

ЛИТЕРАТУРА

1. Тер-Миносянц С. М. Задача о сверхзвуковом обтекании нижней поверхности треугольного крыла. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 6.
2. Белоцерковский С. М., Скрипач Б. К., Табачников В. Г. Крыло в нестационарном потоке газа. М.: Наука, 1971.
3. Красильщикова Е. А. Дифракция акустической волны на движущейся и неподвижной пластине. — ДАН СССР, 1972, т. 203, № 2.
4. Тугазаков Р. Я. Дифракция ударной волны на движущемся клине. — Учен. зап. ЦАГИ, 1975, т. 6, № 1.
5. Тугазаков Р. Я. Нестационарная пространственная задача о падении ударной волны на движущееся плоское треугольное крыло. — Труды ЦАГИ, 1978, вып. 1917.
6. Тугазаков Р. Я. Численное решение задачи о проникании движущегося со сверхзвуковой скоростью тела в газ другой плотности. — Учен. зап. ЦАГИ, 1980, т. 11, № 4.
7. Голубинский А. И. Набегание ударной волны на клин, движущийся со сверхзвуковой скоростью. — ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.
8. Арутюнян Г. М. О набегании ударной волны на клин, движущийся со сверхзвуковой скоростью. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 4.
9. Polachek H., Seeger R. I. On shock-wave phenomena. — In: Interaction of shock waves in gases: Proc. Symposia in Appl. Math. Vol. 2. N. Y., 1949.

УДК 533.6.011.7 2

РАСПРОСТРАНЕНИЕ УДАРНЫХ ВОЛН ПРИ ДВОЙНОМ ВЗРЫВЕ В ГАЗЕ С ПРОТИВОДАВЛЕНИЕМ

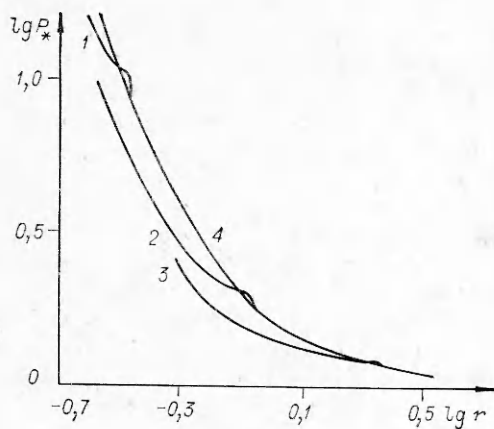
Э. И. Андрианкин, Н. Н. Мягков

(Москва)

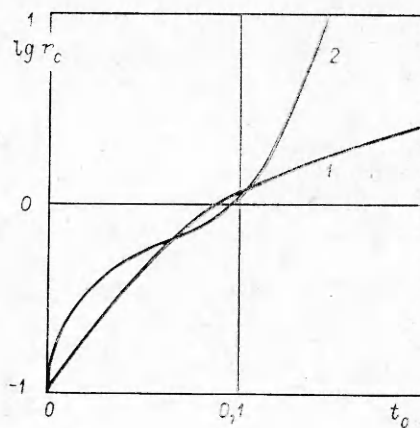
Задачи распространения ударных волн при выделении энергии одним точечным взрывом в газе исследовались достаточно подробно [1—3]. При рассмотрении двух взрывов [4], которые в общем случае могут происходить в разных точках пространства и инициироваться в разное время, появляется ряд новых безразмерных параметров, варьируя которые можно существенно изменять характер нелинейного взаимодействия ударных волн и образующихся одного или нескольких результирующих разрывов. Один предельный случай такой задачи — взрыв заряда над плоской поверхностью (что равносильно одновременному взрыву двух одинаковых зарядов, расположенных друг от друга на расстоянии, равном удвоенной высоте над поверхностью) — изучался теоретически и экспериментально многими авторами [5—7]. Параметр, от которого зависит решение этой задачи, является безразмерной высотой заряда. В данной работе рассматривается другой предельный случай — задача о двойном взрыве, когда точечные взрывы происходят в одной точке пространства, но в разное время. Тогда решение будет зависеть от двух параметров управления: отношения энергий $\lambda^0 = E_2^0/E_1^0$ соответственно при втором и первом взрывах и времени задержки между взрывами t_0 , причем особый интерес представляет случай $E_1^0 + E_2^0 = \text{const}$.

