

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ НЕОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК, СОДЕРЖАЩИХ ТРЕЩИНЫ-РАЗРЕЗЫ

В настоящей работе предлагается энергетический подход к решению линейных и нелинейных краевых задач неклассической теории кусочно-неоднородных (слоистых) анизотропных оболочек, содержащих дефекты типа трещин. Рассматриваются слоистые оболочки, симметрично собранные в геометрическом и физическом смысле относительно ее координатной поверхности, содержащие одну или две коллинеарные прямолинейные в плане сквозные трещины-разрезы. Слои обладают упругими свойствами либо изотропного, либо трансверсально-изотропного, либо ортотропного однородного материала. Количество слоев n в пакете может быть как четное, так и нечетное. На поверхностях раздела слоев выполняются условия сопряжения, т. е. обеспечивается отсутствие проскальзывания и отрыва между слоями [1—4]. Поведение рассматриваемых оболочек с трещинами описывается геометрически нелинейной теорией типа Тимошенко.

1. Постановка задачи. Сформулируем вариационную задачу геометрически нелинейной теории типа Тимошенко слоистой ортотропной полостью оболочки с трещиной-разрезом длиной $2L$, расположенной вдоль линии наименьшего сопротивления. Отнесем координатную поверхность оболочки с разрезом к декартовой прямоугольной системе координат X, Y и Z , начало которой находится в центре разреза, а ее оси совпадают с линиями пересечения плоскостей упругой симметрии всех слоев. На поверхность оболочки с разрезом действует нормальная равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q_m .

Вариационная задача ставится следующим образом [5]: определить минимальное значение функционала V , выражающего потенциальную энергию оболочки с разрезом, исходя из условия, что первая вариация $\delta V = 0$, по всем независимым функциональным аргументам, удовлетворяющим условиям на контуре оболочки [1—3, 6, 7]:

$$u_n = u_n^0, v_n = v_n^0, w_n = w_n^0, \varphi_n = \varphi_n^0, \psi_n = \psi_n^0, \\ N_n = N_n^0, S_n = S_n^0, Q_n = Q_n^0, M_n = M_n^0, H_n = H_n^0,$$

где первая часть представляет собой кинематические, а вторая — статические граничные условия для всего пакета; крайним условиям на поверхности разреза $|x| \leq L$ при $y = 0$:

$$N_n = 0, S_n = 0, Q_n = 0, M_n = 0, H_n \neq 0.$$

Общее решение для линейной задачи рассматриваемой оболочки с разрезом представим в виде суммы решений: основного (оболочки без разреза) и возмущенного (оболочки с разрезом). Вариационная задача для возмущенной оболочки формулируется следующим образом: определить минимальное значение функционала V , выражающего потенциальную энергию оболочки с разрезом; независимые функциональные аргументы должны удовлетворять граничным условиям на поверхности трещины-разреза:

$$N_n = N_n^1, S_n = S_n^1, Q_n = Q_n^1, M_n = M_n^1, H_n = H_n^1$$

($N_n^1, S_n^1, Q_n^1, M_n^1$ и H_n^1 — растягивающая, сдвигающая и поперечная силы, изгибающий и крутящий моменты для всего пакета, взятые из реше-

ния основной задачи в том месте, где предполагается возникновение трещины), а также условия на «бесконечности»:

$$\begin{aligned} u_n|_{\rho \rightarrow \infty} &\rightarrow 0, \quad v_n|_{\rho \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \\ w_n|_{\rho \rightarrow \infty} &\rightarrow 0, \quad \varphi_n|_{\rho \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \psi_n|_{\rho \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

(u_n , v_n и w_n — перемещение точек координатной поверхности вдоль осей X , Y и Z соответственно, φ_n и ψ_n — углы поворота нормали в плоскостях XZ и YZ , ρ — расстояние от вершины трещины).

В настоящее время решение как для линейной, так и для нелинейной основной задачи не представляет особых трудностей [1—3, 6, 7]. Поэтому займемся решением возмущенной задачи.

2. Метод решения. Амплитуда локального симметричного возмущенного состояния многослойной ортотропной оболочки с трещиной-разрезом определяется значением коэффициента интенсивности напряжений K_I^0 , характеризующего нормальный отрыв [4, 5].

