

О КИНЕТИКЕ МАССООБМЕНА ПОЛИДИСПЕРСНОЙ СИСТЕМЫ
ЧАСТИЦ С ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДОЙ

Ю. А. Бувич

(Москва)

Существует целый ряд процессов, в которых определяющую роль играет кинетика тепло- и массообмена некоторой полидисперсной системы частиц с окружающей средой. К таким процессам относятся, например, горение пылевого или жидко-капельного топлива в газообразной среде, гетерогенные химические реакции, происходящие в разных фазах и сопровождающиеся появлением диффузионных и тепловых потоков к частицам, различные процессы тепло- и массообмена во взвешенном слое, процессы экстрагирования, испарение капельного или твердого аэрозоля, растворение твердых частиц, процессы дегазации нефти и т. д. Обычно для описания кинетики таких процессов применяют результаты, полученные при рассмотрении краевой задачи для уравнений диффузии и теплопроводности в окрестности индивидуальной частицы. Однако, как правило, скорости тепло- и массопереноса, в которые вовлечена система многих частиц, зависят, помимо характеристик каждой частицы, также от состояния среды, в которой частицы находятся. Поскольку состояние среды, в свою очередь, зависит от кинетики процессов на каждой из частиц, задача о тепло- и массопереносе системы частиц становится нелинейной, даже если соответствующая задача для одной частицы была линейной. Например, скорость горения аэрозоля зависит от состава газа, который изменяется со временем [1,2], химические реакции определяются концентрацией реагентов и продуктов реакции в среде, также зависящими от истории процесса, и т. п. Указанное обстоятельство приводит к серьезным затруднениям при вычислении различных практически важных величин (например, количества выгоревшего топлива или образовавшегося продукта реакции). Задача еще более усложняется, если участвующая в гетерогенном процессе система частиц полидисперсна, и интерес представляют некие более детальные характеристики системы, как-то: средний размер и функция распределения частиц, изменение ее со временем и т. д. Более того, в работе [3] на частном примере показано, что оказывается невозможным интерпретировать реальный процесс, происходящий с полидисперсной системой частиц, при помощи некоторых зависимостей для монодисперсной системы даже в случаях, когда интерес представляют только интегральные характеристики процесса.

В данной работе основное внимание обращено, во-первых, на правильный учет полидисперсности, а во-вторых, на устранение трудностей, связанных с отмеченной нелинейностью. Поэтому ниже рассмотрена одна из простейших задач такого рода, а именно, испарение системы капель в турбулизованной газовой среде, когда исследование кинетики испарения одной капли в неограниченном газе может быть сведено к решению единственного уравнения параболического типа в пространстве с исключенной сферой. Эта задача представляет также значительный самостоятельный интерес: достаточно упомянуть такие ее приложения, как физика облаков и испарение различных искусственных туманов, создаваемых в химической промышленности и лабораторной практике.

Ранее задача об испарении полидисперсной системы капель решалась в работе [3], где было получено уравнение, некоторое обобщение которого приведено в первом разделе данной работы. Заметим, что принятая здесь постановка задачи весьма близка к таковой в [3].

§ 1. Постановка задачи. Будем считать, что концентрация пара и температура примерно одинаковы во всех точках пространства. Это утверждение, справедливое, строго говоря, лишь для капель в достаточно турбулизованной среде, считается обычно справедливым также в случае облака и т. п. Кроме того, для простоты будем считать температуру такой, что концентрация насыщенного пара намного меньше плотности среды (это предположение выполняется, как правило, в реальных условиях). Это позволяет, во-первых, пренебречь локальными изменениями температуры

на поверхности капель, считая, что меняется лишь средняя температура всей системы, а во-вторых, не рассматривать стефановское течение и вызванное им изменение скорости испарения отдельных капель. Пренебрегаем также возможной коагуляцией капель и предполагаем, что характерные их размеры таковы, что можно не учитывать зависимость давления насыщенного пара от радиуса капель. Эти предположения накладывают определенные ограничения на размеры капель системы, которую можно описывать при помощи получаемых ниже соотношений.

Так как, по предположению, температура далека от температуры кипения, можно пренебречь также рассмотренными в [4] эффектами уменьшения радиуса капель в процессе испарения и записать для радиуса r отдельной капли максвелловское выражение

$$\frac{dr}{dt} = \frac{D}{r\rho} (q(t) - q^*(t)) \quad (1.1)$$

Здесь D — коэффициент диффузии пара в среде, ρ — плотность жидкости, $q^*(t)$ — плотность насыщающего пара при данной температуре $T(t)$, $q(t)$ — плотность пара.

