УДК 533.7

# О ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ДЛЯ ТЕЧЕНИЙ МНОГОАТОМНЫХ ГАЗОВ

*В. М. Кузнецов, М. М. Кузнецов*

*(Москва)*

Рассмотрена задача о получении макроскопических граничных условий для уравнений сильно неравновесного многотемпературного пограничного слоя в газе с поступательными, вращательными и колебательными степенями свободы и произвольной каталитичностью твердой поверхности относительно различных мод колебаний. Анализируются граничные условия на поверхностях. свойства которых благоприятны для режимов течения с инверсией населенностей квантовых уравнений.

Известно, что строгий вывод макроскопических граничных условий для течения газа у твердой поверхности связан с решением уравнения Больцмана в слое Кнудсена.

Метод решения этого уравнения в асимптотически разных областях течения при наличии двухтемпературной колебательной релаксации предложен в работе [1]. В работе [2] дано приближенное решение задачи об определении граничных условий для течения многоатомного газа у равновесной стенки. Аналогичная задача в случае неравновесной поверхности с двумя различными температурами рассматривалась в работах [3,4]. Результаты этих работ относятся к течениям двухатомных газов, так как в них учтена только одна внутренняя степень свободы. Вопрос о возможном существовании реальных поверхностей с сильной колебательной неравновесностью до недавнего времени оставался открытым. Тем не менее еще в работе [5] было показано, что при неравновесном течении азота в пограничном слое около плоской теплоизолированной поверхности поступательно-вращательная ($T_w$) и колебательная ($T_{iw}$) температуры стенки могут сильно различаться между собой.

Исследование колебательных релаксаций многоатомных газов на твердых адсорбирующих поверхностях показало [6], что скорость затухания колебательного движения различных мод колебаний линейных молекул типа $CO_2$, $NO_2$ и др. зависит от их ориентации и времени пребывания в адсорбированном состоянии.

Оси молекул $CO_2$ большую часть времени параллельны адсорбирующей поверхности; при этом одно из колебаний деформационной моды, ориентированное перпендикулярно к поверхности, быстро затухает.

Вследствие резонанса Ферми это затухание распространяется на все колебания симметричной и деформационной мод. Поскольку антисимметричные колебания при этом практически сохраняются, образуется неравновесное распределение по колебательной энергии различных мод колебаний. С макроскопической точки зрения это означает, что имеют место режимы течения с существенно различными температурами стенки $T_w$, $T_{iw}$ ($i=1, 2, 3 \ldots$), причем $T_{iw}$ могут также отличаться друг от друга. Представляет интерес задача о получении граничных условий для течений многоатомных газов с несколькими колебательными степенями свободы.

1. Рассмотрим эту задачу применительно к уравнениям пограничного слоя при произвольной каталитичности обтекаемой поверхности. Асимптотический метод решения обобщенного уравнения Больцмана для двухатомного газа [1] можно распространить на многоатомные газы, например,

на $CO_2$. Положим, что в газе имеются различные релаксационные процессы $l_t$, $l_{Vt} \sim l_I$, которые в масштабе средней длины свободного пробега $l \sim l_t$ соответствуют резонансному обмену поступательной, поступательно-вращательной и колебательной энергий. Кроме того, имеется неупругий обмен поступательной и колебательной энергий ($l_{tI}$) и междумодовые колебательные обмены $l_{II}$. Практический интерес представляет случай, когда существует неравенство

$$l_t \sim l_{Vt} \sim l_I \ll l_{tI} \sim L \gg l_{II}, \tag{1.1}$$

где $L$ — характерный гидродинамический размер. Тогда в рамках теории многотемпературной релаксации, полагая выполненным принцип детального баланса для всех типов столкновений, получим обобщенное уравнение Больцмана в следующей форме [7]:

$$\mathrm{Kn}\left[\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{c}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \sum_{(V,I)}{}' \int (f'f_1' - ff_1)\, dP'\right] = \sum_{(A)} \int (f'f_1' - ff_1)\, dP, \tag{1.2}$$

где Kn—число Кнудсена; **c**—собственная скорость молекул; $\sum\limits_{(V,I)}{}'$, $\sum\limits_{(A)}$ — части интегралов столкновений, связанные с элементарными процессами в правой и левой частях неравенства (1. 1). Суммирование по $V$ в (1. 2) учитывает вклад вращательных, а по $I$—колебательных степеней свободы; $dP'$, $dP$ — сокращенная запись многомерного интегрирования по параметрам бинарных столкновений.

