УДК 539.375

СОЕДИНЕНИЕ УПРУГИХ ПЛАСТИН В ПАКЕТ ВДОЛЬ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ОТРЕЗКОВ

В. В. Сильвестров, И. А. Иванов

Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, 428015 Чебоксары

Рассматривается система тонких упругих бесконечных пластин, наложенных друг на друга и соединенных вдоль периодической системы коллинеарных отрезков. Упругие свойства и толщины пластин в общем случае разные. Пластины растягиваются усилиями, приложенными к ним на бесконечности. Методом решения матричной краевой задачи Римана построен алгоритм нахождения комплексных потенциалов, описывающих напряженное состояние пластин, и найдены коэффициенты интенсивности напряжений, построены их графики.

1. Постановка задачи. Пусть n тонких бесконечных упругих однородных изотропных пластин $E_1, E_2, \ldots, E_n$, занимающих всю плоскость комплексной переменной $z = x + iy$, наложены одна на другую и соединены между собой без натяга и промежуточных прослоек вдоль периодической системы отрезков $l_j = [a + jT, b + jT]$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ действительной оси x. Пластина E_k ($k = \overline{1, n}$) имеет толщину h_k, модуль сдвига μ_k и коэффициент Пуассона ν_k. В полосе периодов пластины E_k при $y \to +\infty$ действуют расположенные в плоскости пластины напряжения $(\sigma_x^\infty)'_k$, $(\sigma_y^\infty)'_k$, $(\tau_{xy}^\infty)'_k$, отнесенные к единице толщины пластины, и вращение $(\omega^\infty)'_k$, при $y \to -\infty$ — соответственно $(\sigma_x^\infty)''_k$, $(\sigma_y^\infty)''_k$, $(\tau_{xy}^\infty)''_k$ и $(\omega^\infty)''_k$.

Будем считать: 1) пластины находятся в обобщенном плоском напряженном состоянии и взаимодействуют друг с другом только через линии соединения, причем пространственный эффект концентрации напряжений на линиях соединения пренебрежимо мал и трение между пластинами отсутствует; 2) на концах отрезков l_j напряжения и производные по x от компонент смещения могут обращаться в бесконечность с порядком меньше 1, а в остальных точках они непрерывны.

На линиях соединения пластин должны выполняться условия сопряжения

$$\begin{gathered}
(u+iv)_k^+ = (u+iv)_k^-, \quad k = \overline{1, n}, \qquad (u+iv)_k^+ = (u+iv)_{k+1}^+, \quad k = \overline{1, n-1}, \\
\sum_{k=1}^n h_k(\sigma_y - i\tau_{xy})_k^+ = \sum_{k=1}^n h_k(\sigma_y - i\tau_{xy})_k^-,
\end{gathered} \tag{1.1}$$

где $(u+iv)_k$ — вектор смещения точек пластины E_k; $(\sigma_y, \tau_{xy})_k$ — соответственно нормальное и касательное напряжения в точках пластины E_k, отнесенные к единице ее толщины. Первые $2n-1$ условия в (1.1) представляют собой условие равенства смещений точек пластин $E_1, E_2, \ldots, E_n$ на линии соединения, а последнее условие — условие равновесия точек этой линии.

Необходимо определить периодическое напряженное состояние описанного выше пакета пластин. Данная задача для двух пластин решена в [1]. Пакеты пластин, соединенных

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01-01-00720).

вдоль конечного числа отрезков или концентрических окружностей или конечного числа разомкнутых кривых, изучены в [2–4].

