О ЛИНЕЙНОЙ ДЛИННОВОЛНОВОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СТАЦИОНАРНОГО ЛАМИНАРНОГО ПЛАМЕНИ В ВИХРЕВОЙ СРЕДЕ

П. П. Лазарев, А. С. Плешанов

(Москва)

В реальных течениях на ламинарный фронт пламени могут действовать вихревые возмущения со стороны свежей смеси. В данной работе рассматривается устойчивость фронта пламени в первоначально завихренном течении. Исследование проводится в линейном (по амплитуде возмущений) приближении и для гидродинамических возмущений, так что их длины волн велики по сравнению с тепловой шириной фронта пламени. Анализ ведется на основной границе устойчивости, где декремент затухания равен нулю (течение стационарно).

Плоское цилиндрическое стационарное течение несжимаемой и невязкой жидкости описывается уравнениями непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \tag{1}$$

и движения, которые здесь удобно использовать в форме Ламба [1]:

$$\frac{\partial B}{\partial r} - v_\varphi R = 0, \tag{2}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial B}{\partial \varphi} + v_r R = 0, \tag{3}$$

где

$$B = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\left(v_r^2 + v_\varphi^2\right); \quad R = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_\varphi) - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi}. \tag{4}$$

Здесь v — скорость; p — давление; ρ — плотность; B — функция Бернулли; R — ротор скорости; r — радиус; φ — полярный угол; индексы у v указывают компоненты. Из (1) следует существование функции тока ψ, так что

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}, \quad v_\varphi = -\frac{\partial\psi}{\partial r}. \tag{5}$$

Из (2), (3), (5) получим

$$B = f(\psi), \quad -R = \Delta\psi = \frac{df}{d\psi}, \tag{6}$$

где f — произвольная функция ψ.

Простейшим случаем неоднородного вихревого течения, описываемого аналитической функцией $f(\psi)$ и инвариантным относительно знака ψ, является ситуация четной функции $f = f_0 \pm 1/2(k\psi)^2$, так что при параметре завихренности $k \to 0$ получается потенциальное течение. Покажем, что такое течение единственно в классе мультипликативного представления $\psi = \omega(r)\gamma(\varphi)$. После подстановки ψ в (2), (3), интегрирования (3) по φ и подстановки результата интегрирования в (2) получим

$$\frac{\omega\omega'}{r^2}\gamma\gamma'' - \frac{\omega}{r}\left(\frac{\omega}{r}\right)'\gamma'^2 - \frac{\omega^2}{2}\left[\frac{(r\omega')'}{r\omega}\right]'\gamma^2 = g'(r) \tag{7}$$

и для B имеем

$$B = \frac{\omega^2}{2}\left[\left(\frac{\gamma'}{r}\right)^2 + \frac{(r\omega')'}{r\omega}\gamma^2\right] + g(r). \tag{8}$$

Здесь g — произвольная функция r; штрихи означают дифференцирование по r и φ соответственно. При $\gamma = \varphi$ из (7) следует

$$(r\omega')'/(r\omega) = \pm k^2, \quad g = g_0 - 1/2(\omega/r)^2, \tag{9}$$

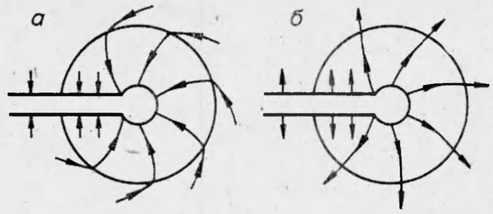

Рис. 1.

а из (8) $(B_0 = g_0)$

$$B = B_0 \pm 1/2(k\psi)^2. \qquad (10)$$

При $\gamma = \sin l\varphi\,(\cos l\varphi)$ из (7) следует $(r\omega')'/(r\omega) - (l/r)^2 = \pm k^2$, $g = g_0 - 1/2(l\omega/r)^2$, а из (8) — то же выражение B. Аналогичные результаты получаются и при $\gamma = \operatorname{sh} l\varphi\,(\operatorname{ch} l\varphi)$. Перечисленные выражения единственны, при которых в (7) разделяются переменные.