Равновесная функция распределения имеет вид

$$\begin{aligned} f^{(0)} = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{mC^2}{2kT}\right)\left[\sum_{V=0}^{\infty}(2V+1)\exp\left(-\theta_R \times\right.\right. \\ \left.\left.\times \frac{V(V+1)}{kT}\right)\right]^{-1}(2V+1)\exp\left(-\theta_R\frac{V(V+1)}{kT}\right)\left[\sum_{M=0}^{\infty}\exp\times\right. \\ \left.\times\left(-\frac{E_M}{kT_1}\right)\right]^{-1}\exp\left(-\frac{E_M}{kT_1}\right)\left[\sum_{N=0}^{\infty}(N+1)\exp\left(-\frac{E_N}{kT_2}\right)\right]^{-1}\times \\ \times(N+1)\exp\left(-\frac{E_N}{kT_2}\right)\left[\sum_{P=0}^{\infty}\exp\left(-\frac{E_P}{kT_3}\right)\right]^{-1}\times \\ \times\exp\left(-\frac{E_P}{kT_3}\right), \end{aligned} \tag{1.3}$$

где $n$ — плотность; $V$ — вращательное квантовое число; $\mathbf{C}=\mathbf{c}-\mathbf{v}$; $I= =M$, $N$, $P$ — колебательные числа симметричной, деформационной и антисимметричной моды $CO_2$; $E_M$, $E_N$, $E_P$ —колебательные энергии, а $T_1$, $T_2$, $T_3$ — соответствующие температуры; $\theta_R = \dfrac{h^2}{2I}$ —характеристическая энергия вращательного кванта. Суммируя выражение (1.3) по $V$, а знаменатель — по $M$, $N$, $P$ и интегрируя по пространству скоростей, можно получить обычное выражение для населенностей колебательных уровней

$$\begin{aligned} \frac{n_{MNP}}{n} = \left[1-\exp\left(-\frac{E_M}{kT_1}\right)\right]\left[1-\exp\left(-\frac{E_N}{kT_2}\right)\right]^2\left[1-\exp\left(-\frac{E_P}{kT_3}\right)\right]\times \\ \times\exp\left(-\frac{E_M}{kT_1}\right)\left[N+1\right]\exp\left(-\frac{E_N}{kT_2}\right)\exp\left(-\frac{E_P}{kT_3}\right). \end{aligned}$$

Во втором приближении по аналогии со случаем двухтемпературной релаксации [1] функция распределения принимает структурный вид

$$\varphi_e^{(1)} = \mathbf{A}\frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} + \sum_{(i)} \mathbf{A}^{(i)}\frac{\partial T_i}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{B} : \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} + D\operatorname{div}\mathbf{v} + G, \tag{1.4}$$

где $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^{(i)}$— векторы; B— симметричный бездивергентный тензор; $D$, $G$ — скаляры.

Величины $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^{(i)}$, $\mathbf{B}$, $D$, $G$ являются функциями $n$, $\mathbf{C}$, $T_1$, $T_2$, $T_3$, $E_M$, $E_N$, $E_P$, $E_V$, $(E_V=\theta_R V(V+1))$ и определяют различные диссипативные коэффициенты, которые можно вычислить, решая соответствующие интегральные уравнения [1]. Поскольку в данном случае основной интерес представляют задачи определения граничных условий для уравнений пограничного слоя, члены, связанные с объемной вязкостью ($D$ div $\mathbf{V}$) и релаксационным давлением ($G$) [8,9] в (1.4), будут в дальнейшем несущественны.

2. Для плоских течений в пограничном слое соотношение (1.4) можно записать в виде

$$\varphi_e^{(i)} = -AC_y\frac{\partial T}{\partial y} - \sum_{(i)} A^{(i)}C_y\frac{\partial T_i}{\partial y} - BC_xC_y\frac{\partial u}{\partial y}, \tag{2.1}$$

где $C_x$, $C_y$ — проекции $C$ на касательное и нормальное направления по отношению к стенке; $u$ — компонента продольной среднемассовой скорости вдоль оси $x$.

В соответствии с анализом обмена колебательной энергии в адсорбционном слое [6] предположим, что молекулы газа отражаются от «неравновесной» стенки с распределением (1. 3), в котором $n=n_r$, $T=T_r$, $T_i=T_{ir}$ ($r$ — индекс отраженных молекул), причем в общем случае $T_r\neq T_{ir}\neq T_w$ ($i=1$, 2, 3) и $T_{ir}$ для различных $i$ также различаются между собой. Тогда функция распределения отраженных молекул примет вид

$$f_r = f_r^{(0)}(n=n_r, T=T_r, T_i=T_{ir}, u=v=0). \tag{2.2}$$

Очевидно, что функция (2. 1) не удовлетворяет кинетическому граничному условию (2. 2). Поэтому , как и в течении идеального одноатомного газа, для определения макроскопических граничных условий необходимо рассмотреть тонкий слой Кнудсена, на верхней границе которого функция распределения $f$ совпадает с $f^{(0)}(1+\varphi_e^{(1)})$.

По аналогии с одноатомным газом [10] обобщенное кинетическое уравнение Больцмана для функции распределения внутри слоя Кнудсена может быть записано в виде

$$c_y\frac{\partial f}{\partial y_1} + \mathrm{Kn}\left[c_x\frac{\partial f}{\partial x} - \sum_{(V,I)}{}' \int (f'f_1' - ff_1)dP'\right] = \sum_{(A)} \int (f'f_1' - ff_1)\,dP, \tag{2.3}$$

где $y_1$, $x$ — безразмерные координаты, отнесенные соответственно к толщине слоя Кнудсена $l$ и характерной длине тела $L$.

