ПМТФ, № 1, 1968

К ГИДРОДИНАМИКЕ ФЕРРОМАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ

В. М. Зайцев, М. И. Шлиомис

(Пермь)

1. В последнее время, в связи с различными техническими приложениями, появился интерес к гидродинамике ферромагнитной жидкости. Такая среда может быть реализована коллоидным диспергированием мелких ферромагнитных частиц в обычной жидкости. При этом магнитный момент единицы объема **M** может достигать значительных величин, становясь сравнимым с магнитным моментом твердых ферромагнетиков.

Впервые уравнения для ферромагнитной жидкости получены в [1]

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{v}\right]=-\nabla p+\eta\nabla^2\mathbf{v}+M\nabla H \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla T+\frac{T}{c_H}\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial T}\right)_H\left[\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{H}\right]=\chi\nabla^2 T \tag{1.2}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=0,\quad \operatorname{div}(\mathbf{H}+4\pi\mathbf{M})=0,\quad \operatorname{rot}\mathbf{H}=0 \tag{1.3}$$

При выводе этих уравнений предполагалось, что жидкость намагничена до насыщения сильным магнитным полем. Поэтому абсолютная величина намагниченности M не зависит от поля H и определяется только температурой. Если магнитные поля не слишком велики и насыщение не достигается, то в уравнении (1.1) вместо $M\nabla H$ должно стоять $(\mathbf{M}\nabla)\mathbf{H}$.

Система (1.1) — (1.3) значительно сложнее обычных уравнений гидродинамики. Это связано, во-первых, с существенной нелинейностью магнитной силы $\mathbf{M}\nabla H$ в уравнении Навье — Стокса. Далее, движение в неоднородном магнитном поле оказывается всегда неизотермическим, что вызывается охлаждением магнетика при перемещении его в область слабых полей. Поэтому в практически интересных случаях неоднородных магнитных полей известные одномерные решения обычной гидродинамики (течения Пуазейля, Куэтта и другие) перестают быть одномерными и, как следствие этого, оказываются неточными. В п.2 и 3 рассмотрены феррогидродинамические аналоги течений Пуазейля и Куэтта.

2. Рассмотрим движение вязкой ферромагнитной жидкости в плоском слое толщиной $2l$, вызываемое неоднородностью магнитного поля. Сильное однородное поле H_0 направлено поперек слоя; для движения жидкости необходим градиент поля вдоль слоя. Тогда из уравнения (1.3.3) следует появление продольной составляющей магнитного поля, меняющейся поперек слоя. В ненамагничивающейся среде ($M=0$) уравнениям (1.3.2), (1.3.3) удовлетворяют

$$H_z=H_0+Ax,\qquad H_x=Az \tag{2.1}$$

Наличие **M** в уравнении (1.3.2) приводит к тому, что решение (2.1) не удовлетворяет более уравнениям Максвелла (1.3.2), (1.3.3). Ограничимся малыми градиентами поля

$$Al\ll H_0 \tag{2.2}$$

Как будет видно из дальнейшего, даже при этом условии магнитные силы оказываются эквивалентными значительным перепадам давления. Следует иметь также в виду, что при невыполнении условия (2.2) поле спадает до нуля на расстояниях, сравнимых с толщиной слоя, что приводит к нарушению основного предположения о полной замагниченности среды. При выполнении условия (2.2) решение (2.1) для поля и

$$M_z = M_0, \qquad M_x = (M_0 / H_0) Az \tag{2.3}$$

для момента удовлетворяет уравнениям (1.3.2), (1.3.3) в линейном по A приближении. Здесь M_0 — намагниченность насыщения, которая зависит только от температуры, и в не слишком большом интервале ее изменения может быть представлена формулой [1]

$$M_0 = a(\theta - T) \tag{2.4}$$

Здесь a и θ — положительные константы, T — абсолютная температура. Подставляя найденные **M** и **H** в уравнение (1.1), получим

$$v_x = (2\eta)^{-1} A M_0 (l^2 - z^2), \qquad v_z = 0 \tag{2.5}$$

Сравнивая это движение с обычным пуазейлевским течением, заключаем, что роль перепада давления Δp играет здесь $M_0 \Delta H$. Приведем оценку эффекта. Если объемная концентрация ферромагнитных частиц порядка 0.1, то $M_0 \sim 10^2$ *эрг/гаусс см*^{3} и при $\Delta H \sim 10^4$ *э* получаем эффективное $\Delta p \sim 1$ *атм*. Это магнитное давление может уравновешивать гидродинамический перепад давлений (магнитная пробка).

В квадратичном по Al / H_0 приближении продольная скорость не изменится, а из уравнения (1.2) найдется распределение температуры по толщине слоя

$$T = T_0 \left[1 + \frac{A^2 M_0 a}{24 \chi \eta c_н} (5l^4 - 6l^2 z^2 + z^4)\right] \tag{2.6}$$

Неоднородность температуры вызвана магнитокалорическим эффектом, т. е. нагреванием магнетика при его перемещении в область сильных полей. Так как наиболее интенсивное движение жидкости происходит вблизи середины слоя, то здесь же будет и максимальная температура. Это, в свою очередь, приводит к частичному размагничиванию нагретых областей жидкости (2.4), что вызывает дополнительные магнитные силы, направленные поперек слоя. Совместно с неоднородностью H_x это приводит в квадратичном по A приближении к появлению поперечной составляющей скорости (магнитная конвекция), т. е. движение перестает быть одномерным.