В рассматриваемом случае напряжения, вращение и частные производные по x от компонент смещения в пластине E_k выражаются через две кусочно-голоморфные функции $\Phi_k(z)$ и $\Omega_k(z)$ формулами [5]

$$\begin{gathered}(\sigma_x+\sigma_y)_k=4\operatorname{Re}\Phi_k(z),\quad 2\mu_k\omega_k=(1+æ_k)\operatorname{Im}\Phi_k(z),\quad æ_k=(3-\nu_k)/(1+\nu_k),\\ (\sigma_y-i\tau_{xy})_k=\Phi_k(z)+\Omega_k(\bar z)+(z-\bar z)\overline{\Phi_k'(z)},\\ 2\mu_k(u'+iv')_k=æ_k\Phi_k(z)-\Omega_k(\bar z)-(z-\bar z)\overline{\Phi_k'(z)},\qquad k=\overline{1,n}.\end{gathered}\tag{1.2}$$

Функции $\Phi_k(z)$, $\Omega_k(z)$ периодичны с основным периодом T. В полосе периодов $0\leqslant \operatorname{Re}z\leqslant T$ на бесконечности эти функции, согласно теории периодических аналитических функций, имеют вид [6]

$$\Phi_k(z)=\gamma_k'+O(\mathrm{e}^{-|y|}),\quad \Omega_k(z)=\delta_k'+O(\mathrm{e}^{-|y|})\quad \text{при}\quad y\to+\infty;\tag{1.3}$$

$$\Phi_k(z)=\gamma_k''+O(\mathrm{e}^{-|y|}),\quad \Omega_k(z)=\delta_k''+O(\mathrm{e}^{-|y|})\quad \text{при}\quad y\to-\infty.\tag{1.4}$$

Используя формулы (1.2) и представления (1.3), (1.4), находим

$$\begin{gathered}\gamma_k'=\frac14\,[(\sigma_x^\infty)_k'+(\sigma_y^\infty)_k']+\frac{2i\mu_k}{1+æ_k}\,(\omega^\infty)_k',\\ \delta_k'=\frac14\,[3(\sigma_y^\infty)_k''-(\sigma_x^\infty)_k'']-i\Big[(\tau_{xy}^\infty)_k''+\frac{2\mu_k}{1+æ_k}\,(\omega^\infty)_k''\Big],\\ \gamma_k''=\frac14\,[(\sigma_x^\infty)_k''+(\sigma_y^\infty)_k'']+\frac{2i\mu_k}{1+æ_k}(\omega^\infty)_k'',\\ \delta_k''=\frac14\,[3(\sigma_y^\infty)_k'-(\sigma_x^\infty)_k']-i\Big[(\tau_{xy}^\infty)_k'+\frac{2\mu_k}{1+æ_k}\,(\omega^\infty)_k'\Big].\end{gathered}\tag{1.5}$$

2. Решение задачи. На основе формул (1.2) и условий сопряжения (1.1) для нахождения функций $\Phi_k(z)$, $\Omega_k(z)$ $(k=\overline{1,n})$ получим краевую задачу

$$\begin{gathered}æ_k\Phi_k^+(t)-\Omega_k^-(t)=æ_k\Phi_k^-(t)-\Omega_k^+(t),\qquad k=\overline{1,n},\\ \frac{\mu_{k+1}}{\mu_k}\,[æ_k\Phi_k^+(t)-\Omega_k^-(t)]=æ_{k+1}\Phi_{k+1}^+(t)-\Omega_{k+1}^-(t),\qquad k=\overline{1,n-1},\\ \sum_{k=1}^n h_k(\Phi_k^+(t)+\Omega_k^-(t))=\sum_{k=1}^n h_k(\Phi_k^-(t)+\Omega_k^+(t)),\qquad t\in l_0\end{gathered}\tag{2.1}$$

в классе периодических функций с основным периодом T. Запишем задачу (2.1) в матричной форме

$$A\Phi^+(t)=B\Phi^-(t)\quad \text{или}\quad \Phi^+(t)=A^{-1}B\Phi^-(t),\quad t\in l_0,\tag{2.2}$$

