

УРАВНЕНИЯ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ГРУНТА И ИХ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Г. М. Ляхов

Для описания динамических процессов в грунтах и горных породах предложена модель, учитывающая объемную вязкость [1, 2]. Закономерности деформирования твердых сред также характеризуются моделями, рассматривающими сдвиговую вязкость.

В уравнения среды в [3] включены упруговязкие члены, соответствующие модели Максвелла, которые определяют процесс релаксации во времени девиатора касательных напряжений. В работе [4] вязкостный член введен в условие пластичности Мизеса — Шлейхера; среда сначала оказывает пренебрежимо малое сопротивление сжатию, а после достижения некоторой плотности несжимаема. В соответствии с [5] среда при одноосном напряженном состоянии подчиняется модели Кельвина — Фойгта, а в сложном напряженном состоянии — несжимаема. При сферической симметрии условие пластичности зависит от скорости деформации. Согласно [6], объемная деформация линейно и обратимо зависит от среднего нормального напряжения, а связь между девиаторами напряжений и деформаций вязкоупругая. В работе [7] к грунту применена модель Кельвина — Фойгта. В соответствии с [8] при всестороннем сжатии среда ведет себя упруго, а при сдвиге проявляет вязкие свойства.

Ниже приводится усовершенствование модели [2]. Для интервала напряжений, когда диаграммы динамического и статического сжатия и разгрузки можно принять линейными, а коэффициенты вязкости и бокового давления постоянными, сопоставлением с опытными данными определены приближенные значения параметров грунта, входящие в определяющие уравнения модели. Опыты включили одновременное измерение во времени компонентов напряжения и деформации, что позволило построить диаграммы объемного сжатия грунта на разных расстояниях от взрыва.

Уравнения модели среды. Примем, что в среде существуют предельные нелинейные диаграммы $\sigma(\epsilon)$, связывающие среднее нормальное напряжение $\sigma = -(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$ и объемную деформацию $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$, σ_i и ϵ_i — главные компоненты напряжения и деформации. Эти диаграммы, приведенные на рис. 1, соответствуют: 1 — динамическому сжатию ($\epsilon \rightarrow +\infty$), 3 — статическому сжатию ($\epsilon \rightarrow +0$), 1' — динамической разгрузке ($\epsilon \rightarrow -\infty$ после $\epsilon \rightarrow +\infty$), 3' — статической разгрузке ($\epsilon \rightarrow -0$ после $\epsilon \rightarrow +0$). Вязкие свойства проявляются начиная с нулевых напряжений.

Элемент среды примем в виде двух пружин и демпфера (рис. 1). Объемная деформация среды $\epsilon = \epsilon^{(1)} + \epsilon^{(2)}$, где $\epsilon^{(1)}$ определяет деформацию первой, а $\epsilon^{(2)}$ — второй пружины и демпфера. Сопротивление демпфера объемному сжатию и разгрузке пропорционально скорости деформации: $\sigma = \eta \dot{\epsilon}^{(2)}$ — сжатие ($\epsilon^{(2)} > 0$), $\sigma = \eta_2 \dot{\epsilon}^{(2)}$ — разгрузка ($\epsilon^{(2)} < 0$);

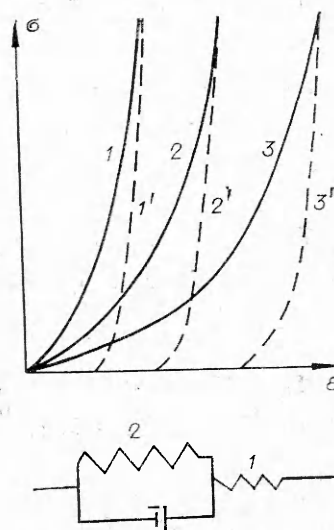


Рис. 1

η_1 и η_2 — коэффициенты объемной вязкости при сжатии и разгрузке. Связь между напряжением и деформацией: для первой пружины (см. рис. 1, 1, 1')

$$\begin{aligned}\sigma &= f_D(\epsilon^{(1)}), \quad \epsilon^{(1)} = \varphi_D(\sigma) \quad \text{при } \dot{\epsilon}^{(1)} > 0, \\ \sigma &= f_R(\epsilon^{(1)}), \quad \epsilon^{(1)} = \varphi_R(\sigma) \quad \text{при } \dot{\epsilon}^{(1)} < 0;\end{aligned}$$