1. Постановка задачи аналогична рассмотренной авторами ранее [8], однако с тем существенным отличием, что теперь учитывается противодействие среды P_0 перед фронтом первой ударной волны. Считаем, что первый точечный взрыв происходит в момент времени $t = -t_0$ в точке $r = 0$, а второй — в момент времени $t = 0$ в той же точке пространства. Плотность невозмущенного газа ρ_0 , вязкость и теплопроводность не учитываются. Течение газа за разрывами адиабатическое, подчиняется уравнению состояния совершенного газа $\varepsilon = P/(\gamma - 1)\rho$ (ε — удельная внутренняя энергия) с показателем адиабаты $\gamma = 1,4$.

В качестве масштабов времени и расстояния взяты $t^0 = r^0/(P_0/\rho_0)^{1/2}$, $r^0 = (E_1^0/P_0\alpha_0)^{1/\nu}$, где α_0 — автомодельная постоянная; рассматривается плоская ($\nu = 1$) или сферическая ($\nu = 3$) симметрия. Введем безразмерные переменные: $t = t't^0$, $r = r'r^0$, $\rho = \rho'\rho_0$, $P = P'P_0$, $v = v'r^0/t^0$. Время задержки $t_0' = t_0/t^0$. Безразмерные величины здесь обозначены штрихом, который в дальнейшем будем опускать, считая, что имеем дело только с безразмерными величинами. При $t_0 \rightarrow 0$ решение задачи о двойном взрыве переходит в решение задачи об одном взрыве с энергией $E_1^0 + E_2^0$.



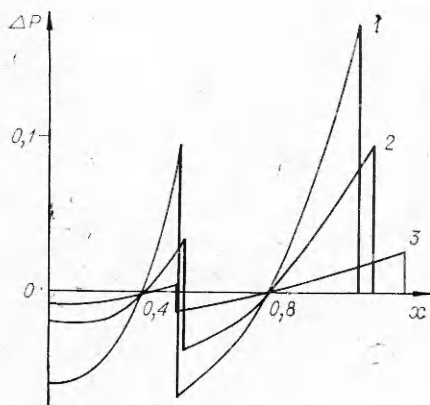
Фиг. 1



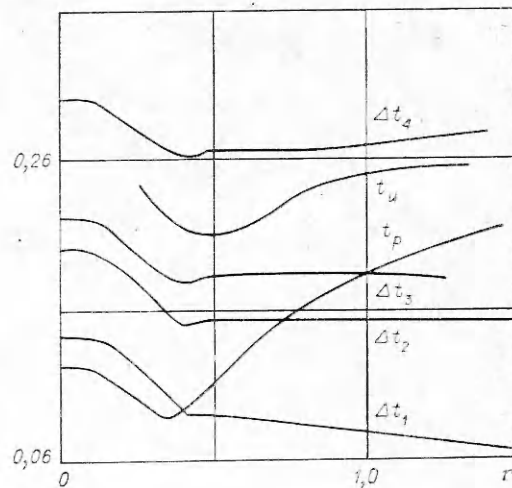
Фиг. 2

Исходная система уравнений газовой динамики решалась численно, методом С. К. Годунова по неявной разностной схеме с последующим пересчетом, основанным на интегральных законах сохранения [9], с выделением особенностей течения. При двойном точечном взрыве образуются две следующие друг за другом ударные волны и высокоэнтропийная зона в центре взрывов. Поэтому при счете выделялись высокоэнтропийная зона в центре, а также первый и второй ударные разрывы до их слияния, а после слияния — фронт результирующей ударной волны. В программе было предусмотрено изменение числа ячеек в двух счетных областях по мере эволюции течения и изменения размеров этих областей. Начальные условия для первого взрыва задавались численным решением автомодельной задачи о сильном взрыве [1], а для второго взрыва — из решения линейаризованной задачи [8], при давлениях на фронтах порядка 150—200. Точность расчетов контролировалась законами сохранения массы и энергии, для сферического случая ошибка не превышала 0,6%, для плоского — 2—3%.