где

$$\begin{gathered}\Phi(z)=\{\Phi_1,\Phi_2,\dots,\Phi_n,\Omega_1,\Omega_2,\dots,\Omega_n\}^{\mathrm{т}},\\ A=\begin{pmatrix}A_1 & E\\ A_2 & A_3\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}B_1 & E\\ B_2 & B_3\end{pmatrix},\\ A_1=\operatorname{diag}\{æ_1,æ_2,\dots,æ_n\},\qquad B_1=A_1,\qquad B_2=-A_3,\end{gathered}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \mu_1^* æ_1 & -æ_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2^* æ_2 & -æ_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mu_{n-1}^* æ_{n-1} & -k_n \\ h_1 & h_2 & h_3 & \dots & h_{n-1} & h_n \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ -h_1 & -h_2 & \dots & -h_n \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} \mu_1^* & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2^* & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mu_{n-1}^* & -1 \\ -h_1 & -h_2 & -h_3 & \dots & -h_{n-1} & -h_n \end{pmatrix},$$

$$\mu_k^* = \mu_{k+1}/\mu_k.$$

Найдем собственные значения матрицы $A^{-1}B$. Для этого рассмотрим характеристическое уравнение $|A^{-1}B - \lambda E| = 0$, которое можно записать иначе: $|B - \lambda A| = 0$. После элементарных преобразований матрицы $B - \lambda A$ уравнение примет вид $C(1-\lambda)^{n+1}(1+\lambda)^{n-1} = 0$, $C = \mathrm{const} \neq 0$.

Можно показать, что алгебраические кратности собственных значений матрицы $A^{-1}B$ равны их геометрическим кратностям. Следовательно, собственные векторы матрицы $A^{-1}B$ линейно независимы и матрица $S^{-1}A^{-1}BS$ (S — матрица, столбцами которой являются собственные векторы матрицы $A^{-1}B$) является диагональной с диагональными элементами $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n+1} = 1$, $\lambda_{n+2} = \lambda_{n+3} = \ldots = \lambda_{2n} = -1$ [7]. Тогда задача (2.2) распадается на $2n$ независимых задач

$$F_j^+(t) = F_j^-(t), \quad t \in L, \quad j = \overline{1, n+1}, \qquad F_j^+(t) = -F_j^-(t), \quad t \in L, \quad j = \overline{n+2, 2n} \tag{2.3}$$

для компонент $F_1, F_2, \ldots, F_{2n}$ новой кусочно-голоморфной вектор-функции $F(z) = S^{-1}\Phi(z)$. Функция $F(z)$ на концах отрезка l_0 может обращаться в бесконечность с порядком меньше 1, а в полосе периодов на бесконечности в силу (1.3), (1.4), (2.2) имеет представления

$$F(z) = S^{-1}G' + O(\mathrm{e}^{-|y|}) \ \text{ при } \ y \to +\infty, \quad F(z) = S^{-1}G'' + O(\mathrm{e}^{-|y|}) \ \text{ при } \ y \to -\infty; \tag{2.4}$$

$$G' = \{\gamma_1', \gamma_2', \ldots, \gamma_n', \delta_1', \delta_2', \ldots, \delta_n'\}^{\mathrm{т}}, \qquad G'' = \{\gamma_1'', \gamma_2'', \ldots, \gamma_n'', \delta_1'', \delta_2'', \ldots, \delta_n''\}^{\mathrm{т}}, \tag{2.5}$$

где γ_k', γ_k'', δ_k', δ_k'' определяются формулами (1.5); $O(\mathrm{e}^{-|y|})$ — вектор-функция, каждая компонента которой при больших y сравнима с $\mathrm{e}^{-|y|}$.

Согласно [8] периодические решения задач (2.3), (2.4) имеют вид

$$F_j(z) = d_j, \qquad j = \overline{1, n+1},$$

$$F_j(z) = \chi(z)\Big(c_{0j} + ic_{1j}\operatorname{ctg}\frac{\pi z}{T}\Big), \qquad j = \overline{n+2, 2n}, \tag{2.6}$$

$$\chi(z) = \Big(\sin\frac{\pi z}{T}\Big)\Big/\sqrt{\sin\frac{\pi(z-a)}{T}\,\sin\frac{\pi(z-b)}{T}};$$

$$(S^{-1}G')_j = (S^{-1}G'')_j = d_j, \qquad j = \overline{1, n+1}; \tag{2.7}$$

$$(S^{-1}G')_j = c_{0j} + c_{1j}, \qquad (S^{-1}G'')_j = c_{0j} - c_{1j}, \qquad j = \overline{n+2, 2n}, \tag{2.8}$$