Поскольку равновесные функции распределения (1. 3) и (2. 2) удовлетворяют в первом приближении, т. е. при $\mathrm{Kn}\to 0$, уравнению (2. 3), а на внешней границе слоя Кнудсена функция $\varphi_e \sim \sqrt{\mathrm{Kn}} \ll 1$ [1], решение уравнения (2. 3) будем искать в виде

$$f = f_e^{(0)}\left(1+\sqrt{\mathrm{Kn}}\,\varphi^{(1)}+\ldots\right), \tag{2.4}$$

где $f_e^{(0)} = f^{(0)}(n=n_e,\ T=T_r,\ T_i=T_{ir},\ u=v=0)$;

$i=1, 2, 3, \ldots$, $n_e=p_e/kT_r$, $p_e$—давление на внешней границе пограничного слоя.

Для строгой формулировки задачи об определении $\varphi^{(1)}$в слое Кнудсена используем (как и в случае простого газа [8, 10]) принцип сращивания внутренних и внешних разложений. Тогда, подставляя (2. 4) в (2. 1) и разлагая функции $f^{(0)}(y_1\to\infty)$ и $f_r^{(0)}$ относительно $f_e^{(0)}$, получим следующую краевую задачу:

$$c_y\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial y_1}=\mathscr{L}\left[\varphi^{(1)}\right]; \tag{2.5}$$

$$\varphi^{(1)}(y\to\infty)=\varphi_e^{(1)}(y\to 0)+y_1\frac{\partial f^{(0)}}{\partial y}(y\to 0)+2\Delta u v_r^{-1}\zeta_x+ \tag{2.6}$$

$$+\frac{\Delta T_r}{T_r}\left(\zeta^2-\frac{5}{2}-P_V^{(1)}\right)-\sum_{(i)}\frac{\Delta T_{ir}}{T_{ir}}P_I^{(1)}\left(\frac{E_I}{kT_{ir}}\right);$$

$$\varphi^{(1)}(y_1=0,\ c_y>0)=\frac{n_r-n_e}{n_e}=\frac{\Delta n_e}{n_e}, \tag{2.7}$$

где $y$ — безразмерная координата, отнесенная к толщине пограничного слоя $\delta$; $\Delta T_r$, $\Delta T_{ir}$, $\Delta u$ — скачки параметров газа вблизи стенки:

$$\Delta T_r=T(y\to 0)-T_r;\quad \Delta T_{ir}=T_i(y\to 0)-T_{ir};$$

$$\Delta u=u(y\to 0);\quad v_r=\sqrt{2kT_r/m};\quad \zeta^2=\frac{mc^2}{2kT};$$

$$\frac{\Delta n_e}{n_e}=-\frac{2\sqrt{\pi}}{n_e v_r}\int f_e^{(0)}\varphi^{(1)}(y_1=0)\frac{1-\operatorname{sign}c_y}{2}c_y d\mathbf{c};$$

$P_V^{(1)}$, $P_I^{(1)}$—полиномы по дискретному множеству значений переменных [1]

$$\frac{E_V}{kT};\quad \frac{E_I}{kT_i},\quad P_V^{(1)}=\frac{\varepsilon_V-E_V}{kT};\quad P_I^{(1)}=\frac{\varepsilon_i-E_I}{kT_i};$$

$\varepsilon_V$, $\varepsilon_i$— средние вращательная и колебательная энергии;
$\mathscr{L}[\varphi^{(1)}]$ — линеаризованный интеграл «быстрых» соударений, включенных в левую часть неравенства (1. 1).

Известно, что в случае одноатомного газа функция $\varphi^{(1)}(y_1=0)$ связана с величинами $\Delta u$, $\Delta T_r$ следующими точными соотношениями [11]:

$$\langle c_y^2 c_x B\varphi^{(1)}(y_1=0)\rangle=-\frac{\mu}{kT_r}\Delta u; \tag{2.8}$$

$$\langle c_y^2 A\varphi^{(1)}(y_1=0)\rangle=-\frac{\lambda_t}{kT_r}\Delta T_r. \tag{2.9}$$

Здесь $\langle\psi\varphi^{(1)}\rangle=\int\psi\varphi^{(1)}f^{(0)}d\mathbf{c}$; $\mu$—коэффициент сдвиговой вязкости, а $\lambda_t$ — коэффициент теплопроводности, связанный с поступательными степенями свободы.