для второй пружины (см. рис. 1, 2, 2')

$$\begin{aligned}\sigma &= f_2(\epsilon^{(2)}), \quad \epsilon^{(2)} = \varphi_2(\sigma) \quad \text{при } \dot{\epsilon}^{(2)} > 0, \\ \sigma &= f_{2R}(\epsilon^{(2)}), \quad \epsilon^{(2)} = \varphi_{2R}(\sigma) \quad \text{при } \dot{\epsilon}^{(2)} < 0.\end{aligned}$$

Диаграмма динамического сжатия среды совпадает с диаграммой сжатия первой пружины

$$\sigma = f_D(\epsilon), \quad \epsilon = \varphi_D(\sigma).$$

Диаграмма статического сжатия соответствует суммарному сжатию обеих пружин

$$\sigma = f_s(\epsilon), \quad \epsilon = \varphi_s(\sigma) = \varphi_D(\sigma) + \varphi_2(\sigma).$$

Диаграмма динамической разгрузки совпадает с диаграммой разгрузки первой пружины

$$\sigma = f_R(\epsilon), \quad \epsilon = \varphi_R(\sigma).$$

Диаграмма статической разгрузки определяется разгрузкой обеих пружин

$$\sigma = f_{sR}(\epsilon), \quad \epsilon = \varphi_{sR}(\sigma) = \varphi_R(\sigma) + \varphi_{2R}(\sigma).$$

Различием диаграммы динамического и статического сжатия учитывается объемная вязкость, различием диаграмм сжатия и разгрузки — пластичность, приводящая к необратимости объемных деформаций. Ранее [2] принималось, что деформация второй пружины полностью необратима.

Уравнения, определяющие объемную сжимаемость среды, последовательно меняются в зависимости от режима сжатия и разгрузки. При ударном нагружении (на скачке) деформация соответствует кривой динамического сжатия: $\dot{\sigma} \rightarrow +\infty, \dot{\epsilon} \rightarrow +\infty$

$$\epsilon = \epsilon^{(1)} = \varphi_D(\sigma). \quad (1)$$

При непрерывном нарастании напряжения ($\dot{\sigma} \geq 0$)

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon} &= [\dot{\sigma} : (df_D/d\epsilon)] + g_1(\sigma, \epsilon), \quad q_1(\sigma, \epsilon) = \sigma/\eta_1 - f_2(\epsilon - \epsilon^{(1)})/\eta_1, \\ \epsilon^{(1)} &= \varphi_D(\sigma).\end{aligned} \quad (2)$$

При убывании напряжения, когда $\dot{\sigma} \leq 0, \dot{\epsilon}^{(1)} \leq 0, \dot{\epsilon}^{(2)} > 0$

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon} &= [\dot{\sigma} : (df_R/d\epsilon)] + g_2(\sigma, \epsilon), \quad g_2(\sigma, \epsilon) = \sigma/\eta_1 - f_2(\epsilon - \epsilon^{(1)})/\eta_1, \\ \epsilon^{(1)} &= \varphi_R(\sigma).\end{aligned} \quad (3)$$

При убывании напряжения, когда $\dot{\sigma} < 0, \dot{\epsilon}^{(1)} < 0, \dot{\epsilon}^{(2)} < 0$

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon} &= [\dot{\sigma} : (df_{sR}/d\epsilon)] + g_3(\sigma, \epsilon) = \sigma/\eta_2 - f_{2R}(\epsilon - \epsilon^{(1)})/\eta_2, \\ \epsilon^{(1)} &= \varphi_R(\sigma).\end{aligned} \quad (4)$$