где $(S^{-1}G')_j$ и $(S^{-1}G'')_j$ — j-е элементы векторов $S^{-1}G'$ и $S^{-1}G''$ соответственно; под функцией $\chi(z)$ понимается ветвь, однозначная в полосе $0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant T$ с разрезом вдоль отрезка $[a, b]$, значения которой стремятся к 1 при $y \to \pm\infty$. Коэффициенты c_{0j} и c_{1j} однозначно определяются из (2.8), а равенства (2.7) накладывают $n+1$ комплексное условие на напряжения и вращения в полосе периодов на бесконечности, а также на характеристики пластин. С учетом (1.5), (2.5) из равенств (2.7) (аналогично случаю двух пластин [1]) получим

$$
\begin{gathered}
(1 + \varkappa_k)[(\sigma_x^\infty)'_k - (\sigma_x^\infty)''_k] = (3 - \varkappa_k)[(\sigma_y^\infty)'_k - (\sigma_y^\infty)''_k], \qquad k = \overline{1, n},\\
(\tau_{xy}^\infty)'_k - (\tau_{xy}^\infty)''_k = -2\mu_k[(\omega^\infty)'_k - (\omega^\infty)''_k], \qquad k = \overline{1, n},\\
\sum_{k=1}^n h_k[(\tau_{xy}^\infty)'_k - (\tau_{xy}^\infty)''_k] = 0, \qquad \sum_{k=1}^n h_k[(\sigma_y^\infty)'_k - (\sigma_y^\infty)''_k] = 0.
\end{gathered}
\tag{2.9}
$$

В дальнейшем будем считать, что эти условия выполнены.

3. Коэффициент интенсивности напряжений (КИН). Так как $\Phi(z) = SF(z)$, согласно (2.6) функции $\Phi_k(z)$, $\Omega_k(z)$ вблизи точки $z = b$ имеют вид

$$
\begin{gathered}
\Phi_k(z) = A_k(z - b)^{-1/2} + O(1), \qquad \Omega_k(z) = -\varkappa_k A_k(z - b)^{-1/2} + O(1),\\
A_k = \sin\frac{\pi b}{T} \sum_{j=n+2}^{2n} s_{kj}\Big(c_{0j} + ic_{1j} \operatorname{ctg}\frac{\pi b}{T}\Big)\Big/\sqrt{\frac{\pi}{T}\sin\frac{\pi(b-a)}{T}},
\end{gathered}
\tag{3.1}
$$

где s_{kj} — элементы матрицы S; под $\sqrt{z - b}$ понимается ветвь, однозначная в плоскости с разрезом по лучу $(-\infty, b]$ действительной оси, значение которой равно 1 при $z - b = 1$.

Из (3.1) следует, что комплексные потенциалы $\Phi_k(z)$, $\Omega_k(z)$ вблизи конца линии соединения имеют тот же вид, что и вблизи конца жесткого тонкого остроугольного включения [9]. Поэтому КИН вблизи точки $z = b$ в пластине E_k определяется формулой

$$
(k_1 - ik_2)_k(b) = -2\varkappa_k \lim_{z\to b} \sqrt{2\pi(z - b)}\,\Phi_k(z) = -2\sqrt{2\pi}\varkappa_k A_k.
$$

Тогда распределение напряжений вблизи концов линий соединения пластин будет таким же, как вблизи вершин жесткого тонкого остроугольного включения в одной пластине.

Пример 1. Пусть две пластины E_1, E_2 одинаковой толщины $h_1 = h_2 = 1$ с упругими характеристиками $\varkappa_1 = 2{,}1$, $\varkappa_2 = 2{,}3$ соединены вдоль отрезков $[-b + \pi j, b + \pi j]$, $j = 0, \pm 1, \ldots$. Приведем зависимости КИНа от отношения μ_2/μ_1 для следующих случаев.