2. Результаты численного решения представлены на фиг. 1—4. При изменении параметров t_0 и λ^0 меняется характер взаимодействия волн. На фиг. 1 для сферической симметрии и $\lambda^0 = 1$ показана зависимость P_* — амплитуды второй ударной волны, а после слияния — амплитуды результирующей ударной волны — от расстояния до центра взрывов. Кривые 1—3 соответствуют задержке $t_0 = 0,02; 0,08; 0,12$; 4 — амплиту-



Фиг. 3



Фиг. 4

да давления при взрыве одного заряда с энергией $2E_1^0$ ($t_0 = 0$). Видно, что после слияния разрывов двойного взрыва (расстояние слияния можно определить из фиг. 2) амплитуда результирующей волны быстро выходит на асимптотику одиночного взрыва энергии $2E_1^0$. Расчеты показывают, что аналогичным свойством обладает и импульс положительной фазы избыточного давления.

Важной характеристикой для распространяющихся одномерных ударных волн является расстояние слияния их разрывов (фронтов) $r_c = r(\lambda^0, t_0)$, однако в ряде случаев C_+ -характеристика или ударный разрыв не могут догнать идущий впереди них ударный фронт. С характеристикой это произойдет, если она окажется в отрицательной фазе ударной волны, так как на больших расстояниях от места взрыва, как известно, точка перехода положительной фазы в отрицательную может служить предельной характеристикой: все C_+ -характеристики, находящиеся в отрицательной фазе, не пересекутся с ней, сколько бы их не продолжали. Зависимость расстояния слияния ударных фронтов при двойном взрыве при $\lambda^0 = 1$ от времени задержки t_0 показана на фиг. 2 для плоской (кривая 1) и сферической (кривая 2) симметрий. В плоском случае вторая ударная волна всегда догонит первую; на фигуре видно, что в этом случае расстояние слияния r_c в рассматриваемом диапазоне времен t_0 возрастает монотонно. Для сферической симметрии зависимость $r_c(t_0)$ имеет перегиб, затем, резко возрастая, расстояние слияния при конечном t_0 стремится к бесконечности: второй ударный разрыв не может догнать первый.

Эволюция ударных волн для случая, когда второй разрыв не догоняет первый, показанная на фиг. 3, является типичной. Фиг. 3 построена для значений параметров двойного взрыва $\lambda^0 = 0,6$, $t_0 = 0,4$, по оси абсцисс отложена бегущая координата $x = r - \sqrt{\gamma}t$, по оси ординат — избыточное давление $\Delta P = P - 1$. Конфигурация 1 соответствует времени $t \simeq 0,667$, начиная с $t \simeq 1,4$ (конфигурация 2), скорость второго разрыва в некоторой лагранжевой частице становится меньше скорости звука в этой частице в момент перехода из положительной фазы в отрицательную, поэтому длительность отрицательной фазы первой волны начинает расти. В некотором интервале времен течение между разрывами напоминает профиль N -волны (конфигурация 3 соответствует $t \simeq 5,76$). Привлекая к рассмотрению теорию второго приближения в нелинейной акустике [10], легко видеть, что дальнейшая эволюция волн на значительных расстояниях приводит к тому, что амплитуда второго разрыва на фиг. 3 становится меньше нуля — отрицательные фазы обеих волн сливаются и образуется одна ударная волна со скачком газодинамических величин в отрицательной фазе.

Представляется вполне очевидным, что при достаточно больших λ^0 ($E_2^0 > E_1^0$) расстояние слияния будет конечным при любых, но конечных t_0 . Поэтому для случая сферических взрывов можно выделить критические значения параметров λ_*^0 и $(t_0)_*$, которые определяют на плоскости λ^0 , t_0 область $t_0 > (t_0)_*$, $\lambda^0 < \lambda_*^0((t_0)_*)$ зависят от λ^0 , дающую такие значения параметров t_0 и λ^0 , при которых второй разрыв не может догнать первый.

