РАСПРОСТРАНЕНИЕ СЛАБЫХ УДАРНЫХ ВОЛН В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

А. А. Луговцов (Новосибирск)

В работе решается задача о распространении слабых ударных волн в неоднородной проводящей среде при наличии магнитного поля. Ширина возмущенной области считается малой по сравнению с характерными размерами задачи. Предполагается малость магнитного числа Рейнольдса, что позволяет пренебречь индуцированным магнитным полем. Способ решения, используемый в настоящей работе, аналогичен способу, примененному в работах [1—3].

§ 1. Рассмотрим среду, обладающую изотропной проводимостью. Магнитное число Рейнольдса предполагаем малым ($R_m \ll 1$) и пренебрегаем индуцированным магнитным полем, возникающим при движении проводящей среды во внешнем магнитном поле. Вязкостью и теплопроводностью пренебрегаем. В этих предположениях система уравнений магнитной газодинамики имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \rho v_k = 0, \qquad \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = -F_i$$
$$\frac{\partial p}{\partial t} + v_k \frac{\partial p}{\partial x_k} - a^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} \right) = (\gamma - 1) \frac{j^2}{\sigma} \tag{1.1}$$
$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \mathbf{H} \times \mathbf{j}, \quad \mathbf{j} = \frac{\sigma}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H}, \quad \gamma p = a^2 \rho$$

Здесь v_i, ρ, p, a — скорость, плотность, давление и скорость звука соответственно; t — время; x_i — декартовы координаты; индексы i, k пробегают значения 1, 2, 3; $\mathbf{H}$ — магнитное поле; $\mathbf{j}$ — плотность тока, σ — проводимость среды и c — скорость света.

Пусть $\varphi(t, x_i) = \text{const}$ будут характеристическими поверхностями системы (1.1). Уравнение для определения $\varphi(t, x_i)$ будет иметь вид

$$\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right)^2 - a^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right)^3 = 0 \tag{1.2}$$

Отсюда уравнение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \pm a \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right)^2 \right]^{1/2} = 0 \tag{1.3}$$

определяет два семейства характеристик C_+ и C_-, а уравнение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = 0 \tag{1.4}$$

определяет семейство характеристик C_0.

Следуя [1], вместо неподвижных в пространстве (t, x_i) характеристических поверхностей C_+, C_- и C_0 введем движущиеся в пространстве (x_i) поверхности N_+, N_- и S. Скорость распространения поверхностей N_+ и N_-, согласно (1.3), равна $v_i + a n_i$, где n_i — нормаль к соответствующей поверхности N_+ или N_-

$$n_i = \frac{\partial \varphi / \partial x_i}{\sqrt{(\partial \varphi / \partial x_k)^2}}$$

Поверхности S, соответствующие характеристическим поверхностям C_0, представляют собой жидкие поверхности, двигающиеся вместе с частицами среды.

Приводя систему (1.1) к характеристическому виду, получим

$$(v_k \pm a n_k) \left(\frac{\partial p}{\partial x_k} \right) \pm \rho a (n_i v_k \pm a \delta_{ik}) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = \mp a n_k F_k + (\gamma - 1) \frac{j^2}{\sigma} \tag{1.5}$$

$$\rho s_i v_k \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) + s_i \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right) = -s_i F_i, \qquad v_k \left(\frac{\partial p}{\partial x_k} \right) - a^2 v_k \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_k} \right) = (\gamma - 1) \frac{j^2}{\sigma} \tag{1.6}$$

Здесь оператор

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi / \partial x_k}{\partial \varphi / \partial t} \frac{\partial}{\partial t} \tag{1.7}$$

означает производную вдоль характеристической поверхности; верхний знак в (1.5) соответствует C_+-характеристикам, а нижний — C_-; вектор s_i в (1.6) удовлетворяет условию $s_i \, \partial \varphi / \partial x_i = 0$. Уравнения (1.6) и (1.7) соответствуют характеристикам C_0.

§ 2. Рассмотрим при помощи полученной характеристической системы (1.5) — (1.7) распространение слабых ударных волн в среде с заданными, как функции координат (но не зависящими от времени), давлением p_0, плотностью ρ_0, скоростью U_i, магнитным полем H_i и скоростью звука a_0. Будем считать возмущенные величины

$$\Delta = p - p_0, \quad \delta = \rho - \rho_0, \quad u_i = v_i - U_i$$

малыми по сравнению с p_0, ρ_0 и a_0 соответственно. Ширину возмущенной области λ будем считать малой по сравнению с радиусом кривизны фронта ударной волны R и характерной длиной L, на которой существенно меняются среда и магнитное поле. Кроме того, будем предполагать, что Δ, δ и u_i в направлениях, касательных к фронту, меняются на величину порядка самих себя на расстояниях порядка R, L. Из условия магнитное число Рейнольдса $R_m \ll 1$ имеем

$$R_m = 4\pi\sigma\lambda a_0/c^2 \ll 1$$

так как в рассматриваемой задаче λ и a_0 будут характерными размером и скоростью.