Найдем аналог соотношений (2. 8), (2. 9) для рассматриваемого случая многотемпературной релаксации. Для этого умножим уравнение (2. 5) последовательно на функции $Bc_xc_y$, $Ac_y$, $A^{(i)}c_y$ и инварианты бинарных соударений

$$\psi_j=1,\ m\mathbf{c},\ \frac{mc^2}{2}+E_V, E_M, E_N, E_P.$$

Осредняя составленные произведения по фазовому пространству скоростей и внутренних энергий и используя свойство самосопряженности оператора $\mathscr{L}\,[\varphi^{(1)}]$, доказанное в [12],

$$\langle \varphi\mathscr{L}[\varphi^{(1)}]\rangle = \langle \varphi^{(1)}\mathscr{L}[\psi]\rangle,$$

получим:

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\langle c_y^2 c_x B\varphi^{(1)}\rangle = \langle c_y c_x B\mathscr{L}\,[\varphi^{(1)}]\rangle = \langle \varphi^{(1)}\mathscr{L}\,[c_y c_x B]\rangle;$$

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\langle c_y^2 A\varphi^{(1)}\rangle = \langle c_y^2 A\mathscr{L}\,[\varphi^{(1)}]\rangle = \langle \varphi^{(1)}\mathscr{L}\,[c_y^2 A]\rangle;$$

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\langle c_y^2 A^{(i)}\varphi^{(1)}\rangle = \langle c_y^2 A^{(i)}\mathscr{L}\,[\varphi^{(1)}]\rangle = \langle \varphi^{(1)}\mathscr{L}\,[c_y^2 A^{(i)}]\rangle;$$

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\langle c_y\psi_j\rangle = 0.$$

Используя интегральные уравнения, приведенные в работе [1], будем иметь:

$$(2.10)\qquad \frac{\partial}{\partial y_1}\langle c_y^2 c_x B\varphi^{(1)}\rangle = \langle \varphi^{(1)}D_3\rangle;\quad \frac{\partial}{\partial y_1}\langle c_y^2 A\varphi^{(1)}\rangle = \langle \varphi^{(1)}D_1\rangle;$$

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\langle c_y^2 A^{(i)}\varphi^{(1)}\rangle = \langle \varphi^{(1)}D_2^{(i)}\rangle,$$

где

$$\langle g\varphi^{(1)}\rangle = \sum_{(V,I)}\int g\varphi^{(1)}f^{(0)}d\mathbf{c};\quad D_3 = f^{(0)}\frac{m}{kT}c_y c_x;$$

$$D_1 = f^{(0)}c_y\left(\zeta^2 - \frac{5}{2} - P_V^{(1)}\right);\quad D_2^{(i)} = f^{(0)}c_y P_I^{(1)},\ i = 1, 2, 3.$$

Переходя в соотношениях (2.10) к интегральной форме и учитывая условия сращивания (2.6), получим:

$$(2.11)\qquad \langle c_y^2 c_x B\varphi^{(1)}(y_1 = 0)\rangle = -\frac{\mu}{kT_r}\Delta u;$$

$$(2.12)\qquad \langle c_y^2 A\varphi^{(1)}(y_1 = 0)\rangle = -\frac{\lambda_a}{kT_r}\Delta T_r;$$

$$(2.13)\qquad \langle c_y^2 A^{(i)}\varphi^{(1)}(y_1 = 0)\rangle = -\frac{\lambda_i}{kT_{ir}}\Delta T_{ir};$$

$$(2.14)\qquad \langle c_y\psi_j\varphi^{(1)}(y_1 = 0)\rangle = \langle c_y\psi_j\varphi_e^{(i)}(y\to 0)\rangle,$$

где $\lambda_a = \lambda_t + \lambda_V$; $\lambda_t$, $\lambda_V$, $\lambda_i$ — диссипативные коэффициенты, аналогичные определенным в работе [1].

Соотношения (2.11) — (2.13) являются аналогом выражений (2.8), (2.9) в рассматриваемом случае многотемпературной релаксации. Для определения величин скачков $\Delta T_r$, $\Delta u$, $\Delta T_{ir}$ с помощью равенств (2.11)—(2.13) необходимо знать функцию $\varphi^{(1)}$ $(y_1=0)$, т. е. решение уравнения (2.5). Для приближенного определения скачков воспользуемся модифицированным методом Максвелла [11], аппроксимировав функцию $\varphi(y_1=0,\ c_y<0)$ следующим образом:

$$(2.15)\qquad \varphi^{(1)}(y_1 = 0, c_y < 0) = \varphi_e + b_0\zeta_x + b_1\left(\zeta^2 - \frac{5}{2} - P_V^{(1)}\right) - \sum_{(i)} b_{2i}P_I^{(1)}.$$

Подставляя аппроксимацию (2.15) в выражения (2.11)—(2.14), получим

$$\Delta u = \eta \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \Delta T_r = \eta_a \frac{\partial T}{\partial y}; \quad \Delta T_{ir} = \eta_i \frac{\partial T_i}{\partial y}; \quad \frac{\Delta n_e}{n_e} = -\eta_e \frac{\partial T}{\partial y}, \tag{2.16}$$