Полидисперсность системы описываем, как и в [3], при помощи спектральной функции

$$dn(r) = n_0 f(r, t) dr, \quad f(r, 0) = f_0(r), \quad \int_0^\infty f_0(r) dr = 1 \quad (1.2)$$

Здесь n_0 — число капель в единице объема в начальный момент. Изменению $f(r, t)$ со временем формально соответствует течение некой фиктивной жидкости с плотностью $f(r, t)$, для которой справедливо уравнение неразрывности. Таким образом, получаем следующий аналог кинетического уравнения в области $r \geq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left(f \frac{dr}{dt} \right) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{D}{\rho} \frac{q(t) - q^*(t)}{r} \left(\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{f}{r} \right) = 0 \quad (1.3)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$f(r, t) = r (r^2 + \theta(t))^{-1/2} f_0[(r^2 + \theta(t))^{1/2}], \quad \theta(t) = \frac{2D}{\rho} \int_0^t [q^*(\tau) - q(\tau)] d\tau \quad (1.4)$$

Задачу можно считать решенной, если удастся найти функцию $\theta(t)$. Воспользуемся методом работы [3]. Из условия постоянства полного содержания испаряющегося вещества в единице объема имеем

$$q(t) = q_0 + \frac{4}{3} \pi \rho n_0 \left[\langle r_0^3 \rangle - \int_0^\infty f_0[(r^2 + \theta)^{1/2}] \frac{r^4 dr}{(r^2 + \theta)^{1/2}} \right] \quad (1.5)$$

Здесь было предположено, что занятый каплями объем относительно мал, индекс «нуль» здесь и далее относится к начальному моменту, а знак $\langle \rangle$ означает усреднение по распределению $f_0(r)$. Согласно определению $\theta(t)$, из (1.4) имеем

$$q(t) = q^*(t) - \frac{\rho}{2D} \frac{d\theta}{dt} \quad (1.6)$$

Величину $q^*(t)$ можно считать функцией средней температуры $T(t)$. Но из уравнения теплового баланса следует

$$T(t) - T_0 \approx - \frac{L}{c} (q(t) - q_0)$$

Здесь L — удельная теплота испарения, c — теплоемкость единицы объема двухфазной системы при постоянном давлении. Таким образом, $q^*(t)$ представляет функцию от $q(t)$. Исключая отсюда и из (1.6) функцию $q^*(t)$, получаем функциональную зависимость $q(t)$ от производной $d\theta/dt$. Подставляя ее в (1.5), получаем для $\theta(t)$ аналог уравнения работы [3] с учетом изменения температуры при испарении. Для большинства реальных систем такое уравнение можно упростить, считая, что вызванное испарением понижение температуры невелико, так что $q^*(t)$ можно представить в виде первых двух членов разложения Тейлора по разности $q(t) - q_0$. Тогда $q(t)$ представляется линейной функцией от $d\theta/dt$. Имеем

$$q(t) = \alpha q_0^* - \beta \frac{d\theta}{dt}, \quad \alpha = \frac{1 + bLq_0/cq_0^*}{1 + bL/c}, \quad \beta = \frac{\rho}{2D(1 + bL/c)} \quad (1.7)$$

Величина b представляет коэффициент в разложении $q^*(T)$ по разности $T(t) - T_0$ при первой степени этой разности. Вместо (1.5) после замены переменной интегрирования легко получить

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\alpha q_0^* - q_0}{3} + \frac{4}{3\beta} \pi \rho n_0 \left[\int_{r_0}^{\infty} (\rho^2 - \theta(t))^{3/2} f_0(\rho) d\rho - \langle r_0^3 \rangle \right] \quad (1.8)$$

Решение этого уравнения затруднено даже при простейших видах начальной спектральной функции $f_0(r)$. Однако, аналогично [3], для θ нетрудно получить отсюда приближенные формулы, соответствующие большим и малым начальным недосыщениям, асимптотические формулы для больших t и т. д.