Для построения системы уравнений, определяющих поведение среды и достаточных для замыкания основных уравнений движения, необ-

ходимо привлечь дополнительные соотношения. Введем уравнения, связывающие главные компоненты напряжения. При сферической симметрии

$$\sigma_2 = \psi_1(\sigma_1), \quad (5)$$

при цилиндрической симметрии

$$\sigma = \psi_2(\sigma_1), \quad \sigma_3 = \psi_3(\sigma_1). \quad (6)$$

Опыты показывают, что при возрастании напряжения от нуля до десятков атмосфер в грунтах и до сотен атмосфер в горных породах эти зависимости близки к линейным.

При сферической симметрии

$$\sigma_2 = \kappa_1 \sigma_1,$$

при цилиндрической симметрии

$$\sigma_2 = \kappa_2 \sigma_1, \quad \sigma_3 = \kappa_3 \sigma_1.$$

Коэффициенты бокового давления κ_i для большинства грунтов и горных пород находятся в пределах 0,25—0,6. При высоких напряжениях они возрастают и приближаются к единице. В этом случае при решении задач со сферической симметрией следует применять уравнение (5), а с цилиндрической (6).

Зависимости (5) и (6) удовлетворяют условию пластичности Мизеса — Шлейхера — Боткина, применение которого к грунтам предложено в [9]. Это условие налагает связь, поэтому из трех уравнений независимы только два. При постоянных значениях коэффициенты бокового давления связаны в соответствии с этим уравнением

$$(1 - \kappa_1)/(1 + 2\kappa_1) = [(1 - \kappa_2)^2 + (\kappa_2 - \kappa_3)^2 + (\kappa_3 - 1)^2]^{1/2} / [2^{1/2}(1 + \kappa_2 + \kappa_3)], \quad \kappa_3 < \kappa_1 < \kappa_2.$$

Уравнения модели линейной среды. Рассмотрим вариант модели с линейными определяющими функциями и коэффициентом вязкости, одинаковым при нагрузке и разгрузке. Уравнения нагрузки (динамической и статической):

$$\sigma = f_D(\epsilon) = K_D \epsilon, \quad \sigma = f_S(\epsilon) = K_S \epsilon, \quad K_D = \text{const}, \quad K_S = \text{const}.$$

Уравнения разгрузки (динамической и статической):

$$\sigma - \sigma_{\max} = K_R(\epsilon - \epsilon_D), \quad \epsilon_D = \sigma_{\max}/K_D, \quad \sigma - \sigma_{\max} = K_{SR}(\epsilon - \epsilon_S), \quad \epsilon_S = \sigma_{\max}/K_S.$$

Уравнения (1) — (4) в этом случае принимают вид

$$\epsilon = \sigma/K_D \quad \text{при} \quad \dot{\sigma} \rightarrow +\infty, \quad (7)$$

$$\dot{\epsilon} + \mu_1 \epsilon = \dot{\sigma}/K_D + \mu_1 \sigma/K_S \quad \text{при} \quad \dot{\sigma} \geq 0, \quad \mu_1 = K_S K_D / (K_D - K_S) \eta, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} + \mu_1 \epsilon = & \dot{\sigma}/K_R + \mu_1 \sigma(1/K_S - 1/K_D + 1/K_R) + \\ & + \mu_1 \sigma_{\max}(1/K_D - 1/K_R) \quad \text{при} \quad \dot{\sigma} \leq 0, \quad \dot{\epsilon}^{(1)} \leq 0, \quad \dot{\epsilon}^{(2)} \leq 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} + \mu_2 \epsilon = & \dot{\sigma}/K_R + \mu_2 \sigma/K_{SR} + \mu_2 \sigma_{\max}(1/K_D - 1/K_R) + \\ & + \mu_2 \sigma^*(1/K_S - 1/K_D - 1/K_{SR} + 1/K_R) \quad \text{при} \quad \dot{\sigma} < 0, \quad \dot{\epsilon}^{(1)} < 0, \quad \dot{\epsilon}^{(2)} \leq 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\mu_2 = K_{SR} K_R (K_R - K_{SR}) \eta$; σ^* — напряжение при $\dot{\epsilon}^{(2)} = 0$.