Течение с постоянным знаком ψ при изменении r описывается функцией $f = f_0 + 1/2(k\psi)^2$. Считаем, что контуру пламени соответствует значение $r = \mathrm{const} = r_0$, при течении внутрь в начале координат есть сток продуктов сгорания, а при течении наружу там же — источник свежей смеси. Условие постоянства нормальной компоненты скорости на однородном фронте пламени, типичное для нормального распространения пламени (см., например, [2]), осуществляется лишь при $\gamma = \varphi$. Получающийся при этом разрыв v_φ при $\varphi = \pm\pi$ можно реализовать соответствующим отсосом или вдувом на лучах $\varphi = \pm\pi$.

Схема исследуемого невозмущенного течения представлена на рис. 1 (*а* — течение внутрь, *б* — наружу). Наличие стока или источника в начале координат и отсоса или вдува на лучах $\varphi = \pm\pi$ делает данное рассмотрение модельным. Общее решение для ω, как это следует из (9), имеет вид

$$\omega = \omega_1 I_0(kr) + \omega_2 K_0(kr), \qquad (11)$$

где $\omega_{1,2}$ — постоянные интегрирования; I_0 и K_0 — функции Бесселя индекса 0 от мнимого аргумента первого и второго рода соответственно.

Рассматриваем далее для определенности течение внутрь. Решения, переходящие при $k_\alpha \to 0$ в известные [3], ввиду (11) таковы:

$$\psi_1 = \hat{\psi}_{11} I_0(x_1)\varphi, \qquad (12)$$
$$\psi_2 = [\hat{\psi}_{21} I_0(x_2) + \hat{\psi}_{22} K_0(x_2)]\varphi,$$

где $x_\alpha = k_\alpha r$; индекс $\alpha = 1, 2$ относится к средам до и после разрыва соответственно; символ $\wedge$ означает амплитуду. Из условий непрерывности на фронте пламени нормального потока массы $\{\rho v_r\} = 0$, тангенциальной компоненты скорости $\{v_\varphi\} = 0$ и нормального потока импульса

$$\{p + \rho v_r^2\} = 0 \qquad (\{f\} \equiv f_2 - f_1)$$

следует

$$\frac{x_{20}}{x_{10}} = \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}\left\{1 - \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\left[\frac{I_1(x_{10})}{I_0(x_{10})}\right]^2\right\}}. \qquad (13)$$

Таким образом, зная $\rho_2/\rho_1 < 1$ и $x_{10} = k_1 r_0$ (не умаляя общности, можно считать $B_{10} = 0$), определим из (13) $x_{20} = k_2 r_0$ и затем из (4), (10), (12) и условий непрерывности — отношения $\hat{\psi}_{21}/\hat{\psi}_{11}$, $\hat{\psi}_{22}/\hat{\psi}_{11}$ и B_{20}. Из возмущенных уравнений (2), (3) получаем

$$B' = f'(\psi) + \frac{df}{d\psi}\psi', \qquad (14)$$

$$-R' = \Delta\psi' = \frac{\partial B'}{\partial\psi} = \frac{df}{d\psi} + \frac{d^2 f}{d\psi^2}\psi', \qquad (15)$$

где штрихи относятся к возмущениям.

Таким образом, в вихревом неоднородном течении возмущение R' включает не только собственно возмущение R, пропорциональное f', но и неоднородный член, пропорциональный ψ', поэтому при отсутствии f'

(в среде до разрыва) возмущение вихря скорости по-прежнему есть и обусловлено неоднородностью невозмущенного вихревого течения. Первоначальное чисто вихревое течение остается полностью вихревым и в возмущенном состоянии. С математической точки зрения неоднородное уравнение (15)

$$\Delta\psi' - \frac{d^2 f}{d\psi^2}\psi' = \frac{df'}{d\psi}$$

имеет соответствующее однородное уравнение

$$\Delta\psi' - \frac{d^2 f}{d\psi^2}\psi' = 0,$$

а не $\Delta\psi' = 0$, которое дает акустические возмущения.