Исключение представляет испарение монодисперсной системы капель, когда решение (1.8) получается без труда. Действительно, в этом случае $f_0(r) = \delta(r - r_0)$, и после ряда преобразований получаем для $\theta(t)$ алгебраическое уравнение ($\theta(t) < r_0$)

$$t = 2 \int_{r(\theta)}^{r_0} \frac{\omega d\omega}{A + B\omega^3}, \quad r(\theta) = (r_0^3 - \theta(t))^{1/3}, \\ A = \frac{\alpha q_0^* - q_0}{\beta} - \frac{4\pi \rho n_0 r_0^3}{3\beta}, \quad B = \frac{4\pi \rho n_0}{3\beta}$$

Если в некоторый момент t_0 величина $\theta(t_0)$ сравнивается с r_0 (это возможно, только если $A > 0$), то в этот момент система капель исчезает, и при $t > t_0$ имеем

$$f(r, t) \equiv 0, \quad q(t) \equiv q_0 + \frac{4}{3} \pi \rho n_0 r_0^3, \quad T(t) \equiv T_0 - \frac{4}{3} \pi \rho n_0 r_0^3 L c^{-1}$$

Если $A < 0$, то, как легко видеть, при $t \rightarrow \infty$ достигается равновесие между каплями и средой, причем асимптотический радиус капель легко вычисляется из (1.8) при $d\theta/dt = 0$; имеем

$$r_{\infty} = r_0 - \{r_0^3 - [r_0^3 - (4/3 \pi \rho n_0)^{-1} (\alpha q_0^* - q_0)]^{2/3}\}^{1/2}$$

Отсюда и из уравнений баланса можно выразить также q_{∞} , T_{∞} . Результаты могут быть обобщены на случай, когда система состоит из нескольких монодисперсных фракций, однако в более общих случаях уравнение (1.8) практически ничего не дает. Поэтому представляет интерес исследовать кинетическое уравнение (1.3) с других точек зрения.

§ 2. Автомоделные системы. Известно, что в ряде случаев при небольших колебаниях внешних условий спектр системы капель во все моменты времени характеризуется постоянными величинами — средний радиус, объем капель и т. п. остаются неизменными, меняется лишь число капель в единице объема $n(t)$, т. е. система автомоделна. Естественно искать решение $f(r, t)$ уравнения (1.3) для такой системы в виде произведения $\Phi(t)R(r)$. Подставляя это в (1.3), получаем

$$\frac{d\Phi}{dt} - \frac{D}{\rho} \Phi(q^*(t) - q(t)) \frac{1}{rR} \left(\frac{dR}{dr} - \frac{R}{r} \right) = 0 \quad (2.1)$$

Полагая $dR/dr - R/r = -2srR$, где s — постоянная, имеем

$$R(r) = 2sr \exp(-sr^2) \quad (2.2)$$

Задача для $\Phi(t)$ имеет вид

$$\frac{d\Phi}{dt} + \frac{2D}{\rho} s (q^*(t) - q(t)) \Phi = 0, \quad \Phi(0) = 1 \quad (2.3)$$

Условие (1.2) с учетом (2.3) дает $R(r) = f_0(r)$, что определяет входящую в (2.2) постоянную s . Из (1.6) и (1.7) имеем

$$q^*(t) - q(t) = \frac{\rho}{2D\beta} (\alpha q_0^* - q(t))$$

Отсюда и из (1.5) получаем

$$2D\rho^{-1}s(q^*(t) - q(t)) = a + b\Phi(t), \quad \langle r_0^3 \rangle = \sqrt[3]{\pi s}^{-3/2}$$

$$a = \frac{s}{\beta} (\alpha q_0^* - q_0 - \frac{4}{3} \pi \rho n_0 \langle r_0^3 \rangle), \quad b = \frac{4s}{3\beta} \pi \rho n_0 \langle r_0^3 \rangle$$

