

УДК 550.344.42

Оценка высоты цунами, распространяющейся над параболическим дном, в лучевом приближении

Ан.Г. Марчук

Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090
E-mail: mag@omzg.sccc.ru

Марчук Ан.Г. Оценка высоты цунами, распространяющейся над параболическим дном, в лучевом приближении // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2017. — Т. 20, № 1. — С. 23–35.

В статье рассматривается кинематика волновых лучей и фронтов цунами над неровным дном. Выводятся формулы, определяющие высоту цунами вдоль лучевой трубки. Получено точное решение для траектории волнового луча над параболическим рельефом дна, которое даёт возможность в лучевом приближении аналитически решить задачу нахождения высоты цунами от источника круглой формы в области с наклонным дном. Проведено сравнение полученного распределения максимумов высоты волны с результатами численного расчёта распространения цунами по модели мелкой воды.

Ключевые слова: *распространение цунами, уравнения мелкой воды, волновой луч, кинематика волнового фронта.*

DOI: 10.15372/SJNM20170103

Marchuk An.G. The assessment of tsunami heights above the parabolic bottom relief within the wave-ray approach // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2017. — Vol. 20, № 1. — P. 23–35.

In this paper, the kinematics of the tsunami wave ray and the wavefront above an uneven bottom is studied. The formula to determine the wave height along a ray tube has been obtained. The exact analytical solution for the wave-ray trajectory above the parabolic bottom topography has been derived. Within the wave-ray approach this solution gives the possibility to determine the tsunami wave heights in an area with a parabolic bottom relief. The distribution of the wave-height maxima in the area with the parabolic bottom was compared to the one obtained by the numerical computation with a shallow-water model.

Keywords: *tsunami propagation, shallow-water equations, wave ray, wavefront kinematics.*

1. Некоторые особенности распространения длинных волн

Волны цунами, порождаемые в природе вертикальным смещением обширных участков океанического дна, относятся к классу длинных волн, для которых длина волны больше глубины как минимум на порядок. Процесс распространения таких волн в глубоком океане, где обычно высота волны на два порядка меньше глубины, описывается линейной системой дифференциальных уравнений мелкой воды [1]. Справедливость такого описания неоднократно проверена на практике. В одномерном случае при отсутствии внешних сил (кроме силы гравитации) эти уравнения могут быть записаны в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial(Du)}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

Здесь u — горизонтальная скорость потока воды в волне, η — возвышение водной поверхности относительно невозмущенного уровня, g — ускорение силы тяжести, D — глубина. Из уравнений мелкой воды следует, что скорость волны не зависит от её длины и определяется формулой Лагранжа [1]:

$$c = \sqrt{gD}. \quad (3)$$

Эта формула имеет основополагающее значение для кинематики длинных волн (в том числе цунами). Фронт волны может быть определён как граница между той частью акватории, где вода покоится (возвышение η и компоненты скорости равны нулю), и той частью, куда к этому моменту возмущение от источника уже дошло ($\eta \neq 0$). Для описания динамики волн цунами в прибрежной зоне, где амплитуда цунами возрастает, а глубина становится меньше, применяется нелинейная модель мелкой воды [2], в рамках которой скорость распространения волн выражается формулой

$$c = \sqrt{g(D + \eta)}. \quad (4)$$

Здесь надо заметить, что скорости фронта и гребня волны несколько различаются, при этом гребень, где возвышение водной поверхности достигает максимального значения по всей длине волны, постепенно догоняет фронт. При дальнейшем изложении особенностей кинематики длинных волн под скоростью распространения будет подразумеваться скорость именно фронта волны, которая, согласно (3), не зависит от параметров волны и определяется только глубиной океана в том месте, где она находится в данный момент. Независимость скорости распространения фронта цунами от её амплитуды и длины позволяет заранее выявить многие особенности поведения этих волн в акваториях с неровным дном. В работе [3] приведён вывод формулы для горизонтальной скорости потока в движущейся волне. Для линейной модели мелкой воды она имеет вид

$$u = \eta \sqrt{\frac{g}{D}}, \quad (5)$$

а для нелинейной соответственно

$$u = \eta \sqrt{\frac{g}{D + \eta}}, \quad (6)$$

где η — высота волны, D — глубина, g — ускорение силы тяжести. Там же в [3] приводится вывод зависимости высоты плоской (одномерной) длинной волны от глубины. Если высота волны на глубине D_1 была равна η_1 , то приближённая формула для высоты волны на глубине D_2 имеет вид

$$\eta_2(x) \approx \eta_1(x) \sqrt[4]{\frac{D_1}{D_2}}. \quad (7)$$

Это есть известная формула Грина, описывающая изменение высоты длинной волны над неровным дном в одномерном случае. Таким образом, при распространении плоской волны цунами из глубокого океана на более мелководный шельф её высота будет расти