Выражение для f', очевидно, аналогично f и имеет вид $f' = f_0' + 1/2 \times (k'\psi)^2$. Тогда из (15) получим

$$\Delta\psi' - k^2\psi' = k'^2\psi. \qquad (16)$$

Решения (16) с учетом (12) имеют вид

$$\psi_1' = \widehat{\varphi}_{12}' K_0(x_1)\,\varphi, \qquad (17)$$

$$\psi_2' = \widehat{\psi}_{21}' I_0(x_2)\,\varphi + 1/2\,(k_2'/k_2)^2 x_2 \left[\widehat{\varphi}_{21} I_1(x_2) - \widehat{\psi}_{22} K_1(x_2)\right]\varphi,$$

где решениями однородного уравнения (16) ($k' = 0$) взяты возмущения, затухающие по мере удаления от разрыва. На фронте пламени выполняются граничные условия

$$\delta j \equiv \rho_1\left(v_{1r}' + \frac{\partial v_{1r}}{\partial r}\zeta'\right) = \rho_2\left(v_{2r}' + \frac{\partial v_{2r}}{\partial r}\zeta'\right) = j\varkappa\zeta', \qquad (18)$$

$$\delta v_\varphi \equiv v_{1\varphi}' + \frac{\partial v_{1\varphi}}{\partial r}\zeta' + \frac{v_{1r}}{r_0}\frac{\partial \zeta'}{\partial\varphi} = v_{2\varphi}' + \frac{\partial v_{2\varphi}}{\partial r}\zeta' + \frac{v_{2r}}{r_0}\frac{\partial\zeta'}{\partial\varphi}, \qquad (19)$$

$$p_1' + \frac{\partial p_1}{\partial r}\zeta' + 2jv_{1r}\varkappa\zeta' = p_2' + \frac{\partial p_2}{\partial r}\zeta' + 2jv_{2r}\varkappa\zeta', \qquad (20)$$

где $j = \rho_1 v_{1r} = \rho_2 v_{2r}$ — поток массы; $\varkappa$ — коэффициент, пропорциональный энергии активации реакции горения [4]; ζ' — возмущение координаты r фронта пламени, которое в данном случае чисто радиальное ($\zeta = \widehat{\zeta}'$). Более удобным граничным условием, чем (20), является эквивалентное условие

$$\rho_2\delta B_2 - \rho_1\delta B_1 = -(1 - \rho_2/\rho_1)(v_{2r}\delta j + \rho_1 v_{1\varphi}\delta v_\varphi), \qquad (21)$$

где с учетом (14)

$$\delta B \equiv B' + \frac{\partial B}{\partial r}\zeta' = f' + \frac{df}{d\psi}\left(\psi' + \frac{\partial\psi}{\partial r}\zeta'\right) \equiv f' + \frac{df}{d\psi}\delta\psi.$$

Подставляя (17) в (18)—(21) и исключая амплитуды $(k_2'/k_2)^2$, получим характеристическое уравнение относительно $\lambda = \varkappa r_0$ в виде

$$\lambda = -1 + f_1\cdot(a + bh)/(c + dh), \qquad (22)$$

где при $\mu = \rho_2/\rho_1$

$$a = 1 + \frac{(1-\mu) f_1 + f_2}{g_1}, \quad b = 1 + \frac{x_{10}^2/f_1 - 1}{g_1},$$

$$c = 1 + \frac{f_2}{\mu g_1}, \quad d = 1 + \frac{f_1}{g_1},$$

$$f_1 = \left.\frac{xI_1}{I_0}\right|_{x_{10}}, \quad f_2 = \left.\frac{xI_1}{I_0}\right|_{x_{20}},$$