Для нахождения коэффициента K_I^0 как для линейных, так и для нелинейных задач предлагается энергетический подход:

$$(2.1) \quad V = \frac{1}{2} \int_S (\mathbf{q}\mathbf{r} + \mathbf{p}\mathbf{\gamma}) (1 \pm k_1 h) (1 \pm k_2 h) dS,$$

$$G_I^0 = \partial V / \partial L, (K_I^0)^2 = G_I^0 / \left\{ \left(\frac{a_{11} a_{22}}{2} \right)^{1/2} \left[\left(\frac{a_{22}}{a_{11}} \right)^{1/2} + \frac{2a_{12} + a_{66}}{2a_{11}} \right]^{1/2} \right\}.$$

Здесь V — потенциальная энергия многослойной линейной и нелинейной оболочки с разрезом, которую можно определить по теореме Клапейрона $\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$ — векторы внешней нагрузки: сил и моментов; $\mathbf{r}$, $\mathbf{\gamma}$ — векторы перемещений и углов поворота точек срединной поверхности; h — толщина оболочки; k_1 , k_2 — нормальные кривизны срединной поверхности оболочки; S — поверхность оболочки; G_I^0 — интенсивность освобождающейся энергии при увеличении поверхности трещины на hdL ; $K_I^0 = K_I + K_I^*$ — суммарный коэффициент интенсивности напряжений; K_I — коэффициент интенсивности напряжений при растяжении; K_I^* — то же при изгибе; $a_{11} = \sum_{i=1}^n a_{11}^i$; $a_{11}^i = 1/E_x^i$; $a_{22} = \sum_{i=1}^n a_{22}^i$; $a_{22}^i = 1/E_y^i$; $a_{12} = \sum_{i=1}^n a_{12}^i$; $a_{12}^i = -\nu_{xy}^i/E_x^i$; $a_{66} = \sum_{i=1}^n a_{66}^i$; $a_{66}^i = 1/\mu_{xy}^i$; E_x^i , E_y^i — модули Юнга слоев; μ_{xy}^i — модуль сдвига слоев; ν_{xy}^i — коэффициент Пуассона слоев.

При вычислении интенсивности G_I^0 будем использовать два способа: первый — производная заменяется конечными разностями, при этом необходимо, как минимум, произвести вычисление для двух длин трещины, он представляет собой простейший вариант энергетического подхода для определения K_I^0 и называется методом дифференциальной жесткости (методом податливости); второй — для получения приращения потенциальной энергии оболочки с трещиной

$$(2.2) \quad \Delta V = V(L + \Delta L) - V(L)$$

можно не рассматривать увеличение длины трещины на одну или несколько ячеек сетки, а за счет изменения координаты вершины трещины во внутрь ячейки задавать ее распространение. В результате этой операции изменяется жесткость элементов, прилегающих непосредственно к вершине трещины, с учетом этого путем исключения решаются системы линейных и нелинейных уравнений. Написана подпрограмма, позволяющая реализовать вышеуказанную особенность и тем самым вычислять за одно решение изменение энергии по формуле (2.2). Этот вариант энергетического подхода называется методом виртуального роста трещины.

В связи с тем что для линейных задач применяемая в настоящей работе модель Тимошенко позволяет объединить коэффициенты интен-

сивности напряжений при растяжении и изгибе, вывод зависимости между коэффициентом K_I^0 и интенсивностью G_I^0 из (2.1) заключается в следующем: примем гипотезу, что поверхностный слой последнего слоя оболочки в области вершины трещины локально на растянутой стороне ведет себя аналогично пластине, находящейся в состоянии равномерного растяжения; тогда, учитывая принцип суперпозиции, перемещение точек рассматриваемого поверхностного слоя оболочки представим в виде суммы $v = v_1 + v_2$ (v_1 — смещение точки с координатой $z = -h/2$ при растяжении, v_2 — то же при изгибе). В предположении, что трещина растет при постоянном напряжении σ_y , возникающем в точке $z = -h/2$, скачок смещения v на трещине дает искомый поток энергии интенсивностью

$$(2.3) \quad G_I^0 = \frac{\partial V}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L} \left(\frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-L}^L \sigma_y(x, 0) (v^+ - v^-) dx dz \right),$$

где $v^+ - v^- = 2a_{22}\sigma_y(L^2 - x^2)^{1/2} \operatorname{Re} \left[i \left(\frac{s_1 + s_2}{s_1 s_2} \right) \right]$ — величина скачка; $|x| \leq L$; s_t ($t = 1, 2$) — корни биквадратного уравнения для ортотропного материала.