где

$$\eta = \left(0{,}5 + \frac{2}{\pi}\right)\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\mu v_r}{p_e};$$

$$\eta_a = \frac{\lambda_a \sqrt{\pi}}{\left(2 + c_v'\right) n_e v_r k}\left[\frac{1}{2} + \frac{26\left(2 + c_v'\right)}{25\pi\lambda_a^2}\lambda_i^2 + \frac{2\left(2 + c_v'\right)}{\pi c_v' \lambda_a^2}\lambda_V^2\right];$$

$$\eta_i = \frac{\lambda_i \sqrt{\pi}(1 + 4/\pi)}{2c_i n_e v_r}; \quad c_i = \frac{d\varepsilon_i}{dT_i}; \quad c_v' = \frac{1}{k}\frac{d\varepsilon_V}{dT};$$

$$\eta_e = \lambda_a \sqrt{\pi}\left[2\left(2 + c_v'\right) n_e v_r kT\right]^{-1}.$$

Для окончательного определения искомых граничных условий, т. е. величин $T_i(y \to 0) = T_{ir} + \Delta T_{ir}$, $T(y \to 0) = T_r + \Delta T_r$, необходимо знать температуры $T_{ir}$, $T_r$. В случае одноатомного газа для определения $T_r$ в пучке отраженных молекул используют так называемые коэффициенты аккомодации [13–15], которые вводятся в виде определенных отношений температур [13,14] или потоков энергии [8,15] и характеризуют обмен энергией между молекулами в адсорбированном состоянии и стенкой [13]. В рассматриваемом случае по аналогии с простым газом можно использовать следующие определения коэффициентов аккомодации:

$$\alpha_i = \frac{Q_i(y_1 = 0) - Q_{ir}}{Q_i(y_1 = 0) - Q_{iw}}; \quad \alpha = \frac{Q(y_1 = 0) - Q_r}{Q(y_1 = 0) - Q_w}, \tag{2.17}$$

где

$$Q_i = -\langle c_y \tilde{f}(c_y < 0) E_I \rangle; \quad Q = -\left\langle c_y \tilde{f}(c_y < 0)\left(\frac{mc^2}{2} + E_V\right)\right\rangle;$$

$$Q_{ir} = \langle c_y \tilde{f}(c_y > 0) E_I \rangle; \quad Q_r = \left\langle c_y \tilde{f}(c_y > 0)\left(\frac{mc^2}{2} + E_V\right)\right\rangle;$$

$$Q_{iw} = Q_{ir}(T_{ir} = T_r = T_w); \quad Q_w = Q_r(T_{ir} = T_r = T_w),$$

$$\tilde{f} = f f^{(0)-1}.$$

Рассмотрим определения (2.17). Величина $(Q_i - Q_{ir})$ равна полному нормальному потоку $q_i$ колебательной энергии моды $i$, а величина $(Q - Q_r)$ — полному потоку $q$ поступательно-вращательной энергии $\frac{mc^2}{2} + E_V$.

Чтобы найти $q_i(y_1 = 0)$, $q(y_1 = 0)$, умножим уравнение (2.3) на инварианты $E_I$, $\frac{mc^2}{2} + E_V$ и осредним результат по фазовому пространству скоростей $c$ и энергий $E_I$, $E_V$:

$$\frac{\partial q_i}{\partial y_1} + \mathrm{Kn}\,\Omega = 0; \quad \frac{\partial q}{\partial y_1} + \mathrm{Kn}\left\langle\left(\frac{mc^2}{2} + E_V\right) c_x \frac{\partial f}{\partial x}\right\rangle = 0, \tag{2.18}$$

где

$$\Omega = \left\langle E_I \left(\sum_{(V,I)}' \int \left(f' f_1' - f f_1\right) dp' + c_x \frac{\partial f}{\partial x}\right)\right\rangle.$$

Таким образом, с точностью до величин порядка Kn имеем

$$\frac{\partial q_i}{\partial y_1} = \frac{\partial q}{\partial y_1} = 0; \quad q_i(y_1 = 0) = q_i(y = 0); \quad q(y_1 = 0) = q(y = 0). \tag{2.19}$$

Вычисляя потоки $q_i(y \to 0)$, $q(y \to 0)$ с помощью соотношения (2.6) и учитывая определение (2.17), получим

$$\frac{\lambda_i}{c_i}\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial y} = \frac{\alpha_i}{2\sqrt{\pi}} n_r v_r [\varepsilon_{ir} - \varepsilon_{iw}] + \alpha_i \frac{\lambda_i}{c_i}\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial y}; \tag{2.20}$$

$$\frac{\lambda_a}{c_a}\frac{\partial \varepsilon_a}{\partial y} = \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}} n_r v_r [\varepsilon_{ar} - \varepsilon_{aw}] + \alpha \frac{\lambda_a}{c_a}\frac{\partial \varepsilon_a}{\partial y},$$

где

$$\varepsilon_{ir} = \varepsilon_i(T_{ir}); \quad \varepsilon_{iw} = \varepsilon_i(T_w); \quad \varepsilon_a = 2kT + \varepsilon_V;$$

$$\varepsilon_{ar} = \varepsilon_a(T_r); \quad \varepsilon_{aw} = \varepsilon_a(T_w); \quad c_a = \frac{d\varepsilon_a}{dT}.$$