пропорционально корню четвёртой степени от отношения исходной и текущей глубин (7). Если волна не является плоской, то её амплитуда будет меняться не только за счёт непостоянства глубины, но и вследствие рефракции волны, т. е. из-за трансформации линии волнового фронта. В той же работе [3] получена формула, описывающая влияние рефракции на высоту распространяющейся волны. Если в процессе движения волны сегмент её фронта, имевший длину L_1 , растянулся из-за рефракции и стал иметь длину L_2 , тогда только лишь вследствие этого фактора высота волны изменится по формуле

$$\eta_2 = \eta_1 \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}. \quad (8)$$

Таким образом, за счёт цилиндрического расхождения высота волны цунами убывает обратно пропорционально корню квадратному из длины сегмента волнового фронта. Кроме этого, как было замечено, на высоту волны влияет фактор изменения глубины (7).

Вообще, кинематика распространения возмущений в различных средах описывается уравнением эйконала [4], которое в двумерном случае имеет вид

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{v^2(x, y)}, \quad (9)$$

где $v(x, y)$ задаёт распределение скорости в среде. Если функция $f(x, y)$ является решением уравнения эйконала (9), то фронт волны в момент времени T описывается уравнением

$$f(x, y) = T, \quad (10)$$

а уравнение $f(x, y) = 0$ задаёт положение источников возмущения или линию начального фронта волны (границу очага цунами).

Там же вводится понятие *волновых лучей*, одним из свойств которых является их ортогональность линии волнового фронта в любой момент времени. Также вдоль волновых лучей возмущение распространяется из источника до других точек среды за наименьшее время. То есть, волновые лучи являются экстремалами. Между двумя близкорасположенными волновыми лучами (в лучевой трубке) энергия волны остаётся постоянной [4], поэтому для высоты волны внутри лучевой трубки справедлива формула, вытекающая из (7) и (8):

$$\eta_2 = \eta_1 \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \sqrt[4]{\frac{D_1}{D_2}}, \quad (11)$$

где L_1 и L_2 — ширина лучевой трубки (длина сегмента волнового фронта внутри лучевой трубки) в начальный и в конечный моменты распространения волны, а D_1 и D_2 , а также η_1 и η_2 — значения глубины и вертикального смещения водной поверхности в точках, где волна находилась в эти моменты.

Изучением траекторий волновых лучей в средах с линейной зависимостью скорости распространения сигнала от расстояния до прямолинейной границы занимался В.А. Цецохо и сотрудники его лаборатории в ИВМиМГ СО РАН. Ими в числе прочего получены формулы для времени движения волны вдоль дуг окружностей, представляющих волновые лучи в таких средах [5, 6]. Формулы несколько отличаются от приведённых во втором пункте данной статьи, что можно объяснить различным подходом к параметризации. Но все результаты упомянутых статей относились к сейсмическим волнам в трёхмерной среде, и там не было попыток получить распределение амплитуд в какой-либо области. Далее в работах О.И. Криворотько и С.И. Кабанихина [7, 8] получены формулы

изменения высоты цунами от линейного или точечного источника над неровным дном. Эта же зависимость для одномерной волны (7), известная как “формула Грина”, вывод которой дан в предыдущей статье автора в [3], используется в п. 3 настоящей статьи для оценки высоты волны при её квазиодномерном распространении вдоль лучевой трубки.

Задачей оценки высоты длинных волн в прибрежной зоне занимались научные сотрудники из научной школы В.П. Маслова. В частности, в статьях С.Ю. Доброхотова с соавторами [9, 10] рассмотрен случай линейной зависимости глубины от расстояния до прямолинейного берега. В этих статьях параметры волны оцениваются с помощью асимптотических методов, предложенных В.П. Масловым [11]. При этом размеры источника полагаются бесконечно малыми по сравнению с расстоянием до регистратора. В настоящей же статье размеры источника сопоставимы с расстоянием до берега, хотя сопоставление результатов было бы любопытным.

