В [2] установлена зависимость между ρ° и ординатой фронта вытеснения $y = y(x, t)$, учитывая ее закономерность движения фронта вытеснения, можно представить в виде

$$x(u, t) = \frac{Qt}{mS} X_1(u) + \chi(u) \qquad \left(u = \frac{y}{h}\right) \tag{17}$$

Здесь $\chi(u)$ — уравнение первоначальной границы раздела жидкостей.

Благодаря прозрачности модели по опытным данным была построена также функция $X_1(u)$, приведенная на фиг. 2 (кривые *2* и *4*). По опытным кривым $\Phi_1(\rho^\circ)$ и $X_1(u)$ была найдена зависимость $u = u(\rho^\circ)$. График $u(\rho^\circ)$ показан на фиг. 3, откуда видно, что эта зависимость близка к линейной, что согласуется с расчетами работы [2].

В тех случаях, когда $Q = Q(t)$, задача может быть решена приближенно следующим известным приемом. Общее время процесса вытеснения разбивается на ряд промежутков, в пределах которых можно приближенно считать суммарный расход постоянным. Имея семейство кривых $\Phi_1(\rho^\circ)$ с параметром $Q\mu_2 / S\sigma$, можно рассчитать процесс вытеснения в каждом промежутке и таким образом получить приближенную картину течения в целом.

Поступила 7 IX 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Фаткуллин А. Х., Ланитина А. А. Экспериментальное исследование движения водонефтяного контакта при заводнении. Гостоптехиздат НХ, 1961, № 11.
2. Курбанов А. К. О некоторых обобщениях уравнений фильтрации двухфазной жидкости. ВНИИ, НТС по добыче нефти, 1961, № 15.
3. Пирвердян А. М. Движение двухфазной несжимаемой смеси в пористой среде. ПММ, 1952, т. XVI, вып. 6.
4. Эфрос Д. А. Определение относительных проницаемостей и функций распределения при вытеснении нефти водой. ДАН СССР, 1956, т. 110, № 5.
5. Маскет М. Физические основы технологии добычи нефти. М. Гостоптехиздат, 1953.

ЗАМЕЧАНИЕ К ТЕОРИИ ВДАВЛИВАНИЯ ШТАМПА В ПЛАСТИЧЕСКУЮ СРЕДУ

А. И. Кузнецов

(*Ленинград*)

В заметке В. А. Жалнина и Д. Д. Ивлева [1] в качестве непосредственного обобщения задачи Прандтля (о вдавливании прямоугольного штампа в полуплоскость) рассматривается задача о вдавливании штампа в пластическую среду в случае, когда штамп и среда очерчены по некоторой кривой линии. В качестве примера приведено решение численным методом характеристик задачи о вдавливании штампа с основанием в виде дуги окружности в среду, ограниченную окружностью того же радиуса. Если в задаче Прандтля различные решения задачи (решение Прандтля, решение Хилла и другие) приводят к одному и тому же значению предельной нагрузки, то в этой задаче решение, аналогичное решению Хилла приводит к наименьшему значению предельной нагрузки. Поэтому решение Хилла задачи Прандтля можно рассматривать как предельное среди минимальных решений рассмотренной в [1] задачи при стремлении кривизны дуги окружности к нулю. Как отмечено в [1], это не будет иметь места в общем случае.

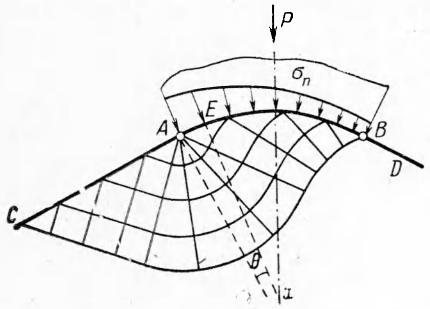
Последнее обстоятельство показывается в предлагаемой заметке.