Таким образом, уравнение (2.3) запишется в виде

$$d\Phi/dt + a\Phi + b\Phi^2 = 0$$

Это — обычное уравнение Бернулли, его решение при $\Phi(0) = 1$

$$\Phi(t) = [(1 + b/a)e^{at} - b/a]^{-1} \quad (2.4)$$

Рассмотрим частные случаи. 1. Пусть $a > 0$ — начальная «водность» меньше начального недосыщения; при $t \gg a^{-1}$ имеем $\Phi(t) \approx ae^{-at}(a+b)^{-1}$. 2. При $a = 0$ — особый случай, когда система испаряется целиком, причем при $t \rightarrow \infty$ выполняется равенство $q(t) = q^*(t)$. Величина $\Phi(t)$ убывает до нуля по закону $\Phi(t) = (1+bt)^{-1}$. 3. Если $a < 0$, $a+b > 0$ — начальная «водность» больше начального недосыщения; система испаряется не полностью. Предельное значение $\Phi(t)$ при $t \rightarrow \infty$ равно $|a|/b$. Если $a+b=0$, то $q(t) \equiv q^*(t) \equiv q_0$, т. е. система вообще не изменяется. При $a+b < 0$ имеем $q(t) > q^*(t)$, что соответствует конденсационному росту капель в пересыщенной среде. Но поскольку при рассмотрении конденсации уравнение (1.3), записанное в области $r \geq 0$, становится непригодным (его нужно дополнить справа членом, учитывающим появление новых капель в системе), вряд ли соответствующие последнему случаю результаты имеют физический смысл.

Через $\Phi(t)$ выражаются все другие характеризующие систему величины

$$n(t) = n_0\Phi(t), \quad q(t) = q_0 + \gamma_0(1 - \Phi(t))$$

$$T(t) = T_0 - L\gamma_0 c^{-1}(1 - \Phi(t)), \quad \gamma_0 = \sqrt[3]{\pi \rho n_0 \langle r_0^3 \rangle}$$

Здесь γ_0 — начальная «водность». Теплоемкость c выражается в виде суммы

$$c = c_0\gamma_0 + c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 \approx \text{const}$$

Члены суммы соответствуют жидкости, пару и газу; γ_i — весовые содержания этих субстанций в единице объема, c_i — их удельные теплоемкости. Простой анализ показывает, что максимальное снижение температуры происходит при $\gamma_0 = \alpha q_0^*$. В этом случае

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (T_0 - T(t)) = \alpha L c^{-1} q_0^*$$

весьма сильно зависит от абсолютной начальной температуры.

Полученные зависимости имеют сравнительно простой вид. С чисто практической точки зрения вовсе не обязательно, конечно, чтобы истинная спектральная функция принадлежала к однопараметрическому семей-

ству (2.2). Вполне достаточно экстраполировать ее одной из функций этого семейства с некоторой ошибкой, допускаемой условиями конкретной задачи. Если такая экстраполяция возможна, записанные выражения будут характеризовать поведение системы с достаточной точностью.

Спектральные функции автомодельных систем представляют своего рода собственные функции рассматриваемой нелинейной задачи. Ввиду нелинейности прямое применение метода Фурье к решению задачи для систем с функциями $f_0(r)$, не принадлежащими (2.2), невозможно. Но можно несколько обобщить метод, сводя задачу к решению некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть

$$f_0(r) = 2 \sum_{n=1}^N s_n c_n r \exp(-s_n r^2), \quad \sum_{n=1}^N c_n = 1 \quad (2.5)$$

Функции вида (2.5) можно непосредственно использовать, например, для описания различных природных и искусственных систем, в спектре которых по тем или иным причинам имеется больше одного максимума. Будем искать $f(r, t)$ в виде

$$f(r, t) = 2r \sum_{n=1}^N s_n c_n \Phi_n(t) \exp(-s_n r^2) \quad (2.6)$$

Подставляя это выражение в (1.3), получим, аналогично предыдущему, систему

$$\frac{d\Phi_n}{dt} + \frac{2D}{\rho} s_n (q^*(t) - q(t)) \Phi_n = 0, \quad \Phi_n(0) = 1 \quad (2.7)$$

Отсюда, в частности, сразу получаем соотношения

$$s_m \ln \Phi_n \equiv s_n \ln \Phi_m, \quad \Phi_n^{s_m} \equiv \Phi_m^{s_n}$$

Предполагая, что $s_m > s_n$, если $m > n$, получаем важный качественный вывод с течением времени дальние максимумы спектральной функции (соответствующие большим r) сглаживаются быстрее, чем ближние, т. е. моменты $\langle r^k \rangle$ уменьшаются с ростом t (а не увеличиваются, вопреки утверждениям [3]). Ясно также, что для решения задачи достаточно найти лишь одну из функций $\Phi_n(t)$ — для определенности будем искать $\Phi_1(t)$, соответствующую наименьшему s_n . Из (2.7)

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = -\Phi_1 \left(a_1 + \sum_{n=1}^N b_1^{(n)} \Phi_1^{s_n/s_1} \right) \quad (2.8)$$