Условие $\dot{\epsilon}^{(2)} \geq 0$ эквивалентно $\dot{\sigma} \leq K_R \epsilon$, а $\dot{\epsilon}^{(2)} \leq 0$ — условию $\dot{\sigma} \geq K_R \epsilon$. Деформация ϵ достигает максимума в области применения уравнения (9). Коэффициенты $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ постоянны.

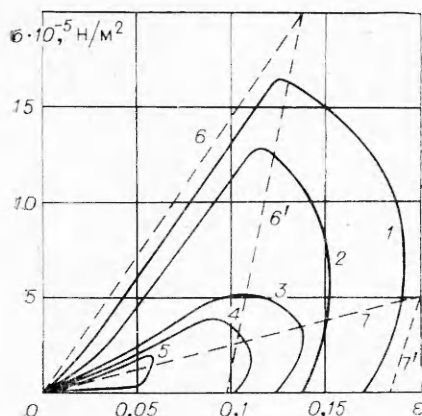


Рис. 2.

Экспериментально наиболее изучено одноосное деформирование грунта, когда $\epsilon = \epsilon_1$, $\sigma = \sigma_1(1 + 2\mu_1)$. Обозначим модули сжатия и разгрузки для компонентов σ_1 и ϵ_1 при одноосном состоянии E_D , E_S , E_R , E_{SR} , η^* . Учитывая, что (7)–(10) должны переходить в соответствующие уравнения одноосного сжатия и разгрузки, найдем

$$K_l = E_l / (1 + 2\mu_1), \quad l = D, S, K, SR, \\ \eta^* = \eta / (1 + 2\mu_1).$$

Параметры E_l и η^* превышают значения K_l и η , так как $\mu_1 > 0$.

Экспериментальное определение характеристик грунта как линейной вязкопластической среды. В лессовом

грунте нарушенной структуры с плотностью скелета $\gamma = (1,37 \div 1,43) \times 10^3$ кг/м³ и влажностью $W = 10 - 16\%$ при взрывах плоских зарядов проводились одновременные измерения во времени напряжений и деформаций¹. Плотность заряда $C = 0,3$ кг/м². Датчики напряжений и деформаций устанавливались на расстояниях 20, 30, 40, 50 и 80 см от заряда. По записям $\sigma(t)$ и $\epsilon(t)$ на рис. 2 построены графики 1–5 зависимости среднего нормального напряжения от объемной деформации $\sigma(\epsilon)$, относящиеся к расстояниям 20, 30, 40, 50 и 80 см соответственно. При уменьшении напряжения до нуля происходит дальнейшее уменьшение деформаций, не представленное на рис. 2, так как диаграммы $\sigma(\epsilon)$ при этом совпадают с осью абсцисс и накладываются друг на друга. Остаточные деформации в соответствии с этим на расстояниях 20, 30, 40, 50 и 80 см равны 0,06; 0,06; 0,025; 0,01; 0,008. Коэффициент бокового давления $\mu_1 = 0,35 - 0,45$.

Из графиков видно, что за время прохождения взрывной волны (12–35 мс) успевают проявиться вязкие свойства грунта. Кривые объемного сжатия и разгрузки на разных расстояниях от взрыва, т. е. при разных скоростях нарастания и уменьшения нагрузки, различны, максимумы деформации достигаются в период уменьшения напряжения. С удалением от места взрыва точки достижения максимумов напряжения и деформации сближаются. У кривой 5 они практически совпадают, что связано с приближением диаграммы сжатия, реализуемой на этом расстоянии, к статической кривой.