2. Точные аналитические формулы траектории волнового луча в случае параболического рельефа дна

Точную математическую формулу для траектории волнового луча над параболическим дном можно найти из законов геометрической оптики. Рассмотрим двумерную акваторию, где глубина (а с ней и скорость распространения в ней волн) меняется только в одном направлении и пропорциональна квадрату расстояния до прямолинейной границы. Здесь можно воспользоваться законом Снелля (Снеллиуса) для величины угла преломления волнового луча в среде с переменной оптической проводимостью [12]. Согласно этому закону, если в двумерной проводящей среде луч подходит под углом α_1 к нормали к прямолинейной границе раздела (горизонтальной линии на рис. 2.1), где проводимость среды (скорость распространения сигнала) меняется с b_1 на b_2 , то после прохождения границы его направление α_2 изменится в соответствии с формулой

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{b_1} = \frac{\sin(\alpha_2)}{b_2}. \quad (12)$$

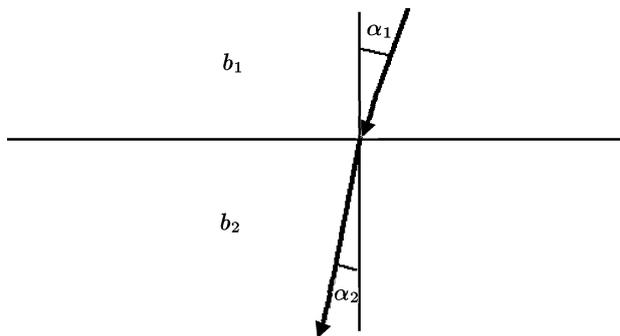


Рис. 2.1. Преломление волнового луча на границе двух сред

Таким образом, в среде, где величина проводимости (скорости распространения в ней волн) b меняется только вдоль одной пространственной переменной (например $b(y)$), наклон волнового луча относительно направления изменения проводимости α меняется в соответствии с формулой

$$\frac{\sin(\alpha(y))}{b(y)} = \text{const } 1 = \frac{\sin(\alpha_0)}{b(y_0)}. \quad (13)$$

Здесь α_0 — это начальный угол наклона волнового луча относительно вертикали в точке, где $y = y_0$. В случае **параболического** дна, когда глубина пропорциональна квадрату расстояния до берега, проводимость среды (скорость распространения волн цунами) определяется по формуле Лагранжа (3), которая в данном случае имеет вид

$$a(y) = \sqrt{gb_1y^2} = b_2y, \quad (14)$$

где g — ускорение силы тяжести, y — расстояние до береговой линии, где $y = 0$. Здесь b_1 и b_2 — константы во всей рассматриваемой прибрежной области. Закон Снеллиуса преломления луча (12) в этом случае даёт следующую формулу для направления луча относительно нормали к береговой линии:

Для нахождения траектории волнового луча над таким рельефом дна рассмотрим следующую задачу. Из точки $(0, y_0)$, находящейся на расстоянии y_0 от берега параллельно береговой линии выпускается волновой луч (рис. 2.2). В точке выхода угол $\alpha = \pi/2$. Углом наклона луча $y(x)$ к береговой линии будет $\beta = \pi/2 - \alpha$ (рис. 2.2). Следовательно, имеем

$$\frac{dy}{dx} = \text{tg}(\beta) = \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}, \quad 0 < \beta < \pi/2,$$

или

$$dx = dy \frac{\cos(\beta)}{\sin(\beta)}, \quad (15)$$

$$y(\alpha) = b_3 \sin(\alpha), \quad (16)$$

где b_3 — также некоторая константа.