Оценивая порядки величин в соотношениях (2.20), заметим, что температуры $T_i$, $T$ с точностью до величин порядка $\sqrt{\mathrm{Kn}}$ могут быть найдены из граничных условий

$$l_i \frac{\partial \varepsilon_i^{(0)}}{\partial y} = \frac{\alpha_i}{2\sqrt{\pi}}\left[\varepsilon_i^{(0)} - \varepsilon_{iw}\right]; \quad l_a \frac{\partial \varepsilon_a^{(0)}}{\partial y} = \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}\left[\varepsilon_a^{(0)} - \varepsilon_{aw}\right], \tag{2.21}$$

где

$$\varepsilon_i^{(0)} = \varepsilon_i\left(T_i^{(0)}\right); \quad \varepsilon_a^{(0)} = \varepsilon_a\left(T^{(0)}\right); \quad T_i = T_i^{(0)} + 0\left(\sqrt{\mathrm{Kn}}\right);$$

$$T = T^{(0)} + 0\left(\sqrt{\mathrm{Kn}}\right);$$

$$l_i = \lambda_i / n_e^{(0)} v_T c_i; \quad l_a = \lambda_a / n_e^{(0)} v_T c_a;$$

$$n_e^{(0)} = \frac{p_e}{kT^{(0)}}; \quad v_T = \sqrt{\frac{2kT^{(0)}}{m}}.$$

Отсюда получим:

1. $\varepsilon_i^{(0)} = \varepsilon_{iw}$; $\varepsilon_a^{(0)} = \varepsilon_{aw}$ при $\alpha_i \approx \alpha \approx 1$;
2. $\dfrac{\partial \varepsilon_i^{(0)}}{\partial y} = \dfrac{\partial \varepsilon_a^{(0)}}{\partial y} = 0$ при $\alpha_i \approx \alpha \approx \mathrm{Kn}$;
3. $\left[\left(1 - \varepsilon_i^{(0)}\right)/\varepsilon_{iw}\right] \sim \left[\left(1 - \varepsilon_a^{(0)}\right)/\varepsilon_{aw}\right] \sim 1$ при $\alpha_i \approx \alpha \approx \sqrt{\mathrm{Kn}}$.

Совокупность рассмотренных значений фактически перекрывает весь диапазон изменения коэффициентов аккомодации.

Проанализируем физическую сущность условий.

Первый случай соответствует полностью равновесной стенке $T = T_1 = T_2 = T_3 = T_w$.

Второй — соответствует полностью теплоизолированной стенке, причем температуры различных мод колебаний могут отличаться как между собой, так и от температуры $T_w$ [5].

В третьем — все колебательные температуры отличаются на свою величину от температуры стенки $T_w$.

В принципе возможны случаи, когда стенка обладает разной каталитичностью относительно различных мод колебаний.

Для приложений практический интерес могут представлять поверхности, благоприятные с точки зрения сохранения инверсной населенности в газодинамическом течении. Например, при физической адсорбции молекул $CO_2$ на твердой поверхности релаксация симметричной и деформационной моды ($i=1,2$) может протекать в соответствии с первым случаем, в то время как релаксация антисимметричной моды — в соответствии со вторым случаем, что аналогично процессам колебательной релаксации на поверхности частиц аэрозоля, описанным в работе [6].

Для определения граничных условий первого приближения (2.21) не требуется решение кинетической задачи о температурном скачке $\Delta T_{ir}$ или $\Delta T_r$. Необходимость в решении такой задачи возникает в следующем приближении, если нужно отличить $T_i$ ($i=1.2, 3\ldots$) и $T$ от температур $T_{ir}$, $T_r$ в отраженном пучке молекул. Для установления этих граничных условий второго приближения проанализируем соотношение (2.20) с учетом величины $\mathrm{Kn}\Omega$.

Рассмотрим, как и в (2.4), слой Кнудсена, в котором

$$f(y_1)=f^{(0)}(y=0)+0(\sqrt{\mathrm{Kn}}). \qquad (2.22)$$

Подставляя (2.22) в соотношение (2.18) и переходя к интегральной форме записи, получим

$$q_i^{(2)}=-y_1\Omega^{(0)}+(\mathrm{const})_i, \qquad (2.23)$$

где

$$\Omega^{(0)}=\Omega\left(f=f^{(0)}\right);\quad q_i^{(2)}=\langle c_yE_I\varphi^{(2)}\rangle;\quad \left[q_i^{(2)}/\varepsilon_iv_r\right]\sim \mathrm{Kn}.$$

Для определения $(\mathrm{const})_i$ учтем условия сращивания при $y_1\to\infty$

$$\varphi^{(2)}(y_1\to\infty)=\frac{y_1^2}{2}\frac{\partial^2 f^{(0)}}{\partial y^2}(y\to 0)+y_1\frac{\partial\varphi_e^{(1)}}{\partial y}(y\to 0)+\varphi_e^{(2)}(y\to 0)$$

и запишем равенство (2.23) на верхней ($y_1\to\infty$) и нижней ($y_1=0$) границах слоя Кнудсена. Тогда