Подставляя Δ, δ и u_i в характеристические уравнения, соответствующие C_0- и C_--характеристикам, и интегрируя их вдоль траекторий элементов поверхностей S и N_- соответственно, получим, подобно [2], что в возмущенной области выполняются следующие соотношения (величинами порядка Δ^2, $\lambda\Delta/R$, $\lambda\Delta/L$, R_m, по сравнению с Δ, пренебрегаем):

$$u_i = un_i, \quad \Delta = a_0^2\delta, \quad \Delta = \rho_0 a_0 u \quad (u = \sqrt{u_k^2}) \tag{2.1}$$

В указанных выше предположениях соотношения (2.1) совпадают с соотношениями на ударном фронте [4], если в последних пренебречь членами порядка Δ^2,R, $\lambda\Delta/R$, λ Δ/L, $R_m\Delta$ и, следовательно, ударный фронт с указанной точностью не влияет на течение позади него. Соотношения (2.1) совпадают с полученными в [2], т. е. взаимодействие проводящей среды с магнитным полем не влияет (при наложенных ограничениях) на соотношения между параметрами среды в возмущенной области.

Подставляя Δ, δ и u_i в уравнение (1.5), соответствующее C_+-характеристикам, и учитывая (2.1), получим

$$\begin{gathered}
2\frac{d\Delta}{dt} - \frac{\Delta}{\rho_0 a_0}\frac{d\rho_0 a_0}{dt} + \Delta\left[a_0\frac{\partial n_k}{\partial x_k} + \gamma\frac{\partial U_k}{\partial x_k} + n_i n_k\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \right. \\
\left. + \frac{\gamma - 1}{2\rho_0 a_0}\frac{\sigma}{c^2}(\mathbf{n}\cdot[\mathbf{H}\times[\mathbf{U}\times\mathbf{H}]]) + \frac{\sigma}{\rho_0 c^2}(\mathbf{n}\cdot[\mathbf{H}\times[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]])\right] = \\
= \rho_0 a_0 (n_i u_k + a_0\delta_{ik})\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\Delta}{\rho_0 a_0}n_i - u_i\right) + \left(\frac{a_0\delta}{\rho_0}n_k - u_k\right)\frac{\partial p_0}{\partial x_k} + \\
+ n_i(\Delta n_k - \rho_0 a_0 u_k)\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{(\gamma - 1)}{c^2\rho_0 a_0}\sigma(\mathbf{n}\cdot[\mathbf{H}\times[\mathbf{u}\times\mathbf{H}]]) + (\gamma - 1)\frac{j^2}{\sigma}
\end{gathered} \tag{2.2}$$

$$\frac{d}{dt} = (v_k + a_0 n_k)\frac{\partial}{\partial x_k} \tag{2.3}$$

Здесь оператор (2.3) означает производную вдоль луча — траектории движения элемента поверхности N_+. Интегрируя это уравнение вдоль луча и пренебрегая малыми порядка Δ^2, $\lambda\Delta/R$, $\lambda\Delta/L$, $R_m\Delta$ по сравнению с Δ, получим

$$\Delta = \frac{\alpha\sqrt{\rho_0 a_0}}{L}$$

$$\begin{gathered}
L = \exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^t\left[a_0\frac{\partial n_k}{\partial x_k} + \gamma\frac{\partial U_k}{\partial x_k} + n_i n_k\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \right.\right. \\
\left.\left. - \frac{3}{2}\frac{(\gamma - 1)\sigma}{a_0\rho_0 c^2}([\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\cdot[\mathbf{U}\times\mathbf{H}]) + \frac{\sigma}{\rho_0 c^2}([\mathbf{n}\times\mathbf{H}])^2\right]dt\right\}
\end{gathered} \tag{2.4}$$

Величина α (на данном луче) зависит от номера поверхности N_+. Уравнения лучей получаются из (1.3) и имеют вид

$$\frac{dx_i}{dt} = U_i + a_0 n_i, \qquad \frac{dn_i}{dt} = (n_i n_k - \delta_{ik})\left(\frac{\partial a_0}{\partial x_k} + n_j\frac{\partial U_j}{\partial x_k}\right) \tag{2.5}$$

Повторяя процедуру, проделанную в [2], получим для определения изменения α на фронте ударной волны вдоль луча уравнение

$$\alpha^2 \int_0^t \frac{dt}{(a_0 + U_k n_k)\sqrt{\rho_0 a_0}\, L} = \frac{4}{\gamma+1}\int_\alpha^{\alpha_0} \alpha f'(\alpha)\, d\alpha \tag{2.6}$$

где $f(\alpha)$ — произвольная функция, определяемая заданным в момент времени $t = 0$ распределением давления в волне, α_0 — значение на фронте ударной волны при $t = 0$.