1. При $y \to +\infty$ и $y \to -\infty$ в пластинах E_1 и E_2 действуют напряжения $(\sigma_y^\infty)'_1 = \sigma$, $(\sigma_x^\infty)''_1 = \sigma(\varkappa_1 - 3)/(1 + \varkappa_1)$ и $(\sigma_y^\infty)''_2 = \sigma$, $(\sigma_x^\infty)'_2 = \sigma(\varkappa_2 - 3)/(1 + \varkappa_2)$, а все остальные напряжения и вращения на бесконечности исчезают. При этом условия (2.9) выполняются. На рис. 1,*а* приведены зависимости коэффициента k_{11}/σ от отношения μ_2/μ_1 для точек $z = \pm b$ пластины E_1 при различных значениях b. На рис. 1 кривая *1* соответствует $b = 0{,}1\pi$, *2* — $b = 0{,}2\pi$, *3* — $b = 0{,}3\pi$, *4* — $b = 0{,}4\pi$. При этом коэффициент $k_2 = k_{21}$ для пластины E_1 при любом значении b не зависит от отношения μ_2/μ_1, а КИНы для пластины E_2 получаются умножением соответствующих коэффициентов для пластины E_1 на $-1{,}029$. В таблице приведены значения коэффициента k_{21}/σ, соответствующие различным значениям b.

2. В пластине E_1 при $y \to +\infty$ и $y \to -\infty$ действуют напряжения $(\sigma_y^\infty)'_1 = (\sigma_y^\infty)''_1 = \sigma$, остальные исходные данные нулевые. Тогда для пластины E_1 коэффициент $k_{21} = 0$. На рис. 1,*б* приведены зависимости коэффициента k_{11}/σ от отношения μ_2/μ_1 для точек $z = \pm b$ пластины E_1 при различных значениях b. КИНы для пластины E_2 получаются умножением соответствующих коэффициентов для пластины E_1 на $-1{,}029$.