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\langle c_yE_I\rangle\equiv 0;\quad y_1\frac{\partial}{\partial y}\langle c_yE_I\varphi_e\rangle=-y_1\Omega^{(0)};$$

$$\langle E_Ic_y\varphi_e^{(2)}(y\to 0)\rangle=(\mathrm{const})_i;$$

$$\langle E_Ic_y\varphi^{(2)}(y_1=0)\rangle=(\mathrm{const})_i.$$

Исключая $(\mathrm{const})_i$, получим

$$q_i^{(2)}(y_1=0)=q_i^{(2)}(y\to 0).$$

Аналогично предыдущему для величины

$q^{(2)}=\left\langle c_y\left(\frac{mc^2}{2}+E_V\right)\varphi^{(2)}\right\rangle$ получим $q^{(2)}(y_1=0)=q^{(2)}(y\to 0)$.

Таким образом, в слабо неравновесном слое Кнудсена условия сохранения потоков энергии $q_i$, $q$ справедливы с точностью до членов порядка $\mathrm{Kn}\sqrt{\mathrm{Kn}}$.

Величины потоков $q_i^{(2)}$, $q^{(2)}$ можно определить по методу Чепмена—Энскога

$$q_i^{(2)}(y\to 0)=\lambda_i(\Delta T,\Delta T_i)\frac{\partial T_i^{(0)}}{\partial y}+\lambda_i\left(T^{(0)},T_i^{(0)}\right)\frac{\partial\Delta T_i}{\partial y}; \qquad (2.24)$$

$$q_i^{(2)}(y\to 0)=\lambda_a(\Delta T)\frac{\partial T^{(0)}}{\partial y}+\lambda_a\left(T^{(0)}\right)\frac{\partial\Delta T}{\partial y}+\mu\Delta u\frac{\partial u}{\partial y},$$

где $\Delta T = T(y \to 0) - T^{(0)}(y \to 0)$; $\Delta T_i = T_i(y \to 0) - T_i^{(0)}(y \to 0)$; $T_i^{(0)}$, $T^{(0)}$

удовлетворяют соотношениям (2.21).

Подставляя (2.24) в соотношения (2.19) и учитывая $\Delta T_r$, $\Delta T_{ir}$ (см. 2.16), получим для поправок $\Delta T$, $\Delta T_i$ следующие краевые условия:

В области $\alpha_i \sim 1$, $\alpha \sim 1$:

$$\Delta T_i = \left[\eta_i/l_i + (1/\alpha_i - 1)\, 2\sqrt{\pi}\right] l_i \frac{\partial T_i}{\partial y};$$

$$\Delta T = \left[\eta_a/l_a + (1/\alpha - 1)\, 2\sqrt{\pi}\right] l_a \frac{\partial T}{\partial y}.$$

В области $\alpha_i \sim \sqrt{\mathrm{Kn}}$, $\alpha \sim \sqrt{\mathrm{Kn}}$:

$$\frac{\lambda_i(\Delta T, \Delta T_i)}{\lambda_i\left(T_i^{(0)}, T^{(0)}\right)} + \left[\frac{\partial T_i^{(0)}}{\partial y}\right]^{-1} \frac{\partial \Delta T}{\partial y} = \frac{c_i(\Delta T_i - \Delta T_{ir})}{\varepsilon_i^{(0)} - \varepsilon_{iw}} + \frac{\Delta n_e}{n_e^{(0)}} - \frac{\Delta T - \Delta T_r}{2T^{(0)}} + \alpha_i;$$

$$\frac{\lambda_a(\Delta T)}{\lambda_a\left(T^{(0)}\right)} + \left[\frac{\partial T^{(0)}}{\partial y}\right]^{-1} \frac{\partial \Delta T}{\partial y} = \frac{c_a(\Delta T - \Delta T_r)}{\varepsilon_a^{(0)} - \varepsilon_{aw}} + \frac{\Delta n_e}{n_e^{(0)}} - \frac{\Delta T - \Delta T_r}{2T^{(0)}} + \alpha - \left[\lambda_a \frac{\partial T^{(0)}}{\partial y}\right]^{-1} \mu \Delta u \frac{\partial u}{\partial y}.$$

В области $\alpha_i \ll \mathrm{Kn}$, $\alpha \ll \mathrm{Kn}$:

$$\lambda_i \frac{\partial \Delta T_i}{\partial y} = \frac{\alpha_i}{2\sqrt{\pi}} n_e^{(0)} v_T \left[\varepsilon_i^{(0)} - \varepsilon_{iw}\right]; \quad \lambda_a \frac{\partial \Delta T}{\partial y} + \mu \Delta u \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Полученные выражения решают задачу об определении граничных условий к уравнениям многотемпературного пограничного слоя с сильной колебательной неравновесностью, которые можно использовать при оценках роли пограничных слоев в течениях смесей $CO_2+N_2+H_2O(He)$. Действительно, в обычно применяемых решетках $T_w = T_{iw}$ и потери усиления в пограничных слоях достигают 15—20% [16]. Кроме того, через расширяющийся вязкий турбулентный след эти потери распространяются на область течения в резонаторе. Если же стенка неравновесная ($T_w \neq T_{iw}$), то даже при наличии на внешней границе $T_\infty = T_{i\infty}$ неравновесный подслой занимает значительную часть толщины пограничного слоя [5].