3. Рассмотрим феррогидродинамический аналог течения Куэтта. Пусть имеется плоский слой с границами $z = \pm l$, движущимися в направлении оси x со скоростями $\pm V$. Относительно магнитного поля делаются те же предположения, что и в предыдущем случае, т. е. считается выполненным условие (2.2). При этом, однако, формулы (2.1) и (2.3) не будут справедливы даже в линейном по A приближении. Это следует из уравнения (1.2), куда вместо **v** можно подставить скорость невозмущенного куэттовского течения $\mathbf{V}z / l$

$$V \frac{z}{l} \left(\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{aT_0 A}{c_н}\right) = \chi \nabla^2 T \tag{3.1}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$T = T(z) = T_0 \left[1 + \frac{AVa}{6\chi l c_н} z (l^2 - z^2)\right] \tag{3.2}$$

В силу (2.4) и (3.2), намагниченность оказывается теперь функцией z уже в линейном по градиенту поля приближения. Решая (1.3.2), (1.3.3) с найденным $M(z)$, получим

$$H_z = H_0 + Ax + \frac{4\pi a^2 T_0 V A}{6\chi l c_н} z (l^2 - z^2) + O(A^2), \quad H_x = A_z + O(A^2)$$

$$M_z = a(\theta - T_0) - \frac{a^2 T_0 V A}{6\chi l c_н} z (l^2 - z^2) + O(A^2) \tag{3.3}$$

$$M_x = aAH_0^{-1} (\theta - T_0) z + O(A^2)$$

Перейдем теперь к определению поправок к скорости и давлению. Будем искать v в виде

$$v_x = Vz / l + w(z), \qquad v_z = 0 \tag{3.4}$$

где первое слагаемое есть обычное куэттовское течение, а $w(z)$ — добавка, обусловленная магнитными силами. Тогда из (1.1) получим

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta w'' + aA(\theta - T_0), \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{4\pi a^2 T_0 V A}{6\chi l c_н}(l^2 - 3z^2) \tag{3.5}$$

Первое из этих уравнений определяет $w(z)$, а из второго находится распределение давления по сечению слоя. Легко видеть, в отсутствие гидродинамического градиента давления вдоль слоя уравнения (3.5) приводят к «пуазейлевской» добавке к скорости куэттовского движения

$$w(z) = (2\eta)^{-1} A M_0 (l^2 - z^2) \tag{3.6}$$

Взаимодействие течений Куэтта и Пуазейля, обусловленное нелинейностью магнитной силы, может быть обнаружено лишь в более высоких по A приближениях.

4. Выше было показано, что наличие градиента магнитного поля может вызывать движение среды. В связи с этим целесообразно выяснить, в каких случаях возможно равновесие жидкости при наличии ∇H. Применение операции rot к уравнению (1.1) приводит его к виду

$$\frac{\partial}{dt}\operatorname{rot}\mathbf{v} = \operatorname{rot}(\mathbf{v}\times\operatorname{rot}\mathbf{v}) + \nu\nabla^2\operatorname{rot}\mathbf{v} + \frac{1}{\rho}\nabla M\times\nabla H \tag{4.1}$$

Отсюда видно, что необходимым (но не достаточным) условием равновесия жидкости будет $\nabla M \times \nabla H = 0$, или, в силу (2.4),

$$\nabla T \times \nabla H = 0 \tag{4.2}$$

Таким образом, при наличии ∇H равновесие возможно либо если $T = \mathrm{const}$, а градиент поля уравновешивается внешним давлением, либо если $\nabla T \parallel \nabla H$. В последнем случае, однако, возникает вопрос об устойчивости возможного равновесия. В рассмотренном ниже примере задача об устойчивости равновесия неравномерно нагретой жидкости в магнитном поле имеет простое решение.

Пусть жидкость заполняет тонкий цилиндрический слой с радиусами R и $R + \delta$, $\delta \ll R$. По внутреннему цилиндру течет постоянный электрический ток I, создающий в слое магнитное поле

$$H_\varphi = H = 2I / cr \tag{4.3}$$

На границах слоя задана температура

$$T(R) = T_1, \qquad T(R+\delta) = T_1 - \vartheta \qquad (\vartheta \ll T_1) \tag{4.4}$$

Легко видеть, что уравнениям (1.1) — (1.3) удовлетворяет равновесное решение

$$\mathbf{v} = 0, \ T_0 = T_1 - \vartheta x / \delta, \ H_\varphi = H, \ M_\varphi = M_0 = a(\theta - T_1 + \vartheta x / \delta) \tag{4.5}$$
$$(x = r - R)$$