Рассмотрим задачу о вдавливании жесткого штампа без трения в пластическую среду, ограниченную произвольной гладкой выпуклой кривой AB, симметричной относительно оси x, и двумя прямыми AC и BD — касательными к AB в точках A и B соответственно (фиг. 1). Влияние выпучивания пластической среды не учитывается. Построение линий скольжения очевидно из фиг. 1. Нормальное давление под штампом находится элементарно. В точке E оно равно

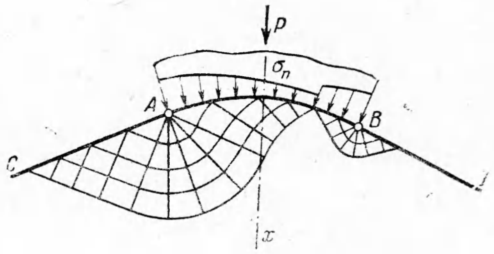
$$\sigma_n = -k(\pi + 2 - 2\theta) \tag{1}$$

Здесь θ — угол между нормалями к AB в точках A и E, k — предел текучести при сдвиге. Легко убедиться, что построение поля скоростей может быть выполнено.

Как следует из формулы (1), нормальное давление убывает по величине от точки A к точке B. Поэтому всякое другое решение типа, изображенного на фиг. 2, и, в частности, решение, аналогичное решению Хилла задачи Прандтля, приводит к большему значению предельной нагрузки. Таким образом, в данной задаче к наименьшему значению предельной нагрузки приводит решение, соответствующее одностороннему выдавливанию, а не решение, аналогичное решению Хилла. Несимметричность решения, соответствующего наименьшему значению предельной нагрузки, при симметрии условий задачи связана, по-видимому, с неоднозначностью решений вообще по схеме жестко-пластического тела (в данной задаче равно возможны решение, показанное на фиг. 1, и решение, при котором выдавливание происходит с другой стороны штампа).

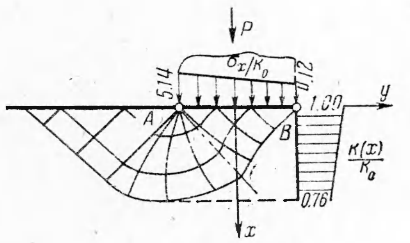


Фиг. 1

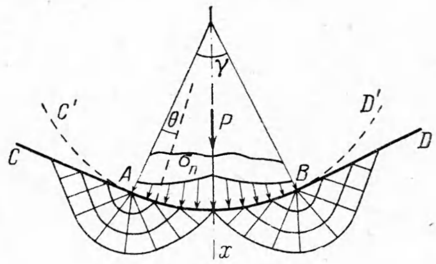


Фиг. 2

Другим примером, при котором решение типа Хилла не приводит к наименьшему значению предельной нагрузки, является задача Прандтля о вдавливании штампа в неоднородную пластическую среду с пределом текучести, убывающим с глубиной. Как показывает решение этой задачи для случая, когда предел текучести мало изменяется с глубиной [2], предельное давление под штампом убывает от точки A к точке B (фиг. 3). Следовательно, и в этом случае наименьшему значению предельной нагрузки соответствует одностороннее выдавливание материала.



Фиг. 3



Фиг. 4

В заключение рассмотрим задачу о вдавливании штампа в случае, когда AB — гладкая вогнутая кривая, симметричная относительно оси x; AC и BD — по-прежнему прямые, касательные к AB в точках A и B соответственно (фиг. 4). В этом случае давление под штампом

$$\sigma_n = -k(\pi + 2 + 2\theta) \tag{2}$$

возрастает по величине с увеличением θ и наименьшее значение предельной нагрузки реализуется решением, аналогичным решению Хилла в задаче Прандтля.

Рассмотрим частный случай, когда AB — дуга окружности. Эту задачу можно рассматривать как приближенную по отношению к задаче, решенной численно в [1]. Так как дуги окружности AC' и BD' заменены касательными AC и BD, и тем самым уменьшено количество пластического материала, предельная нагрузка будет найдена заниженной (см., например, [3], § 24). Для угла раствора штампа $\gamma = 48° 6'$, принятого в [1], наибольшая погрешность в давлении под штампом составляет 9.5%, а погрешность в предельной нагрузке — около 5%.

Ленинградский государственный университет

Поступила 12 IX 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Жалнин В. А., Ивлев Д. Д. К теории вдавливания штампа в пластическую среду. ПМТФ, 1960, № 3.
2. Кузнецов А. И. Плоская деформация неоднородных пластических тел. Вестн. ЛГУ, 1958, № 13.
3. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. ГИТТЛ, 1956.