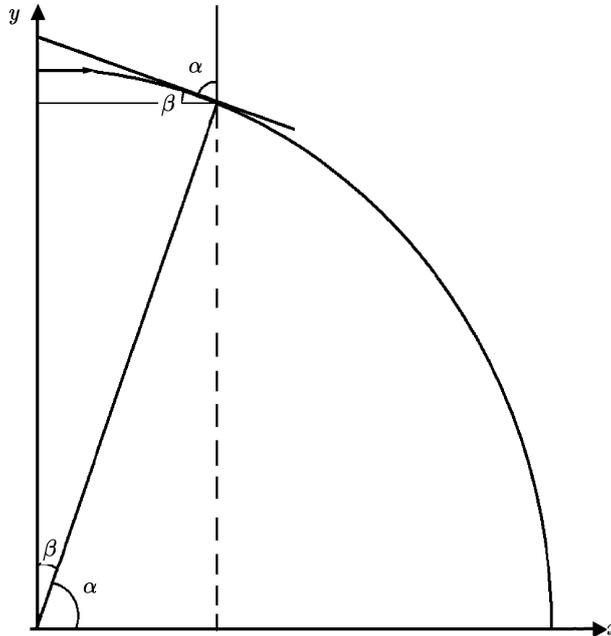


Рис. 2.2. Рефракция волнового луча над параболическим рельефом дна

Из (15) и (16) следует

$$dx = b_3 \sin(\beta) d\beta \frac{\cos(\beta)}{\sin(\beta)} = b_3 \cos(\beta) d\beta.$$

Считая, что угол β в процессе движения волнового луча изменяется от нуля до некоторого значения β_1 , после интегрирования получаем

$$x = b_3 \sin(\beta) \Big|_0^{\beta_1} = b_3 \sin(\beta_1) = b_3 \cos(\alpha_1), \quad (17)$$

где $\alpha_1 = \pi/2 - \beta_1$. Одновременно с этим из (14) имеем

$$y = b_3 \sin(\alpha_1) \quad (18)$$

для любого значения α_1 в интервале от $\pi/2$ до нуля. Формулы (17), (18) представляют собой параметрическую запись уравнения окружности радиусом b_3 с центром, находящимся в начале координат. Этот радиус легко определяется из формулы (16). Из этой же формулы следует, что центр окружности в любом случае располагается на оси абсцисс. В случае, когда луч в начальный момент был направлен параллельно береговой линии, радиусом будет расстояние от берега в этот момент. Если известен угол наклона луча относительно нормали к берегу α_0 и расстояние в этот момент до берега y_0 , то радиус окружности r , дуга которой представляет траекторию волнового луча, находится из формулы (16):

$$r = b_3 = \frac{y_0}{\sin(\alpha_0)}. \quad (19)$$

Если $\alpha_0 = 0$, но при этом $y_0 > 0$, то радиус будет бесконечно большим, и траектория луча будет представлять собой прямую линию, направленную ортогонально берегу.

В отличие от случая с наклонным дном [3], здесь краевая задача для волнового луча не представляет трудностей. Пусть известны две точки (источник и приёмник) в области с параболическим рельефом дна (14), при этом пусть приёмник располагается на береговой линии в начале координат $(0, 0)$. Координаты источника: $x = x_0$, $y = y_0$. Пусть для определённости $0 < x_0 < y_0$, что означает, что волновой луч монотонно приближается к берегу (рис. 2.3).

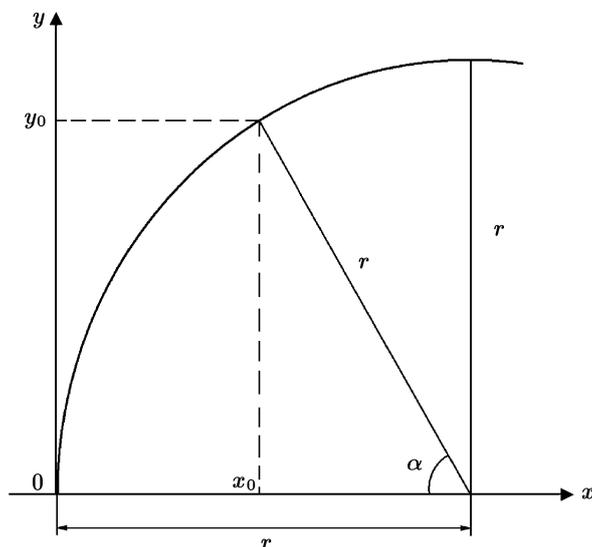


Рис. 2.3. Схема решения краевой задачи для волнового луча над параболическим дном