Существование критического времени задержки $(t_0)_*$ обусловлено взаимодействием второго разрыва с фазой разрежения первой волны; так, при задержках $t_0 \geq 0,12$ отрицательная фаза избыточного давления, а при задержках $t_0 \geq 0,25$ отрицательная фаза скорости успевают появиться до инициирования второго взрыва, поэтому второй ударный разрыв при таких t_0 распространяется некоторое расстояние по фазе разрежения, что вызывает его дополнительное затухание. Расстояния взаимодействия второго разрыва с фазами разрежения можно определить из пересечения кривых $\Delta t(r)$ с $t_p(r)$ и $t_u(r)$ на фиг. 4, которая построена для $\lambda^0 = 1$ и $v = 3$. На фиг. 4 $\Delta t(r)$ — временной интервал между приходом в данную эйлерову координату r первого и второго разрывов, t_p и t_u — длительности положительных фаз избыточного давления и скорости соответственно первой ударной волны. Индексы 1, 2, 3, 4 при Δt соответствуют вре-

менам задержки $t_0 = \Delta t(0) = 0,14; 0,20; 0,22; 0,30$. В трех случаях из четырех, изображенных на фиг. 4, вторая волна взаимодействует только с отрицательной фазой избыточного давления, поэтому кривая Δt достаточно быстро достигает кривой t_p . В случае $t_0 = 0,30$ вторая волна распространяется по отрицательным фазам избыточного давления и скорости, ослабление второго разрыва в этом случае существенно, кривые $\Delta t_1, t_2$ (и t_p) на фиг. 4 почти параллельны, они пересекутся только на расстояниях $r \geq 10$. Исходя из второго приближения нелинейной акустики, можно показать, что невозможность догона первого разрыва вторым на асимптотике слабых ударных волн связана с неположительностью суммарного импульса (или площади) отрицательной фазы первой волны и положительной фазы второй волны на расстояниях, где это приближение применимо (например, на фиг. 3).

Из фиг. 4 видно, что ударные разрывы на некотором интервале расстояний (обозначим его через Δr), начиная с расстояния r_k (на фиг. 4 $r_k = 0,5$), способны образовывать устойчивую конфигурацию разрывов, т. е. конфигурацию, в которой временной интервал между разрывами Δt остается постоянным (обозначим его через $T = T(t_0, \lambda^0)$), и что для задержки $t_0 = 0,30$ $\Delta r \simeq 0,2$ и $T \simeq 0,268$, для $t_0 \simeq 0,2$ $\Delta r \gtrsim 1,0$ и $T = 0,155$ и т. д. Причем образование устойчивой конфигурации проявляется безотносительно к тому, догонит ли на асимптотике второй разрыв первый или нет. Подчеркнем, что при эволюции устойчивой конфигурации разрывов профиль за разрывами изменяется, а длительность временного интервала между разрывами остается постоянной. Условие постоянства T на Δr является равенство скоростей разрывов в каждой точке Δr , а это в свою очередь требует, чтобы амплитуда и профиль второй ударной волны были вполне однозначно согласованы с амплитудой и профилем первой волны в точке r_k , начиная с которой наблюдается устойчивая конфигурация разрывов. Представляется довольно интересным, что вторая волна за время эволюции от $r = 0$ до $r = r_k$ в довольно широком интервале задержек t_0 «подстраивается» под первую волну таким образом, что это становится возможным.

Значительно увеличивая t_0 , можно добиться независимого распространения волн при двойном взрыве, по крайней мере, на некотором интервале расстояний, поэтому, вообще говоря, при $\lambda^0 \sim 1$ можно получить устойчивую конфигурацию разрывов со сколь угодно большим временным интервалом $T \sim t_0$. В противоположность этому уменьшение t_0 не влечет за собой пропорционального уменьшения T , при данном λ^0 невозможно получить устойчивую конфигурацию со сколь угодно малым безразмерным временем T (размерный временной интервал можно сделать любым, выбирая нужным образом E_1^0, P_0, ρ_0), это обуславливается характером взаимодействия второй волны с фазами сжатия и разрежения за первой ударной волной. При $\lambda^0 = 1$, $\nu = 3$ минимальное значение длительности $T \simeq 0,9$ соответствует задержке $t_0 \simeq 0,14$, избыточное давление на разрывах в точке $r = r_k$ не превышает $\sim 1,7$. К скоростям разрывов волн с такими амплитудами уже применимо приближение нелинейной акустики. В этом приближении условие равенства скоростей разрывов обеих волн записывается в виде $v_+^{(1)} = v_+^{(2)} + v_-^{(2)}$, где $v_+^{(1)}$ — скорость за первым разрывом, $v_+^{(2)}$ — скорость за вторым разрывом, $v_-^{(2)}$ — скорость перед вторым разрывом.