Подставляя выражение для скачка в (2.3), интегрируя по h и L и дифференцируя по L , а также учитывая, что $K_I^0 = \sigma_y \sqrt{\pi L}$ и $h = 1$, имеем

$$(2.4) \quad G_I^0 = (K_I^0)^2 \frac{a_{22}}{2} \operatorname{Re} \left[i \frac{s_1 + s_2}{s_1 s_2} \right].$$

При значениях s_t , взятых из [8], в (2.4) получаем искомую зависимость, а возможность ее применения для нелинейных задач основывается на теореме, приведенной в [9], из которой следует, что главная часть асимптотики энергетического решения у вершины разреза определяется его линейной частью. Если читателя не удовлетворяет приближенный характер обоснования возможности применения зависимости K_I^0 от G_I^0 для нелинейного случая, то при расчете можно ограничиться вычислением интенсивности G_I^0 .

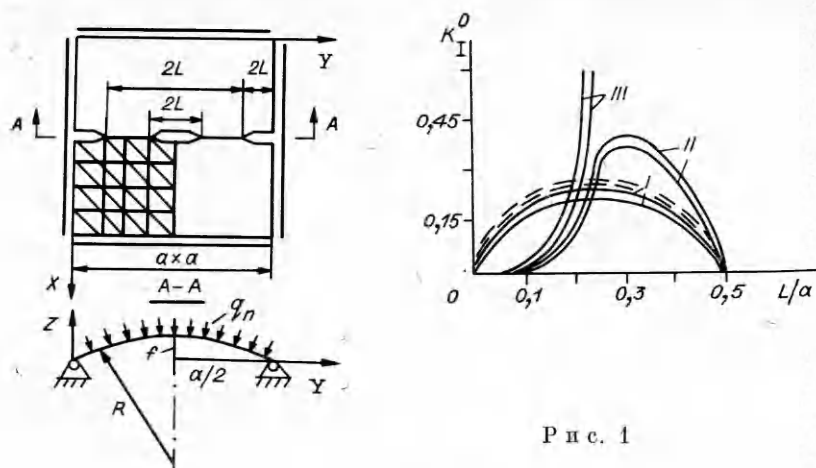
Если в третью формулу из (2.1) подставить упругие постоянные, характеризующие transversально-изотропные слои, то находим выражение

$$(K_I^0)^2 = G_I^0 E, \quad \text{где } E = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^n h_i E_i \text{ — модуль упругости пакета.}$$

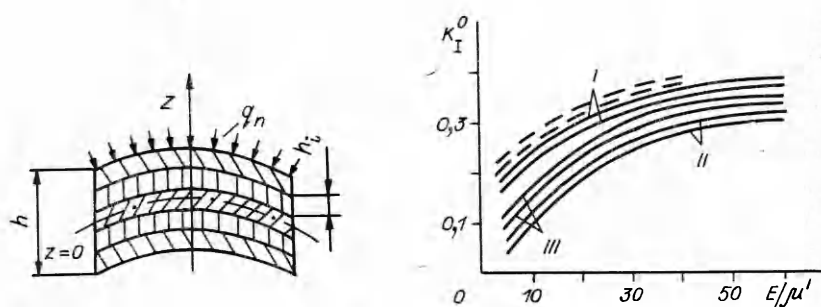
Зависимость (2.3) будем использовать при расчете коэффициента для слоистых transversально-изотропных и изотропных оболочек с трещинами.

Основной трудностью в обоих методах является вычисление составляющих векторов перемещений и углов поворота. Для этого применяется метод конечных элементов (МКЭ) в варианте перемещений. Главным в МКЭ является вывод матрицы жесткости, при помощи которой можно установить зависимость между узловыми силами и соответствующими им перемещениями. На основании [4, 10] получена матрица жесткости треугольного конечного элемента ненулевой гауссовой кривизны из слоистого ортотропного материала для геометрически нелинейной теории типа Тимошенко, она используется также для расчета слоистых transversально-изотропных и изотропных произвольных оболочек с трещинами.

3. Численные примеры и их анализ. Рассмотрим пятислойную изотропную квадратную свободно опертую цилиндрическую панель с тремя случаями расположения трещины: I — в центре, II — сбоку, III — с обеих сторон. Геометрические и физические характеристики панели, изображенной на рис. 1, следующие: $h = 0,01$ м, $R = 0,20$ м, $a = 0,30$ м, $f = 0,0677$ м, $\nu = 0,3$. На рис. 1 представлены графики зависимости K_I^0 от параметра L/a . Для всех ситуаций расположения трещины ось симметрии панели разбивалась на 13 и 25 узлов. Причем при разбивке оси



Р и с. 1



Р и с. 2

панели на 13 узлов коэффициент K_I^0 подсчитывался по методу податливости, при разбивке ее на 25 узлов — по методу виртуального роста трещины (учитывалась особенность методов: для первого — простота и доступность, для второго — точность и экономичность). Относительная погрешность между графиками, полученными при разбивке оси симметрии на 13 и 25 узлов, для всех случаев расположения разреза не превышает 6 %.