Постоянные a_1 и $b_1^{(n)}$ легко вычисляются аналогично a и b

$$a_1 = \frac{s_1}{\beta} \left(\alpha q_0^* - q_0 - \pi^{1/2} \rho n_0 \sum_{n=1}^N \frac{c_n}{s_n^{3/2}} \right), \quad b_1^{(n)} = \frac{\pi^{1/2} \rho n_0 s_1}{\beta} \frac{c_n}{s_n^{3/2}}$$

Для произвольных c_n и s_n это уравнение может быть проинтегрировано только численно. В частном случае, когда $s_n = k_n s_1$, где k_n — целые числа, правая часть (2.8) представляет многочлен, который всегда может быть разложен на множители, а уравнение (2.8) проинтегрировано. Решение выразится тогда в виде трансцендентного соотношения между Φ_1 и t . При этом, очевидно, берется корень, равный единице при $t = 0$. Например, в случае $s_2 = 2s_1$, $s_n = 0$ при $n > 2$ получаем

$$\ln \frac{\Phi_1^2}{\Phi_1^2 + \tau_1 \Phi_1 + \tau_2} - \tau_1 \int \frac{d\Phi_1}{\Phi_1^2 + \tau_1 \Phi_1 + \tau_2} = -2a_1 t$$

$$\tau_1 = \frac{2\sqrt{2}c_1}{1-c_1}, \quad \tau_2 = \left[\frac{(\alpha q_0^* - q_0)(2s)^{3/2}}{\pi^{1/2} \rho n_0 (1-c_1)} - 1 - \frac{2\sqrt{2}c_1}{1-c_1} \right]$$

Здесь предположено, что $b_1^{(2)} \neq 0$. В зависимости от знака детерминанта

$$\Delta = 4\tau_2 - \tau_1^2$$

получаются различные законы изменения $\Phi(t)$, описывающие испарение при различных возможных начальных условиях.

§ 3. Обобщение на системы с произвольной начальной спектральной функцией. Результаты предыдущего раздела приводят к мысли искать $f(r, t)$ при произвольной $f_0(r)$ в виде интегрального преобразования от некоторой функции $\Phi(s, t)$ с ядром, принадлежащим семейству (2.2). Пусть

$$f(r, t) = r \int_0^{\infty} A(s) e^{-sr^2} \Phi(s, t) ds \quad (3.1)$$

Налагая на $\Phi(s, t)$ условие $\Phi(s, 0) = 1$, получаем, в частности,

$$f_0(r) = r \int_0^{\infty} A(s) e^{-sr^2} ds$$

Или, вводя новый аргумент $\sigma = r^2$,

$$\Phi(\sigma) = \int_0^{\infty} A(s) e^{-s\sigma} ds, \quad \Phi(\sigma) = \frac{f_0(r)}{r} \Big|_{r=\sqrt{\sigma}} \quad (3.2)$$

Представление (3.2) позволяет сразу ответить на вопрос, для каких $\Phi(\sigma)$ оно возможно. А именно, единственное налагаемое на вид функции $\Phi(\sigma)$ ограничение состоит в требовании, чтобы $\Phi(\sigma)$ представляла собой лапласовское изображение некоторой другой функции $A(s)$, т. е. имела оригинал. Условия существования оригинала хорошо известны, поэтому в дальнейшем вопрос о степени общности не затрагивается. Функцию $A(s)$ можно, следовательно, считать известной. По аналогии с предыдущим, уместно представить ядро в виде $\Phi(s, t) = \Phi^s(t)$, т. е. записать вместо (3.1)

$$f(r, t) = r \int_0^{\infty} A(s) e^{-sr^2} \Phi^s(t) ds \quad (3.3)$$

После преобразований получаем для $\Phi(t)$ уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= -\Phi \left(a - \frac{4\pi\rho n_0}{3\beta} \int_0^{\infty} ds \int_0^{\infty} A(s) [1 - \Phi^s(t)] r^4 e^{-sr^2} dr \right) = \\ &= -\Phi \left(a_0 + \frac{4\pi\rho n_0}{3\beta} \int_0^{\infty} ds \int_0^{\infty} A(s) \Phi^s(t) r^4 e^{-sr^2} dr \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь

$$a_0 = \frac{\alpha q_0^* - q_0}{\beta} - \frac{4\pi\rho n_0}{3\beta} \langle r_0^3 \rangle = \frac{1}{\beta} (\alpha q_0^* - q_0 - \gamma_0)$$

