 15, № 1. — S. 85–102.
13. **Leonov A.S.** Extra-optimal methods for solving ill-posed problems // J. of Inverse and Ill-posed Problems. — 2012 — Vol. 20, iss. 5–6. — P. 637–665.
14. **Leonov A.S.** Locally extra-optimal regularizing algorithms // J. of Inverse and Ill-posed Problems. — 2014. — Vol. 22, iss. 5. — P. 713–737.
15. **Leonov A.S.** Potochechno ekstraoptimal'nye regulyarizuyushchie algoritmy // Vychisl. metody i programmirovanie. — 2013. — T. 14, № 1. — S. 198–205.
16. **Vinokurov V.A., Gaponenko Yu.L.** Aposteriornye ocenki resheniya nekorrektnykh obratnykh zadach // DAN SSSR. — 1982. — T. 263, № 2. — S. 277–280.
17. **Dorofeev K.Yu., Titarenko V.N., Yagola A.G.** Algoritmy postroeniya aposteriornykh ocenok pogreshnostey dlya nekorrektnykh zadach // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2003. — T. 43, № 1. — S. 12–25.
18. **Yagola A.G., Nikolaeva N.N., Titarenko V.N.** Ocenka pogreshnosti resheniya uravneniya Abelya na mnozhestvakh monotonnykh i vypuklykh funkcii // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2003. — T. 6, № 2. — S. 171–180.
19. **Bakushinskii A.B.** Aposteriornye ocenki tochnosti dlya priblizhennykh reshenii neregulyarnykh operatornykh uravnenii // Dokl. RAN. — 2011. — T. 437, № 4. — S. 439–440.
20. **Bakushinskii A.B., Smirnova A., and Liu H.** A posteriori error analysis for unstable models // J. of Inverse and Ill-posed Problems. — 2012. — Vol. 20, iss. 4. — P. 411–428.
21. **Bakushinskii A.B., Leonov A.S.** Novye aposteriornye ocenki pogreshnosti priblizhennykh reshenii neregulyarnykh operatornykh uravnenii // Vychisl. metody i programmirovanie. — 2014. — T. 15. — S. 359–369.