Поскольку в невязком ядре потока $T_\infty \pm T_{i\infty}$ ($T_\infty \approx T_{i\infty}$, $i=1, 2$; $T_\infty \ll T_{i\infty}$, $i = 3, 4$), инверсная населенность и усиление при неравновесной стенке могут быть сохранены во всей области течения.

*Поступила 25 XI 1974*

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Жигулев В. Н., Кузнецов В. М.* Некоторые проблемы физической аэродинамики.— «Труды ЦАГИ», 1969, вып. 1136, с. 1.
2. *Жданов В. М.* К кинетической теории многоатомного газа.— ЖЭТФ, 1967, т. 53, вып. 6, с. 2099—2108.
3. *Кузнецов М. М.* Кнудсеновский слой в течении с двухтемпературной релаксацией.— ПМТФ, 1972, № 6, с. 38—43.

4. *Луцет М. О.* О течении релаксирующего газа вблизи твердой поверхности.— ПМТФ, 1973, № 4, с. 33—39.
5. *Кузнецов В. М., Селиверстов С. Н.* К обтеканию пластинки вязким потоком неравновесного газа.— «Изв. АН СССР. МЖГ», 1967, № 1, с. 14.
6. *Конюхов В. К., Прохоров А. М.* О возможности создания адсорбционного газодинамического квантового генератора.— «Письма в ЖЭТФ», 1971, т. 13, вып. 4, с. 216—218.
7. *Кузнецов В. М.* Об инверсии населенностей уровней молекул в задачах релаксационной газовой динамики.— В кн.: Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, изд. ВЦ СО АН СССР, 1973, т. 4, № 3, с. 95—101.
8. *Коган М. Н.* Динамика разреженного газа. М., «Наука», 1967, с. 192.
9. *Кузнецов В. М.* К теории коэффициента объемной вязкости.— «Изв. АН СССР. МЖГ», 1967, № 6, с. 89—93.
10. *Кузнецов М. М.* Об аналитическом решении уравнения Больцмана в кнудсеновском слое.— ПМТФ, 1971, № 4, с. 136—139.
11. *Loyalka S. K.* Approximate method in the kinetic theory.— «Phys. Fluids», 1971, vol. 14, N 11, p. 2291—2294.
12. *Жигулев В. Н.* Уравнения движения неравновесной среды с учетом излучения.— «Инж. журн.», 1964, т. 4, вып. 2, с. 231—241.
13. *Я де Бур.* Динамический характер адсорбции. М., ИЛ, 1962.
14. *Knudsen M.* Die molekulare Wärmeleitung der Gase und der Akkommodationskoeffizient.— «Ann. Phys.», 1911, Bd. 34, N 4, S. 593—656.
15. *Шааф С. А.* Динамика разреженных газов.— В кн.: Современные проблемы газовой динамики. М., «Мир», 1971, с. 243—267.
16. *Monsler M. J., Greenberg R. A.* The effects of boundary layers on the gain of a gasdynamic laser.— «AIAA Paper», 1971, N 24.

---

УДК 533.6.011.5

# ОБТЕКАНИЕ V-КРЫЛЬЕВ ДОЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ

*В. В. Кравец, Н. В. Трифонова, А. И. Швец*

*(Москва, Днепропетровск)*

В связи с проблемой создания гиперзвуковых самолетов в последние годы возник значительный интерес к изучению обтекания крыльев при больших сверхзвуковых скоростях. Исследования проводятся в двух основных направлениях: изучается гиперзвуковое обтекание крыльев традиционной формы и ведется поиск новых компоновок, обладающих оптимальными аэродинамическими характеристиками. К последнему направлению относятся многочисленные исследования по аэродинамике [1, 2], теплообмену [3] и устойчивости *V*-крыльев при сверх- и гиперзвуковых скоростях.

До выхода на сверхзвуковой режим полета летательный аппарат должен преодолеть диапазон дозвуковых скоростей. В этой связи представляет интерес обтекание *V*-крыльев при числах $M < 1$. Дозвуковому обтеканию подобных конфигураций посвящено мало исследований, причем основное внимание было направлено на изучение обтекания компоновок самолетов с *V*-образными крыльями или килями. Результаты аналитических и численных расчетов с учетом интерференции нестационарных аэродинамических сил, действующих на *V*-образное и многокилевое оперение в комбинации с фюзеляжем, приведены в работах [4, 5]. Экспериментальное исследование *V*-крыльев по влиянию угла раскрытия крыльев на аэродинамические характеристики модели самолета содержится в работах [6, 7].

Изучение распределения давления при обтекании *V*-крыльев проводилось с помощью сборной конструкции, позволяющей вращать одну половину крыла относительно другой, изменяя угол раскрытия $\gamma$ от 0 до 180°. Съемные крылья были выполнены в виде плоских треугольных