ПМТФ, № 6, 1973

УДК 538.4

К ТЕОРИИ ГИДРОМАГНИТНОГО ДИНАМО

Ю. Б. Пономаренко

(Москва)

Показано, что в однородной среде магнитное поле может генерироваться винтовым движением цилиндра с постоянными угловой и осевой скоростями. Задача генерации решена точно, для магнитного поля найдены аналитические выражения.

При больших скоростях инкремент роста поля максимален, когда отношение скоростей порядка единицы. Максимальный инкремент и частота порядка скорости в степени 2/3. Распределение поля имеет вид поверхностной волны. Декремент спада поля при удалении от поверхности цилиндра пропорционален корню из инкремента.

Для теории гидромагнитного динамо представляют интерес конкретные примеры самовозбуждения поля. Простые типы полей (двумерные или осесимметричные) не могут генерироваться, и нахождение таких примеров затруднительно. В [1] найден пример точного решения проблемы динамо. Ниже дан пример точного решения, в котором в отличие от [1] магнитное поле зависит от времени.

Движение в рассматриваемом примере осесимметрично. Такое движение не может генерировать осесимметричное поле [2], но, как показано в [3, 4], может возбуждать несимметричное поле.

Уравнения генерации для среды с магнитной вязкостью, равной единице

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0,\quad \partial\mathbf{H} / \partial t = \operatorname{rot}\,[\mathbf{V} \times \mathbf{H}] + \Delta\mathbf{H} \tag{1}$$

где скорость $\mathbf{V}$ задана.

Пусть в цилиндрических координатах r, φ, z составляющие скорости $V_r = 0$, $V_\varphi = r\omega(r)$, $V_z = v(r)$. Тогда из (1) для магнитного поля, пропорционального $\exp(im\varphi + ikz + pt)$, получим

$$DH_r + H_r / r + imH_\varphi / r + ikH_z = 0 \tag{2}$$

$$LH_r - 2imH_\varphi / r^2 = 0 \tag{3}$$

$$LH_\varphi + 2imH_r / r^2 + rH_r D\omega = 0 \tag{4}$$

$$L_0 H_z + H_r Dv = 0 \tag{5}$$

$$(D = d / dr,\ L + 1 / r^2 = L_0 = (1 / r)DrD - m^2 / r^2 - q^2$$

$$q^2 = s^2 + i\mu,\ s^2 = p + k^2,\ \mu = m\omega + kv)$$

Решения уравнений (2) — (5) должны быть ограниченными, непрерывными и исчезать при $r \to \infty$. Поле генерируется, если существует собственное значение p с положительным инкрементом $\gamma = \operatorname{Re} p$. Генерация невозможна, если один из параметров m, k, v равен нулю [2, 5].

Далее рассматривается случай, когда ω, v постоянны при $r < 1$ и равны нулю при $r > 1$. Из (3), (4) видно, что величины $H_\pm = H_r \pm iH_\varphi$ удовлетворяют уравнениям $(L \mp 2m / r^2) H_\pm = 0$. Ограниченные однозначные решения этих уравнений

$$H_\pm = \begin{cases} A_\pm I_\pm(qr) / I_\pm(q), & r < 1 \\ B_\pm K_\pm(sr) / K_\pm(s), & r > 1 \end{cases} \qquad (|\arg q, s| \leqslant {}^1/_2\,\pi) \tag{6}$$

Здесь и ниже I, K, $I_\pm$, $K_\pm$— модиффицированные функции Бесселя с индексами m, $m \pm 1$.

Постоянные $A_\pm$, $B_\pm$ определяются из условия

$$H_\pm, \; DH_\pm \pm {}^1/_2 i\omega (H_+ + H_-) \tag{7}$$

непрерывны при $r = 1$.

Из (7), (2), (3) следует непрерывность поля и величин $DH_\varphi + \omega H_r$, $DH_z + vH_r$. Последние величины должны быть непрерывны; это следует из непрерывности тангенционального электрического поля и непосредственно из (4), (5) после интегрирования по r от $1 - 0$ до $1 + 0$.