Интегрируя в (3.4) по r , получаем окончательно

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\Phi \left(a_0 + \frac{\pi^{1/2}\rho n_0}{2\beta} \int_0^{\infty} s^{-1/2} \Phi^s(t) A(s) ds \right) \quad (3.5)$$

Основное преимущество уравнения (3.5) по сравнению с (1.8) состоит в том, что в интеграле в (3.5) пределы интегрирования не зависят от искомой функции, а сама подынтегральная функция проще, как правило, чем в (1.8). Даже если (3.5) трудно решать в конечном виде, его решение всегда можно получить численно. Аналогичный процесс при реальных видах $f_0(r)$ может оказаться не применимым к (1.8).

В качестве примера, имея в виду также возможные применения к физике облаков, рассмотрим случай, когда начальная спектральная функция дается известной формулой Хргиана — Мазина [5]

$$f_0(r) = 2\omega^3 r e^{-r\omega}$$

Соответствующая функция $\varphi(\sigma)$ имеет вид

$$\varphi(\sigma) = 2\omega^3 \sqrt{\sigma} \exp(-\omega \sqrt{\sigma}) \quad (3.6)$$

Отсюда имеем следующую функцию:

$$A(s) = \frac{\omega^2 - 2s}{2\pi^{1/2} s^{5/2}} \omega^3 \exp\left(-\frac{\omega^2}{4s}\right) \quad (3.7)$$

Подставляя (3.7) в (3.3) и интегрируя при $\Phi(t) = 1$, получаем $f(r, 0) = 2\omega^3 r e^{-\omega r}$, как это и должно быть. Далее,

$$\begin{aligned} \frac{\pi^{3/2} \rho n_0}{2\beta} \int_0^\infty s^{-5/2} \Phi^s A(s) ds &= \frac{\pi \rho n_0 \omega^3}{4\beta} \int_0^\infty (\omega^2 - 2s) \exp\left[s \ln \Phi - \frac{\omega^2}{4s}\right] \frac{ds}{s^5} = \\ &= \frac{\pi \rho n_0 \omega^3}{2\beta} \left(-\omega^2 \frac{d^3}{dv^3} - 2 \frac{d^2}{dv^2}\right) \int_0^\infty \exp\left[-\frac{v}{x^2} + x^2 \ln \Phi\right] \frac{dx}{x^2} \Big|_{v=1/4\omega^2} = \\ &= k \exp[-\omega(-\ln \Phi)^{1/2}] \sum_{n=0}^3 d_n (-\ln \Phi)^{1/2 n}, \quad k = \frac{\pi^{3/2} \rho n_0 \omega^2}{4\beta} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Здесь d_n — постоянные, которые нетрудно выразить через параметры задачи, если воспользоваться тождеством

$$\int_0^\infty \exp\left(-\frac{v}{x^2} - \mu x^2\right) \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{v}\right)^{1/2} \exp[-2(v\mu)^{1/2}]$$

Подставляя (3.8) в (3.5), получаем для функции $\Psi = -\ln \Phi$

$$\frac{d\Psi}{dt} = a_0 + k \exp(-\omega \sqrt{\Psi}) \sum_{n=0}^3 d_n \Psi^{1/2 n} \quad (3.9)$$

Решение этого уравнения всегда выражается в квадратурах. Во многих случаях важно знать поведение $\Phi(t)$ при малых и больших временах t , при различных величинах недосыщения и т. п. Соответствующие формулы получаются из (3.9) без труда. Например, при малых $\Phi(t)$ (полное или почти полное испарение)

$$\frac{d\Psi}{dt} \approx a_0, \quad \Phi(t) \approx C e^{-a_0 t} \quad \text{при } \Psi(t) \gg 1$$

Для испарения вблизи насыщения ($\Phi(t) \leq 1$, $\Psi(t) \geq 0$).

$$\frac{d\Psi}{dt} \approx a_0 + k d_0 + (d_1 - \omega d_0) k \sqrt{\Psi}$$

Совершенно аналогично задача может быть рассмотрена и для других видов спектральной функции.

До сих пор предполагалось, что скорость изменения радиуса капель может быть выражена при помощи (1.1). Это выражение соответствует предположению, что диффузию пара от капли можно описать на основе теории Максвелла — Лэнгмюра, в которой конвективная диффузия вообще не учитывается. Использование (1.1) оправдано, если масштабы турбулентных пульсаций намного выше размеров частиц, и скорость падения частиц в среде не влияет существенно на диффузионный поток.