3. Рассмотрим возможность образования устойчивой конфигурации разрывов с произвольными профилями, исходя из приближения нелинейной акустики (теория второго приближения). В этом приближении распространение и взаимодействие волн вдоль выбранного характеристического направления без учета процессов диссипации и дисперсии описывается решением для волн Римана во втором приближении [10]. Поэтому, если рассматривать профиль в $r = r_k$ как начальный, значениям скоростей и амплитуд разрыва на расстояниях $r > r_k$ можно поставить в однозначное соответствие непрерывный ряд точек на профиле за и перед разрывом. Это

видно из римановского решения во втором приближении для обеих ударных разрывов [10]:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} u_-^{(1)} &= 0, u_+^{(1)} = \Phi_1(\xi_p^{(1)} + zu_+^{(1)}), \\ u_-^{(2)} &= \Phi_1(\xi_p^{(2)} + zu_-^{(2)}), u_+^{(2)} = \Phi_2(\xi_p^{(2)} + zu_+^{(2)}). \end{aligned}$$

Для сферической геометрии обозначения имеют вид $u = vr/r_k$, $z = [(\gamma + 1)/2\gamma] r_k \ln(r/r_k)$, $\xi = t - (r - r_k)/\sqrt{\gamma}$, ξ_p — координаты разрывов. Отсчет времени выбран так, что $t = 0$ соответствует приходу первого разрыва в точку $r = r_k(z = 0)$. Полагаем также, что характерная длина волны $l \ll r_k$. Функции Φ_1 и Φ_2 выражают начальные профили первой и второй ударных волн в $z = 0$:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} u &= 0, \xi < 0; u = \Phi_1(\xi), 0 \leq \xi < T; u = \Phi_2(\xi), \\ &T \leq \xi < \infty. \end{aligned}$$

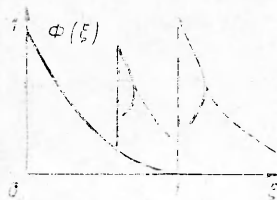
Начальная координата первого разрыва $\xi_p^{(1)} = 0$, второго $\xi_p^{(2)} = T$.

Следовательно, возможность распространения устойчивой конфигурации разрывов на отрезке Δr связана с согласованностью начальных ($r = r_k$) профилей волн (3.2) на участках, примыкающих к разрывам, до точек профилей, соответствующих расстоянию $r_k + \Delta r$.

Пусть $\xi = f_1(u)$ и $\xi = f_2(u)$ — функции, обратные Φ_1 и Φ_2 . Считаем, что профиль $f_1(u)$ задан. Тогда из условия постоянства временного интервала между разрывами $\xi_p^{(2)} - \xi_p^{(1)} = T$ (равенства скоростей разрывов) получаем систему уравнений из (3.1), (3.2), определяющую профиль второй волны $f_2(u)$ такой, чтобы при $z > 0$ образовывалась устойчивая конфигурация разрывов с временным интервалом T :

$$(3.3) \quad \begin{aligned} f_2(u_2) &= f_1(u_1 - u_2) + (2u_2 - u_1)z, f_1(u_1 - u_2) = f_1(u_1) - u_2z + T, \\ z_1(u_1) &= \frac{2}{u_1^2} \int_{f_1(0)}^{u_1} p f_1'(p) dp, T \geq f_1(u_1/2) - f_1(u_1), \Phi_2(T) = \Phi_1(0) - \Phi_1(T). \end{aligned}$$

Для линейного или вогнутого профиля $\Phi_1(\xi)$ первой волны ($\Phi_1'(\xi) \geq 0$ и $\Phi_1'(\xi) < 0$ при $\xi \in (0, T)$), изображенного на фиг. 5, схематично показаны профили второй волны, получающиеся как решение системы (3.3) с разными T . В точке $\xi = T$ начальный профиль второй волны может быть как выпуклым, так и вогнутым в зависимости от конкретной функции $\Phi_1(\xi)$, но первая производная $\Phi_2'(T)$ остается меньше нуля. Решение для профиля $\Phi_2(\xi)$ имеет характерную неоднозначность. Реальному волновому процессу отвечает лишь верхняя часть профиля $\Phi_2(T) \geq \Phi_2(\xi) > u_m$ (u_m определяется как точка максимума функции $f_2(u)$, $f_2'(u_m) = 0$), для устранения неоднозначности необходимо нижнюю часть