Из (6), (7) получим дисперсионное соотношение

$$^1/_2 i\omega (R_+ - R_-) = R_+ R_- \qquad (R_\pm = qI_\pm' / I_\pm - sK_\pm' / K_\pm) \tag{8}$$

Число p является собственным, если оно удовлетворяет соотношению (8) и условию $|\arg s| \leqslant {}^1/_2\pi$, необходимому для ограниченности поля (6).

При больших q, s можно использовать в (8) асимптотические равенства [6]

$$\sqrt{2z/\pi}\, K(z) = e^{-z}(1 + a_1/z + a_2/z^2 + \ldots) \equiv f(z), \tag{9}$$

$$\sqrt{2z\pi}\, I(z) = f(-z)$$

$$(n!2^n a_n = \Gamma(m + n + {}^1/_2) / \Gamma(m - n + {}^1/_2), \qquad |\arg z| < {}^1/_2\pi)$$

из которых следует:

$$R_\pm = q + s + ({}^1/_2 m^2 \pm m + {}^3/_8)(q^{-1} + s^{-1} + q^{-2} - s^{-2}) + + O(q^{-3} + s^{-3}) \tag{10}$$

С точностью до наибольших членов из (8), (10) имеем

$$im\omega(1/q + 1/s) = (q + s)^2 \qquad (|\arg q, \; s| < {}^1/_2\pi) \tag{11}$$

Соотношения (8), (11) достаточно рассмотреть при $\alpha = ({}^1/_2 m\omega)^{1/3} \geqslant 0$, так как они становятся комплексно-сопряженными при замене ω, μ, p на $-\omega$, $-\mu$, $\bar{p}$.

При $\mu = 0$ (когда точки поверхности $r = c \leqslant 1$ движутся вдоль спиралей с неизменным значением составляющих поля) из (11) получим

$$s = q = \alpha \exp({}^1/_6 i\pi) \qquad (\alpha \to +\infty) \tag{12}$$

Поле генерируется, если $\alpha^2 > 2k^2$.

При малых $\delta = \mu / (2\alpha^2)$ величина $\rho = (p + k^2)\alpha^{-2} + i\delta$ определяется из (8), (10), (12) методом возмущений

$$\rho = \rho_0 - [{}^2/_3 \rho_0 \delta / \alpha + {}^5/_{12} \delta^2 / \rho_0 + O(\alpha^{-2})][1 + O(\delta^2) + O(\alpha^{-2})],$$

$$\rho_0 = \exp({}^1/_3 i\pi)$$

Отсюда следует, что инкремент γ максимален при $\mu = -{}^8/_5 \alpha + O(\alpha^{-1})$.

При больших δ (когда $^1/\alpha \ll |\delta| \ll \alpha / m^2$) величина ρ определяется из (11) или эквивалентного равенства $4 + 4\rho(\rho^2 + \delta^2) = \delta^2(\rho^2 + \delta^2)^2$. Согласно (11) с ростом δ^2 инкремент $\gamma(\delta) = \alpha^2 \mathrm{Re}\rho(\delta) - k^2$ уменьшается. Это видно из монотонности функций

$$\delta^2 = 4a \frac{\sin({}^1/_4\pi - \varphi)}{\sin 4\varphi}, \quad \mathrm{Re}\, p = \frac{\mathrm{tg}\, 2\varphi}{a} \cos({}^1/_4\pi - \varphi) \tag{13}$$

$$a^3 = \frac{\sin({}^1/_4\pi + \varphi)}{\sin 4\varphi} \qquad \left(0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{12}\right)$$

Для вывода (13) представим (11) после умножения на $(q - s) / (q + s)$ в виде

$$T_- - T_+ = \delta \qquad (T_\pm^{-2} = \rho \pm i\delta)$$

Отсюда следует:

$$T_- + T_+ = 2i\,(T_-T_+)^2, \quad 2\rho = T_+^{-2} + T_-^{-2}.$$

Полагая здесь $T_\pm = T \mp {}^1/_2\delta$, получим

$$\sqrt{T / i} = T^2 - {}^1/_4\delta^2, \quad \rho = i\,(T + {}^1/_4\delta^2 / T)$$

Подставив сюда $\sqrt{T} = \alpha \exp(-i\varphi)$ $(a > 0)$ и отделив действительные и мнимые части, можно получить (13).