Давление на фронте ударной волны с линейным профилем за фронтом меняется, согласно (2.4), (2.6), по закону

$$\Delta = \frac{\alpha_0 \sqrt{\rho_0 a_0}}{L}\left(1 + \frac{\gamma+1}{2}\frac{\alpha_0(a_{00} + U_{0k}n_{0k})}{\lambda_0}\int_0^t \frac{dt}{(a_0 + U_k n_k)\sqrt{\rho_0 a_0}\, L}\right)^{-1/2} \tag{2.7}$$

Здесь a_{00}, U_{0k} и n_{0k} — значения a_0, U_k и n_k на фронте в момент времени $t = 0$; λ_0 — ширина области $\Delta > 0$ при $t = 0$.

Вид выражения (2.6) совпадает с полученным в [2], но наличие в показателе экспоненты (2.3) дополнительных магнитных членов существенно изменяет картину затухания ударных волн.

Для одномерной плоской и цилиндрической ударной волны в случае однородной неподвижной среды и однородного магнитного поля, направленного параллельно фронту ударной волны, из (2.6) получаем соответственно

$$\Delta = \alpha_0 \sqrt{\rho_0 a_0}\, e^{-Bt}\left[1 + \frac{\gamma+1}{2}\frac{\alpha_0}{\lambda_0}\frac{1}{\sqrt{\rho_0 a_0}\, B}(1 - e^{-Bt})\right]^{-1/2} \tag{2.8}$$

$$\Delta = \alpha_0 \sqrt{\rho_0 a_0}\frac{e^{-Bt}}{\sqrt{1 + a_0 t / r_0}}\left[1 + \frac{\gamma+1}{2}\frac{\alpha_0}{\lambda_0}\frac{2}{\sqrt{\rho_0 a_0}}\left(\frac{r_0}{a_0 B}\right)^{1/2} e^{Br_0/a_0}\left(\Phi(w) - \Phi\left(\left(\frac{Br_0}{a_0}\right)^{1/2}\right)\right)\right]^{-1/2} \tag{2.9}$$

$$B = \frac{\sigma H^2}{2\rho_0 c^2}, \qquad \Phi(w) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^w e^{-z^2}dz, \qquad w = \left(\frac{Br_0}{a_0}\right)^{1/2}\left(1 + \frac{a_0}{r_0}t\right)^{1/2}$$

Здесь r_0 — положение фронта при $t = 0$. Сферического одномерного случая для однородного магнитного поля не существует, так как вдоль лучей, параллельных магнитному полю (т. е. когда магнитное поле перпендикулярно фронту ударной волны), магнитное поле не оказывает влияния на затухание ударной волны.

Для справедливости изложенных результатов должно выполняться условие

$$R,\ L \gg \lambda = \lambda_0 \frac{a_0 + U_k n_k}{a_{00} + U_{0k}n_{0k}}\left(1 + \frac{\gamma+1}{2}\frac{\alpha_0(a_{00} + U_{0k}n_{0k})}{\lambda_0}\int_0^t \frac{dt}{(a_0 + U_k n_k)\sqrt{\rho_0 a_0}\, L}\right)^{1/2} \tag{2.10}$$

где интеграл берется вдоль пути фронта.

Кроме того, для выполнения условия $R_m \ll 1$ должно выполняться условие

$$\sigma \ll \frac{c^2}{4\pi\lambda a_0}$$

При $H \to 0$ или $\sigma \to 0$ выражения (2.7), (2.8), (2.9) переходят в соответствующие формулы обычной газовой динамики.

В заключение автор благодарит Б. И. Заславского за полезные советы и обсуждения настоящей работы.

Поступила 10X1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Keller I. B. Geometrical Acoustics. I. The Theory of Weak Shock Waves. J. Appl. Phys., 1954, vol., 25, No. 8.
2. Губкин К. Е. Распространение разрывов в звуковых волнах. ПММ, 1958, т. 22, вып. 4.
3. Рыжов О. С. Затухание ударных волн в неоднородных средах. ПМТФ, 1961, № 2.
4. Бай Ши-и. Магнитная газодинамика и динамика плазмы. Изд. «Мир», 1964.