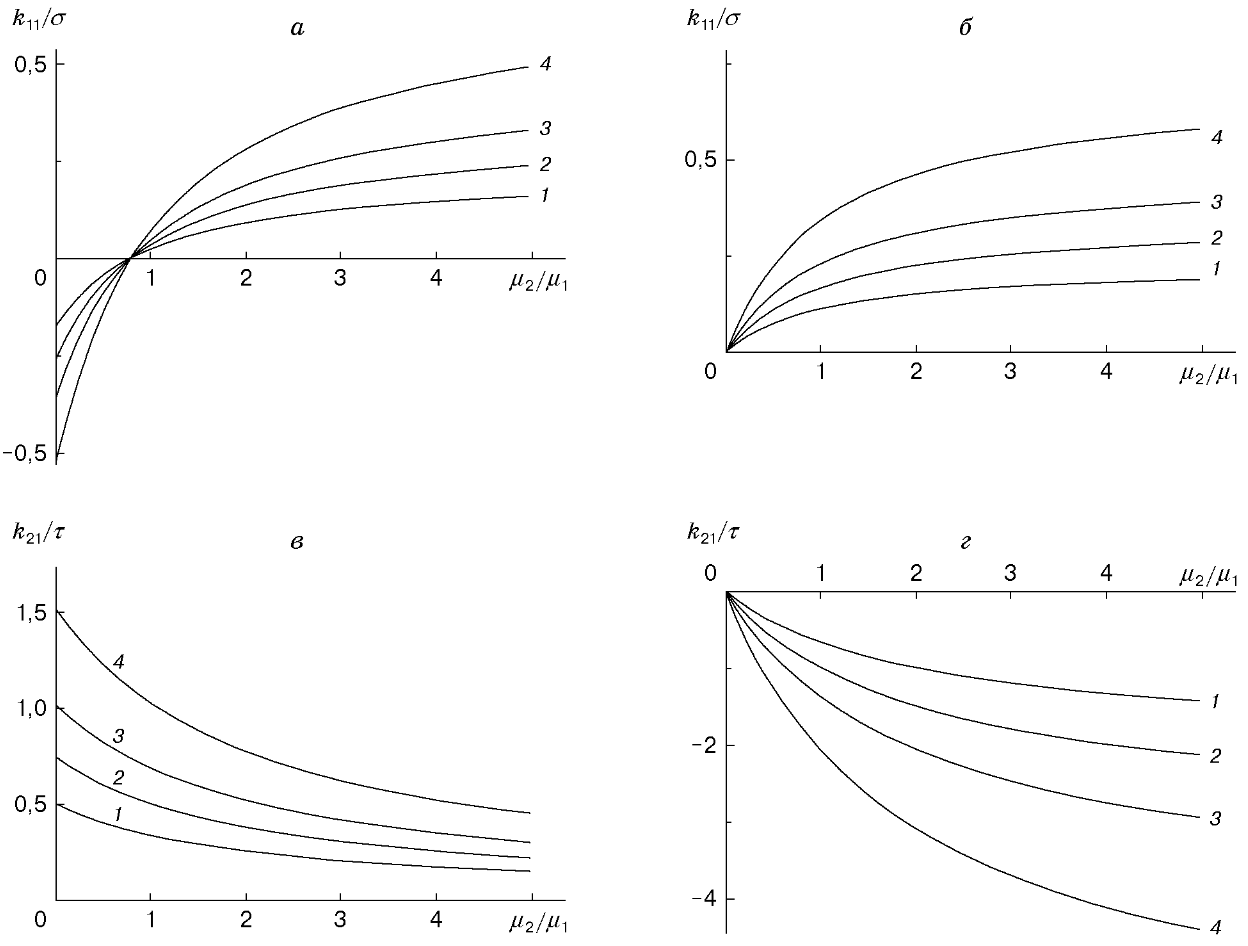

Рис. 1

Пример 2. Пусть три пластины E_1, E_2, E_3 одинаковой единичной толщины с упругими характеристиками $æ_1 = æ_3 = 2{,}1$, $æ_2 = 2{,}3$, $\mu_1 = \mu_3$ соединены в пакет вдоль отрезков $[-b + \pi j, b + \pi j]$, $j = 0, \pm 1, \ldots$. Приведем зависимости КИНа от отношения μ_2/μ_1 для следующих случаев.

1. В пластине E_2 при $y \to +\infty$ и $y \to -\infty$ действуют напряжения $(\tau_{xy}^\infty)_2' = (\tau_{xy}^\infty)_2'' = \tau$, остальные исходные данные нулевые. Тогда для всех пластин коэффициент $k_1 = 0$. На рис. 1,*в* приведены зависимости коэффициентов $k_{21}/\tau = k_{23}/\tau$ от отношения μ_2/μ_1 для точек $z = \pm b$ пластин E_1 и E_3 при различных значениях b. При этом КИНы для пластины E_2 получаются умножением КИНов для пластины E_1 на $-2{,}058$.

2. В пластинах E_1 при $y \to +\infty$ и E_3 при $y \to -\infty$ действуют касательные напряжения $(\tau_{xy}^\infty)_1' = (\tau_{xy}^\infty)_3'' = 2\tau$ и вращения $(\omega^\infty)_1'' = \tau/\mu_1$, $(\omega^\infty)_3' = \tau/\mu_3$, остальные исходные данные нулевые. Тогда для пластины E_1 коэффициент $k_1 = k_{11}$ при любом значении b не зависит от отношения μ_2/μ_1 (значения k_{11}/τ при различных значениях b приведены в таблице). На

b	k_{21}/σ	k_{11}/τ
$0{,}1\pi$	$-2{,}307$	4,614
$0{,}2\pi$	$-1{,}543$	3,086
$0{,}3\pi$	$-1{,}121$	2,242
$0{,}4\pi$	$-0{,}750$	1,499