§ 4. Влияние турбулентности на кинетику массообмена. В общем случае развитой мелкомасштабной турбулентности выражение (1.1) неверно. Его можно заменить соотношением [6]

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\xi D}{\rho \delta} (q(t) - q^*(t)) \quad (4.1)$$

Здесь ξ — коэффициент, зависящий от формы частиц (для сфер $\xi = 1$), а δ — средняя толщина диффузионного пограничного слоя.

Турбулентность среды может быть вызвана как внешними (перемешиванием), так и внутренними (движение частиц относительно среды) факторами. Если турбулент-

ность обусловлена внешними причинами, то характеризующее ее число Рейнольдса R определяется параметрами потока в целом и в первом приближении не зависит от размеров капель и т. п. С другой стороны, эффективный вклад в конвективный перенос молекул пара от капель вносят лишь пульсации, масштаб которых меньше или близок к r по порядку величины, т. е. число Пекле P , характеризующее относительную роль конвективного движения и молекулярной диффузии в массопереносе, можно записать в виде $P = vr / D$, где v — характерная скорость турбулентных пульсаций.

Толщина δ диффузионного слоя может быть аппроксимирована [6] степенной функцией числа Шмидта $S = R / P$, т. е. получаем вместо (1.1)

$$dr / dt = \eta (q(t) - q^*(t)) r^{-\kappa} \quad (4.2)$$

Здесь η — некоторый зависящий от D параметр, κ — постоянная, заключенная в интервале $(0,1)$. Случай $\kappa = 1$ соответствует, очевидно, испарению в невозмущенной среде, как того требует теория Максвелла—Лэнгмюра, а случай $\kappa \approx 0$ — весьма развитой турбулентности, когда отвод пара пропорционален поверхности капли.

Аналогично предыдущему получаем автомодельные спектральные функции, которые в данном случае имеют вид

$$f_0(r) = 2sr^\kappa \exp\left(-\frac{2s}{1+\kappa} r^{1+\kappa}\right) \quad (4.3)$$

Результаты предыдущего раздела, как легко видеть, целиком применимы и в рассматриваемом случае, если определить новый аргумент посредством соотношения

$$\sigma = 2r^{1+\kappa} (1 + \kappa)^{-1}$$

Далее, рассмотрим влияние свободного падения капель в среде, предполагая для простоты, что для массообмена неподвижных одиночных капель справедливо максвелловское соотношение (1.1). Величина dr / dt удовлетворительно описывается известной формулой Фресслинга

$$\frac{dr}{dt} = \frac{D}{\rho r} (q(t) - q^*(t)) \left[1 + 0.27 \left(\frac{\mu}{D}\right)^{1/3} R^{1/2}\right] \quad (4.4)$$

Учитывая, что в данном случае $R = wr / \mu$ (μ — вязкость среды), и что скорость свободного падения w пропорциональна радиусу r , получим для автомодельных спектральных функций

$$f_0(r) = Cr (r + k^{-1})^{2s/k} e^{-2sr/k}, \quad k = 0.27 (\mu / D)^{1/3} (R / r^2)^{1/2} \quad (4.5)$$

Заметим, что очевидны следующие два пути распространения результатов данной работы. Во-первых, изложенный метод можно обобщить на случай, когда кинетика обмена зависит не от одного, а от многих процессов диффузионного типа. Во-вторых, возможно распространение метода на гетерогенные системы, число фаз (или компонентов) которых больше двух. Например, метод непосредственно применим к анализу процессов в трехфазной водно-воздушной системе, что представляет особый интерес для физики облаков.

Поступила 9 XI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Хитрин Л. И. Физика горения и взрыва. Изд. МГУ, 1957.
2. Резняков А. Б. Горение пылеугольного факела. Изд. КазССР, 1958.
3. Буйков М. В. Испарение полидисперсного тумана. Коллоидн. ж., 1962, т. 24, № 4, стр. 390.
4. Бувевич Ю. А. Диффузионные процессы у подвижных поверхностей фазового раздела. Ж. физ. химии, 1964, т. 38, № 3, стр. 658.
5. Хргиан А. Х., Мазин И. П. О распределении капель по размерам в облаках. Тр. Центр. аэрол. обсерв., 1952, вып. 7.
6. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. Физматгиз, 1959.