Выше рассмотрено только собственное значение, характеризующее генерируемое поле. Особенность задачи (2) — (5), (7) заключается в том, что число ее собственных значений конечно и непостоянно. При уменьшении скоростей ω, v собственные значения исчезают, так как корни p уравнения (8) уходят с ветви $|\arg s| \leqslant {}^1/_2\pi$ на соседние через разрез $p \leqslant -k^2$. При малых скоростях собственных значений нет.

Для нахождения исчезающих собственных значений и соответствующих частот в случае $q = s$ удобно, используя равенства [6]

$$(14) \qquad I'K - IK' = 1 / z, \quad I' \pm mI / z = I_\mp, \quad K' \pm mK / z = -K_\mp$$

преобразовать (8) к виду

$$(15) \qquad 1/R = IK, \qquad 1 / \omega = {}^1/_2 i\,(1 / R_- - 1 / R_+) = \\ = -im\,(IK)' / s = -{}^1/_2\pi m\,(J^2 + iJY)' / x$$

где J, Y — бесселевы функции первого и второго рода аргумента $x = is$.

Собственное значение исчезает, если соответствующий корень x переходит из верхней полуплоскости в нижнюю через положительную ось. Для положительных x из (15) следует:

$$(16) \qquad X \equiv (JY)' \equiv 2J'Y + 2 / (\pi x) = 0, \qquad m\omega = x^2 Y / J$$

Положительные нули x_n функции X удовлетворяют неравенствам

$$(17) \quad 0 < x_1 < j_1' < y_1 < x_2 < y_1' < j_1 < x_3 < j_2' < y_2 < x_4 < y_2' < \ldots$$

так как знаки X различны на границах каждого интервала для x_n. Последнее проверяется с помощью разложения X при $x \to 0$ и неравенств (17) для нулей j, j', y, y' функций J, J', Y, Y'.

Из (16), (17) и асимптотик [6]

$$\sqrt{{}^1/_2\pi x}\,(J + iY) = \exp i\,(x - {}^1/_2\pi m - {}^1/_4\pi), \qquad j_n = \pi\,(n + {}^1/_2 m - {}^1/_4)$$

вытекает

$$x_n = {}^1/_2\pi\,(n + m - 1), \qquad m\omega_n = (-1)^n x_n^2 \qquad (n \gg m)$$

При $m = 1$ первые корни ≈ 0.6, 2.9, 4.6 и частоты ≈ -1.5, 6.6, -22.5. При $m = 2$, 3, 4 первые корни ≈ 1.8, 2.8, 3.8 и частоты ≈ -7.7, -18, -32.

Для частот, близких к ω_n, можно найти из (15) поправку к x_n и убедиться, что собственные значения исчезают при уменьшении $|\omega|$.

Из (16), (17) следует $\omega_n (-1)^n > 0$. Согласно замечанию к (11) для исчезающих собственных значений p в верхней полуплоскости $\omega_n (-1)^n < 0$. Поэтому при увеличении ω от нуля первое собственное значение появится в верхней полуплоскости, второе — в нижней и т. д. Можно предположить, что (12) соответствует первому собственному значению.

В задаче (1) с начальным условием для преобразованного по Лапласу поля **H** получаются уравнения (3) — (5), к которым слева прибавлены соответствующие составляющие начального поля h. Вместо (6) имеем

$$H_\pm = A_\pm I_\pm(qr) / I_\pm(q) + K(qr)\int_0^r h_\pm(\xi) I_\pm(q\xi)\xi\,d\xi + \tag{18}$$

$$+ I_\pm(qr)\int_r^1 h_\pm(\xi) K_\pm(q\xi)\xi\,d\xi \quad (h_\pm = h_r \pm ih_\varphi, \quad 0 < r < 1)$$

Выражение для поля при $r > 1$ получается из (18) заменой $A \to B$, $q \to s$, $0 \to 1$, $1 \to \infty$, и в первом слагаемом $I \to K$.