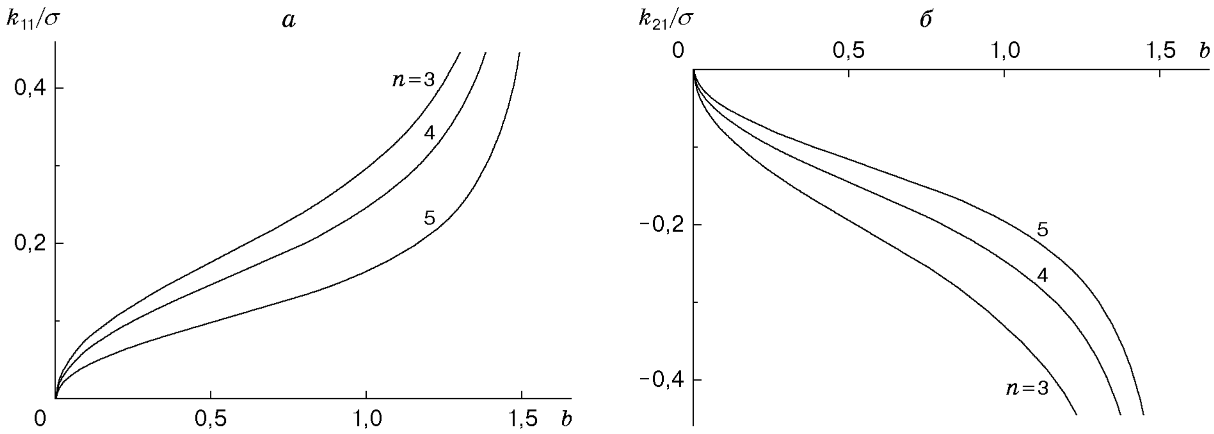

Рис. 2

рис. 1,*г* приведена зависимость коэффициента k_{21}/τ от отношения μ_2/μ_1 при различных значениях b. При этом КИНы для пластин E_1 и E_3 совпадают, а КИНы для пластины E_2 получаются умножением КИНов для пластины E_1 на $-2{,}058$.

Пример 3. Пусть пластины $E_1, E_2, \ldots, E_n$ одинаковой толщины с одинаковыми упругими характеристиками $æ$, μ соединены в пакет вдоль отрезков $[-b+\pi j, b+\pi j]$. В пластинах E_1, E_n при $y \to +\infty$ и $y \to -\infty$ действуют напряжения $(\sigma_y^\infty)'_1 = (\sigma_y^\infty)''_n = \sigma$, $(\sigma_x^\infty)''_1 = (\sigma_x^\infty)'_n = \sigma(æ_1 - 3)/(1 + æ_1)$, остальные исходные данные нулевые. Тогда в случае двух пластин коэффициент $k_1 = 0$, а в случаях трех — пяти пластин зависимости этого коэффициента от b для пластин E_1 и E_2 приведены на рис. 2,*а*,*б* соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сильвестров В. В., Иванов И. А.** Растяжение двух упругих пластин, соединенных друг с другом вдоль периодической системы отрезков // Изв. инж.-технол. Акад. Чуваш. Респ. 1998. № 3/4; 1999. № 1/2. С. 42–46.
2. **Сильвестров В. В., Чекмарев Г. Е.** Пакет тонких упругих пластин, соединенных вдоль коллинеарных отрезков // Исследования по краевым задачам и их приложениям. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 1992. С. 38–42.
3. **Сильвестров В. В., Шумилов А. В.** Пакет тонких упругих пластин, соединенных вдоль концентрических окружностей // Изв. инж.-технол. Акад. Чуваш. Респ. 1997. № 1/2. С. 142–148.
4. **Сильвестров В. В., Шумилов А. В.** К задаче соединения упругих пластин в пакет вдоль кривых // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2000. № 5. С. 166–174.
5. **Мусхелишвили Н. И.** Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
6. **Маркушевич А. И.** Теория аналитических функций. М.: Наука, 1968. Т. 2.
7. **Ланкастер П.** Теория матриц. М.: Наука, 1978.
8. **Чибрикова Л. И.** Основные граничные задачи для аналитических функций. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1977.
9. **Бережницкий Л. Т., Панасюк В. В., Стащук Н. Г.** Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле. Киев: Наук. думка, 1983.

Поступила в редакцию 4/V 2000 г.