Найдем по экспериментальным графикам вязкопластические характеристики грунта, предполагая, что в рассматриваемом интервале напряжений уравнения, определяющие поведение среды, линейны. Опыты показывают, что на расстоянии 20 и 30 см впереди движется предвестник. Основная волна, следующая за ним, имеет скачок напряжения от $(0,5 \div 1,0) \cdot 10^5$ Н/м² до максимального значения. По величине скачка найдено $K_D = (140 \div 150) \cdot 10^5$ Н/м².

На начальном участке кривой 5 сжатие происходит при скорости деформаций $\dot{\epsilon} < 1$ с⁻¹. Принимая диаграмму сжатия на этом участке статической, получим $K_S = (20 \div 25) \cdot 10^5$ Н/м². В точках диаграммы $\sigma(\epsilon)$, где при непрерывном возрастании напряжения достигается максимума, из (8) получим уравнение

$$\dot{\epsilon} + \mu_1 \dot{\epsilon} = \mu_1 \sigma_{\max} / K_S.$$

¹ В опытах участвовали А. А. Вовк, В. Г. Кравец, Г. М. Ляхов, В. А. Плаксий, В. И. Салицкая, К. С. Султанов.

Воспользуемся кривой 4. Подставив значения K_s , ϵ и $\sigma_{\max}$ и учитывая, что в точке максимума напряжения $\dot{\epsilon} = 40 \text{ с}^{-1}$, найдем $\mu_1 = (850 \div 1000) \text{ с}^{-1}$. При достижении деформацией максимума, из (9) получим уравнение, позволяющее определить модуль K_R в виде

$$K_R = \{\sigma(\epsilon_{\max}) + \mu_1[\sigma(\epsilon_{\max}) - \sigma_{\max}]\} / \{\mu_1[\epsilon_{\max} - \sigma(\epsilon_{\max})(1/K_s - 1/K_D) - \sigma_{\max}/K_D]\}.$$

Подстановка величин, соответствующих линиям 1—5, дает $K_R = (400 \div 600) \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$. При этом для графиков 1—4 взяты из опыта значения $\sigma(\epsilon_{\max}) \cdot 10^{-8} \text{ Н/(м}^2 \cdot \text{с)}$, равные —4,5; —2,7; —1,0 и —0,3 соответственно. Из опыта следует, что убывание деформации происходит при $|\dot{\epsilon}| < 1$. Принимая соответствующие участки диаграмм за статические и линеаризуя их, найдем $K_{SR} = (300 \div 400) \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$. Параметр вязкости при разгрузке существенно выше, чем при нагрузке:

$$\mu_2 = K_{SR}K_R(K_D - K_s) / (K_R - K_{SR})K_sK_D \approx 25\,000 \text{ с}^{-1}.$$

В отличие от модели [2] поведение среды определяется двумя параметрами вязкости, соответствующими нагрузке и разгрузке второй пружины модели. Второй параметр вязкости при том же значении η существенно больше, чем первый. Это связано с тем, что $K_{2R} > K_2$. Ранее [2] при сжатии образцов грунта с близкими характеристиками при разных $\dot{\epsilon}$ были получены близкие значения первого параметра вязкости, $\mu = 300 - 1000 \text{ с}^{-1}$.

На рис. 2 штриховые линии соответствуют найденным предельным диаграммам: 6 — динамическому сжатию, 6' — динамической разгрузке, 7 — статическому сжатию, 7' — статической разгрузке. Модули сжатия относительно малы, а их отношение велико: $K_D/K_s = 6 \div 7$. Это связано со свойствами грунта, в котором проводились опыты — он имел нарушенную структуру и малую плотность, что обуславливает его большую сжимаемость.