После определения $A_\pm$, $B_\pm$ из (7) каждая составляющая (18) представляется в виде $H = H_*(p, r) / W(p)$, где $W = 0$ при выполнении (8). Отсюда и из интеграла обращения получим

$$H(t, r) = \sum e^{pt} H_* / W' + \int e^{pt} H_* / (2\pi i W)\,dp$$

где сумма берется по собственным числам, а интеграл — по контуру, обходящему разрезы $|\arg s, q| = {}^1/_2\pi$. При больших t наибольшим будет член суммы, описывающий генерируемое поле. Если в полуплоскости $\mathrm{Re}\,p \geqslant -k^2$ собственных чисел нет, то наибольшим будет интегральный член, равный $O[t^{-m}\exp(-k^2 t)]$ при $t \to \infty$. Отсюда видно, что генерация поля невозможна, если собственных значений нет.

Составляющая H_z определяется из (2), (18). Используя (14), можно найти

$$H_z = \frac{i}{k} I(qr)\left[\frac{q}{2}\left(\frac{A_+}{I_+(q)} + \frac{A_-}{I_-(q)}\right) - cK(q)\right] +$$

$$+ K(qr)\int_0^r h_z I(q\xi)\xi\,d\xi + I(qr)\int_r^1 h_z K(q\xi)\xi\,d\xi \ (0 < r < 1)$$

Выражение для $r > 1$ получается заменой $q \to s$, $0 \to 1$, $1 \to \infty$, $A \to -B$, $c = h_r(1) \to -c$, и в первом слагаемом $I \rightleftarrows K$.

Решение рассмотренной задачи динамо можно обобщить на случай, когда скорости ω, v и проводимость являются произвольными кусочно-постоянными функциями радиуса. Можно написать точное дисперсионное соотношение для случая, отличающегося от рассмотренного скачком проводимости при $r = r_0 \neq 1$ (предельными являются случаи границы проводника с вакуумом и сверхпроводником).

Согласно (6), (9), при больших s магнитное поле экспоненциально убывает при удалении от цилиндра $r = 1$; поэтому неоднородность проводимости (которая может зависеть не только от r) изменяет собственное число однородной задачи на экспоненциально малую величину, если область переменной проводимости удалена от цилиндра на минимальное расстояние $\gg 1 / \mathrm{Re}\,s$. В упомянутой задаче со скачком проводимости изменение собственного числа пропорционально $\exp(-2s\,|r_0 - 1|)$. В рассмотренном примере неоднородность проводимости несущественна для генерации.

При увеличении одного из масштабов движения следует ожидать затруднения генерации поля. В пределе плоских движений (когда скорость зависит только от декартовой координаты x и $V_x = 0$) генерация невозможна.

Из соображений непрерывности следует, что генерация останется возможной при замене движущегося цилиндра длинным тором и сглаживании скачков скоростей. Как и примеры [3, 4], это подтверждает возможность генерации поля осесимметричными движениями в астрофизических условиях.

Поступила 25 XII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lortz D.* Exact solutions of the hydromagnetic dynamo problem. Plasma Phys., 1968, vol. 10. No. 11, p. 967.
2. *Брагинский С. И.* О самовозбуждении магнитного поля при движении хорошо проводящей жидкости. ЖЭТФ, 1964, т. 47, вып. 3, стр. 1084.
3. *Тверской Б. А.* К теории гидродинамического самовозбуждения регулярных магнитных полей. Геомагнетизм и аэрономия, 1966, т. 6, № 1, стр. 11.
4. *Гайлитис А.* Самовозбуждение магнитного поля парой кольцевых вихрей. Магнитная гидродинамика, 1970, № 1, стр. 19.
5. *Зельдович Я. Б.* Магнитное поле в проводящей турбулентной жидкости при двумерном движении. ЖЭТФ, 1956, т. 31, вып. 1, стр. 154.
6. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций, ч. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1949.