Для вышеописанной панели, но уже из трансверсально-изотропных слоев на рис. 2 построены графики зависимости K_I^0 от μ' (μ' — параметр, характеризующий трансверсальность панели по толщине) для всех ситуаций расположения трещины при $h/L = 1$. Способ разбивки оси симметрии панели и методы получения значений K_I^0 аналогичны предыдущим.

Теория	h/L	E_x/E_y					
		2,0	4,0	8,0	16,0	32,0	60,0
Линейная	1	0,296	13 узлов		0,298	0,296	0,296
			0,290	0,292			
	1	0,315	25 узлов		0,318	0,318	0,319
			0,318	0,317			
Нелинейная	1	0,305	13 узлов		0,308	0,307	0,307
			0,306	0,304			
	1	0,326	25 узлов		0,327	0,328	0,328
			0,327	0,325			

му случаю. Из рис. 2 видно, что коэффициент K_I^0 существенно зависит от трансверсальности оболочки по толщине.

Рассмотрим точно такую же, как и вышеописанную, панель, но из ортотропного материала (стеклопластик) с трещиной в центре и определим влияние степени ортотропии E_x/E_y на K_I^0 . Результаты представлены в таблице, из анализа данных которой видно, что степень ортотропии не влияет на K_I^0 . Имеющая место относительная погрешность между расчетами относится к вычислительной погрешности и влиянию густоты сетки.

На рис. 1 и 2 изображены штриховыми линиями графики, полученные на основании геометрически нелинейной теории, из их анализа можно сделать вывод, что геометрическая нелинейность влияет на амплитуду коэффициента K_I^0 , т. е. при применении более точной теории оболочка становится мягче и значения коэффициента интенсивности возрастают.

ЛИТЕРАТУРА

1. Королев В. П. Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс.— М.: Машиностроение, 1965.
2. Пелех Б. Л., Лазыко В. А. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений.— Киев: Наук. думка, 1982.
3. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Теория оболочек переменной жесткости. Методы расчета оболочек.— Киев: Наук. думка, 1981.— Т. 4.
4. Осадчук В. А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами.— Киев: Наук. думка, 1985.
5. Юрков В. И. Метод податливости в задачах о напряженно-деформированном состоянии пластин, содержащих трещины: Автореф. дис. ... канд. техн. наук.— Киев, 1990.
6. Рассказов А. О., Соколовская И. И., Шульга Н. А. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек.— Киев: Вища шк., 1986.
7. Пискунов В. Г., Вериженко В. Е., Присяжнюк В. К. и др. Расчет неоднородных пологих оболочек и пластин методом конечных элементов.— Киев: Вища шк., 1987.
8. Си Г., Либовиц Г. Математическая теория хрупкого разрушения // Разрушение.— М.: Мир, 1975.— Т. 2.
9. Мазья В. Г., Морозов Н. Ф., Пламеневский В. А. О напряженно-деформированном состоянии в окрестности вершины трещины при нелинейном изгибе пластины // ДАН СССР.— 1978.— Т. 243, вып. 4.
10. Утку С. Матрица жесткости для тонких треугольных элементов ненулевой гауссовой кривизны // РТК.— 1967.— Т. 5, № 9.

г. Киев

Поступила 21/І 1991 г.,
в окончательном варианте — 18/ІІІ 1991 г.

УДК 539.3

Л. Г. Доборджинидзе

К РЕШЕНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Рассматривается задача давления конечного числа жестких профилей на границе L нелинейно-упругой полуплоскости из материала гармонического типа [1, 2]. На остальных участках границы, вне штампов, действуют заданные нормальные нагрузки (пригрузки) [3]. Везде на L касательные напряжения, а также усилия и вращение на бесконечности отсутствуют. Некоторые контактные задачи для полуплоскости без пригрузки исследованы в [4].

1. Пусть рассматриваемая физическая область S^- занимает нижнюю часть плоскости S переменной $z = x + iy$. Границу S^- обозначим через L . На отрезках $[a_k b_k]$ прямой L без трения давят жесткие профили, а на участках $[c_k d_k]$ ($c_k < d_k$, $d_k \leq a_k$, $c_{k+1} \geq b_k$), $k = 1, 2, \dots, n$, действуют заданные нормальные напряжения с интенсивностью $N_k(x)$. Будем