Ф и г. 5

профиля $f_2(u_m) < \xi < \infty$ заменить так, чтобы функция $\Phi_2(\xi)$ была однозначно определена в каждой точке $\xi > T$ (на фиг. 5 нижний участок профиля, удовлетворяющий условию однозначности, показан штриховыми линиями). Участок профиля $\Phi_2(T) \geq \Phi_2(\xi) \geq u_m$ при заданных f_1 и T соответствует максимально возможному расстоянию Δz , на котором волны будут распространяться с постоянной длительностью между фронтами T ; $\Delta z = \Delta z(u_m, T)$ находится из решения (3.3). В общем случае решение (3.3) можно провести только численно. Для случая линейного профиля первой волны $\Phi_1(\xi) = 1 - \xi/\alpha$ решение выписывается в виде

$$f_2(u) = \alpha(1 - u) - \alpha\sqrt{T/\alpha u} + 2T, u_m < u < \Phi_2(T) = T/\alpha,$$

$$u_m = \left(\frac{1}{2} \sqrt{T/\alpha} \right)^{2/3}, \quad \Delta z = (2T \sqrt{\alpha})^{2/3} - \alpha, \quad T > \alpha/2.$$

Интересно отметить, что профиль второй волны оказывается нелинейным. Рассмотрение задачи в рамках теории второго приближения дает возможность существования слабых ударных волн Φ_1 и Φ_2 , способных к образованию устойчивой конфигурации разрывов, безотносительно к способу получения таких волн. Согласованность профилей волн для образования устойчивой конфигурации зависит от способа их инициирования и эволюции до точки r_k . Для рассмотренного здесь двойного взрыва длительность T и интервал Δr зависят исключительно от λ^0 и t_0 и могут быть получены только в результате численного решения задачи.

Поступила 9 VIII 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977.
2. Коробейников В. П. Задачи теории точечного взрыва в газах. М.: Наука, 1973.
3. Кестенбойм Х. С., Росляков Г. С., Чудов Л. А. Точечный взрыв. М.: Наука, 1974.
4. Коробейников В. П., Шидловская Л. В. Численное решение задач о взрыве в движущемся газе. — Численные методы механики сплошной среды, 1975, т. 6, № 4.
5. Физика взрыва/Под ред. К. П. Станюковича. М.: Наука, 1975.
6. Броуд Г. Расчеты взрывов на ЭВМ. М.: Мир, 1976.
7. Подлубный В. В., Фонарев А. С. Отражение сферической волны от плоской поверхности. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 6.
8. Андрианкин Э. И., Мягков Н. Н. Двойной взрыв в совершенном газе. — ПМТФ, 1981, № 4.
9. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. И., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
10. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.

УДК 532.516

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ, ОПИСЫВАЮЩИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В ПЛОСКОМ ТЕЧЕНИИ НЕНЬЮТОНОВСКИХ СРЕД

В. И. Найденов

(Москва)

Аналитических исследований проблем конвективного теплообмена в вязкопластичных средах типа суспензий, растворов и расплавов полимеров и т. п. с реологическими характеристиками, зависящими от температуры, известно сравнительно мало [1], ввиду сложности исходных уравнений в основном преобладают численные методы.

В данной работе на основе автомодельных уравнений [2] получены нелинейные интегральные уравнения, описывающие распределение температуры в плоском течении неньютоновских сред.

Рассмотрим течение жидкости между двумя плоскостями, расстояние между которыми $2h$ ($-h \leq y \leq h$). Пусть температура стенок канала линейно меняется с продольной координатой x , $T_w = T_0 + Ax$.

Как показано в [2], в определенных случаях, несмотря на зависимость вязкости от координат течения x, y , существует одномерное движение. Поэтому рассмотрим систему уравнений

$$(1) \quad \partial p / \partial x = \partial \tau / \partial y, \quad \partial p / \partial y = \partial \tau / \partial x, \quad \lambda \Delta T = \rho c_p \partial T / \partial t + \rho c_p u \partial T / \partial x.$$

Используем реологическое уравнение

$$(2) \quad \tau = k_0 \left| \frac{du}{dy} \right|^{n-1} e^{-\gamma(T-T_0)} \frac{du}{dy},$$

где k_0 — консистенция среды; n — индекс течения ($n > 1$ соответствует дилатантной жидкости, $n < 1$ — псевдопластичной); $u(y)$ — скорость