Исследуем устойчивость этого равновесия по отношению к аксиальносимметричным возмущениям, периодическим вдоль оси z. Для этого подставим в уравнения (1.1) — (1.3)

$$\mathbf{v}, \ p = p_0 + p', \ T = T_0 + T', \quad M_\varphi = M_0 + m \tag{4.6}$$

где v, p', T', и m — возмущения соответствующих величин. Линеаризуя уравнения по малым возмущениям и полагая все производные по времени равными нулю (граница устойчивости), найдем

$$0 = -\nabla p' + \eta\nabla^2\mathbf{v} + m\nabla H, \qquad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0$$
$$\mathbf{v}\nabla T_0 + \frac{T_0}{c_н}\left(\frac{\partial M_0}{\partial T}\right)_н (\mathbf{v}\nabla) H = \chi\nabla^2 T' \tag{4.7}$$

Уравнение (1.3.2) для аксиально-симметричных возмущений удовлетворяет тождественно. Решение системы (4.4) ищем в виде

$$v_z = w(r)\cos kz,\quad v_r = v(r)\sin kz,\quad v_\varphi = 0,\quad p' = s(r)\sin kz,\quad T' = \tau(r)\sin kz$$

$$m = -aT' \tag{4.8}$$

Поскольку слой считается тонким ($\delta \ll R$), можно провести ряд упрощений. Во-первых, единственная (радиальная) компонента ∇H может быть записана так:

$$(\nabla H)_r = -2I / cr^2 \approx -HR^{-1}$$

Далее, из уравнения $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ следует

$$v' = kw \tag{4.9}$$

Остальные уравнения системы (4.7) дают

$$s' = \eta(v'' - k^2 v) + a\tau \frac{H}{R},\qquad ks = \eta(w'' - k^2 w),\qquad -\frac{\vartheta}{\delta} v + \frac{aT_1 H}{Rc_н} v = \chi(\tau'' - k^2\tau) \tag{4.10}$$

В последнем уравнении T_0 заменено на T_1 с использованием малости ϑ по сравнению с T_1. Систему (4.9) — (4.10) надлежит решать со следующими граничными условиями при x, равном 0 и δ:

$$v = w = \tau = 0 \tag{4.11}$$

Исключая из уравнений s, v и w, получим

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - k^2\right)^3 \tau + Ck^2\tau = 0,\qquad C = \frac{aH}{\varkappa\eta R}\left(\frac{\vartheta}{\delta} - \frac{aT_1 H}{Rc_н}\right) \tag{4.12}$$

Решение краевой задачи (4.11) —(4.12) (в первом условии для v и w можно заменить условиями для высших производных от τ) определит $C(k^2)$, причем границе устойчивости соответствует минимум этой функции. Следует заметить, что рассматриваемая задача после сделанных приближений оказалась полностью эквивалентной задаче об устойчивости плоского горизонтального слоя жидкости, подогреваемой снизу в поле тяжести, причем роль числа Релея в нашем случае играет $C\delta^4$. Поэтому можно воспользоваться результатами вычислений Пелью и Саутвела [2], что дает $(C\delta^4)_{\min} = 1710$, или для критического градиента температуры

$$A = \frac{\vartheta_{\min}}{\delta} = 1710\frac{\chi\eta R}{aH\delta^4} + \frac{aT_1 H}{Rc_н}\qquad \left(A = 1710\frac{\chi\eta}{\rho g\beta\delta^4}\right) \tag{4.13}$$

Как и следовало ожидать, неустойчивость имеет место только при положительном значении ϑ.

В (4.13) для сравнения приведено выражение для критического градиента температуры в задаче о конвективной устойчивости плоского слоя [2].

Как видно, градиент магнитного поля HR^{-1} играет двоякую роль. С одной стороны, он эквивалентен полю сил тяжести g, т. е. вызывает конвекцию; пиромагнитный коэффициент a эквивалентен при этом коэффициенту объемного расширения β. С другой стороны, магнитное поле оказывается стабилизирующим фактором (второе слагаемое в (4.13)). Последнее объясняется охлаждением жидкости при перемещении ее в область слабых полей. Поэтому величина критического градиента температуры как функция HR^{-1} имеет минимум при

$$\left(\frac{H}{R}\right)_0^2 = 1710\frac{\chi\eta c_н}{a^2 T_1 \delta^4} \tag{4.14}$$

Этому значению градиента поля соответствует

$$A_0 = \frac{2aT_1}{c_н}\left(\frac{H}{R}\right)_0$$

Оценка по формуле (4.14) дает для $(HR^{-1})_0$ значение порядка δ^{-2} (10^3—10^4) *э/см*. Таким образом, стабилизирующее действие магнитного поля проявляется только при больших значениях его градиента. Поэтому во всех практически интересных ситуациях критический градиент температуры убывает с ростом поля.

Поступила 28 III 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Neuringer J. L., Rosensweig R. E. The ferrohydrodynamics. Phys. Fluids, 1964, vol. 7, № 12.
2. Pellew A., Southwell R. V. On maintained convective motion in a fluid heated from below. Proc. Roy. Soc. A, 1940, vol., 175, No 3.