Общий характер предельных диаграмм, полученных из анализа экспериментальных значений параметров взрывных волн, соответствует результатам опытов по сжатию образцов как статическими, так и динамическими нагрузками [10, 11]. Действительно, при предельных режимах модули разгрузки существенно выше, чем нагрузки. При уменьшении напряжения происходит уменьшение деформаций, максимальные деформации соответствуют минимальным напряжениям. После снятия нагрузок сохраняются остаточные деформации. Ранее в соответствии с этим принималось, что при быстропотекающих динамических процессах вязкие свойства не успевают проявиться и закономерности распространения взрывных волн определяются только диаграммой динамического сжатия и разгрузки. Эти представления соответствуют модели упругопластической среды. Полученные результаты показывают, что при распространении взрывных волн предельная динамическая диаграмма непосредственно не реализуется — сжатие и разгрузка происходят на разных расстояниях от взрыва по разным диаграммам $\sigma(\epsilon)$, зависящим от скорости деформации грунта. Объемная деформация определяется не только максимальным значением напряжения, но и скоростью его нарастания и убывания. Остаточные деформации могут превышать значения, достигнутые при максимальном напряжении. Эти представления соответствуют модели вязкопластической среды.

В опытах наблюдается разброс параметров волн, достигающий 30%, поэтому найденные характеристики грунта как вязкопластической среды являются приближенными. Однако проявление вязких свойств

столь ярко, что оно перекрывает возможные неточности. Поведение грунта приближенно можно описать моделью, учитывающей объемную вязкость и пластические свойства.

*Институт механики
МГУ*

*Поступила в редакцию
12/III 1976*

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. М. Ляхов. Основания, фундаменты и механика грунтов, 1966, 3.
2. Г. М. Ляхов. Основы динамики взрывных волн в грунтах и горных породах. М., «Недра», 1974.
3. С. К. Годунов, П. С. Козин. ПМТФ, 1974, 5.
4. Г. Д. Бабе, Э. А. Бондарева и др. Изв. АН СССР, МТТ, 1975, 4.
5. Э. Л. Кошелев. ПМТФ, 1975, 2.
6. Akoi Koichi, Hozumi Masayuki. Proc. 16 Jap. Cong. Mater. Res. Kyoto, 1973.
7. R. N. Long, J. C. Dutertre, R. J. Krizek. Trans. Soc. Rheol., 1974, 18, 3.
8. M. P. Zabinski, A. Phillips. Acta Mech., 1974, 20, 3—4.
9. С. С. Григорян. ПММ, 1960, 24, 6.
10. Х. А. Рахматуллин, А. Я. Сагомоян, Н. А. Алексеев. Вопросы динамики грунтов. М., Изд-во МГУ, 1964.
11. Г. М. Ляхов, Н. И. Полякова. Волны в плотных средах и нагрузки на сооружения. М., «Недра», 1967.

ВРЕМЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИНИЦИИРОВАНИЯ ТЭНА ЛАЗЕРНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ

*А. А. Волкова, А. Д. Зинченко, Н. В. Санин, В. И. Таржанов,
Б. Б. Токарев*

В [1—3] при иницировании ВВ использовались два режима работы лазера — импульсный пиковый ($\tau \sim 1$ нс) и режим модуляции добротности резонатора ($\tau = 30 \div 50$ нс). Иницирование вторичных ВВ достигнуто лишь во втором режиме, причем исследования проведены при одном значении длительности иницирующего светового импульса. Опыты проводились в прозрачных для излучения оболочках, однако их влияние на процесс иницирования не рассматривалось.

В данной работе исследовалась зависимость пороговой энергии иницирования тэна от длительности лазерного импульса и от толщины прозрачной для лазерного излучения подложки (оболочки) на иницируемой поверхности.

Постановка экспериментов

Схема экспериментов изображена на рис. 1. Лазер на неодимовом стекле, работающий в режиме модуляции добротности резонатора, генерирует импульсы колоколообразной формы с длительностью на полувысоте ~ 30 нс и энергией до 4,5 Дж. Длина волны излучения 1,06 мкм. Для укорочения длительности лазерного импульса использовалось явление экранировки лазерного излучения плазмой, образующейся при пробое воздуха в фокусе положительной линзы [4, 5]. Обостритель лазерного импульса состоит из двух софокусных линз с фокусным расстоянием 36 мм. Для удлинения импульса в резонатор лазера устанавливалась положительная линза с фокусным расстоянием 4 м, изменяющая