$$g_1 = \left.\frac{xK_1}{K_0}\right|_{x_{10}}, \quad g_2 = \left.\frac{xK_1}{K_0}\right|_{x_{20}},$$

$$h = (1-\mu) f_1\left(1 - \mu\frac{f_1 f_2}{x_{20}^2}\right).$$

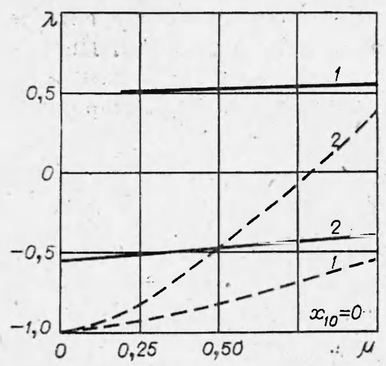

Рис. 2.

Для течения наружу в приведенных формулах следует заменить f_2 па $-g_2$, g_1 — на $-f_1$. Кроме того, ввиду $\varkappa \sim v_{1r}$ [4] меняется знак $\varkappa$. В дальнейшем используется $\varkappa \sim |v_{1r}|$.

На рис. 2 даны зависимости λ от μ при $x_{10}=1$; 2 для течения внутрь (λ_1 — сплошные кривые) и наружу (λ_2 — штриховые). Области устойчивости находятся над этими кривыми. Потенциальному течению ($x_{10}=0$) соответствуют значения $\lambda_1=1$ и $\lambda_2=-1$ [3]. Можно аналитически показать, что

$$\lambda_1(\mu=1)+\lambda_2(\mu=1)=0,$$

$$\lambda_1(\mu=0)<\lambda_1(\mu=1),\ \lambda_2(\mu=0)=-1.$$

Наличие первоначальной завихренности для течения внутрь повышает устойчивость, а для течения наружу — понижает. При малой завихренности течение внутрь менее устойчиво, чем течение наружу, а при большой — наоборот. При уменьшении отношения плотностей продуктов сгорания и свежей смеси устойчивость для обоих течений возрастает.

Описанное поведение кривых $\lambda(\mu)$ в функции параметра x_{10} является естественным продолжением эволюции этих кривых в потенциальном случае [3]. Так, например, полученное в [3] решение для цилиндрического пламени в частном случае учета только осевых возмущений (в [3] этот случай соответствует значению номера азимутального возмущения $m=0$ и физически означает наличие возмущений типа «перетяжек») в коротковолновом приближении ($kr_0 \to \infty$, $k=2\pi/\Lambda$, Λ — длина волны возмущения) дает результат Ландау [3] $\varkappa/k \to 1/2(1-\mu)$ для течений как внутрь, так и наружу. В длинноволновом приближении ($kr_0 \to 0$) для течения внутрь имеет место $\varkappa r_0 \to 1$ и наружу $\varkappa r_0 \to -1$. Последующий учет первоначальной зависимости приводит к картине, описанной в данной работе.

Поступила в редакцию 13/I 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. **Г. Ламб.** Гидродинамика. М.— Л.: Гостехиздат, 1947.
2. **Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.** Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1953.
3. **П. П. Лазарев, А. С. Плешанов.** ФГВ, 1983, 19, 1.
4. **П. П. Лазарев, А. С. Плешанов.** ФГВ, 1980, 16, 6.

ВЛИЯНИЕ ДАВЛЕНИЯ НА ГОРЕНИЕ МАГНИЯ

М. Е. Деревяга

(Винница)

Использование порошкообразных металлов в качестве горючего в энергетических установках обусловило проведение широких исследований по влиянию различных параметров па процесс их горения.

Изучалось также влияние давления на горение малых частиц [1—3] и лент [4] магния. Анализ конденсированных остатков после сгорания магниевых частиц в модельном двигателе [1] показал, что массовая доля остатков крупной фракции (порядка исходных размеров частиц) с увеличением давления возрастает. Время парофазного горения (время видимого свечения) капель магния, измеренное в [2], убывало с увеличением дав-