Зная, что искомым луч является дугой окружности с центром на береговой линии ($y = 0$), искомым радиус r легко определяется из уравнения окружности, проходящей через точку (x_0, y_0) :

$$(r - x_0)^2 + y_0^2 = r^2, \quad (20)$$

откуда получаем выражение для радиуса окружности

$$r = \frac{x_0^2 + y_0^2}{2x_0}. \quad (21)$$

Далее из уравнения окружности $(r - x)^2 + y^2 = r^2$ следует уравнение волнового луча, проходящего через начало координат и точку (x_0, y_0) :

$$y = \sqrt{x(2r - x)}, \quad (22)$$

где радиус окружности r определяется по формуле (21).

Теперь с учетом того, что волновые лучи над параболическим дном имеют форму дуг окружностей с центрами на оси абсцисс, найдём время распространения волны вдоль луча. Рассмотрим волновой луч, представляющий собой дугу окружности радиуса r с центром в точке $(x_0, 0)$ (рис. 2.4). Пусть в начальный момент ($t = 0$) фронт волны пересекал этот луч в точке **A** с координатами (x_1, y_1) . При этом отрезок, соединяющий эту точку с центром окружности, наклонен под углом α_1 к оси абсцисс (рис. 2.4).

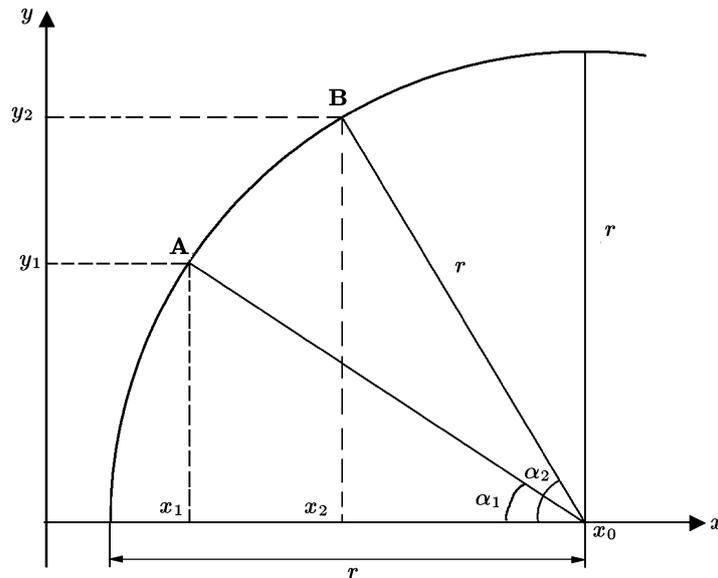


Рис. 2.4. Схема вычисления времени движения волны по волновому лучу от точки **A** до точки **B**

Найдём время T , за которое фронт волны переместится в точку **B** с координатами (x_2, y_2) , где угол наклона радиус-вектора составит α_2 радиан. Если $0 < \alpha_1 < \alpha_2 \leq \pi$, тогда с учётом (3) имеем

$$T = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha r}{\sqrt{gD(x, y)}}, \quad (23)$$

где глубина D во всей области изменяется по закону

$$D(x, y) = k^2 y^2. \quad (24)$$

Перейдя к угловой переменной α , получим

$$T = \frac{1}{\sqrt{g}} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha r}{kr \sin(\alpha)} = \frac{1}{k_1} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right| \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \frac{1}{k_1} \left(\ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha_2}{2} \right) \right| - \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha_1}{2} \right) \right| \right), \quad (25)$$

где $k_1 = k\sqrt{g}$. Здесь угол α отсчитывается от оси абсцисс по часовой стрелке. Отсюда можно выразить угол α_2 через α_1 и время T :

$$\alpha_2 = 2 \operatorname{arctg} \left(\exp(k_1 T) \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha_1}{2} \right) \right). \quad (26)$$

Окончательно координаты точки назначения, которой фронт цунами вдоль волнового луча достигнет за время T , выразятся по формулам:

$$x_2(T, \alpha_1) = x_0 - r \cos(\alpha_2), \quad y_2(T, \alpha_1) = r \sin(\alpha_2), \quad (27)$$

где α_2 связано с T и α_1 по формуле (26). Если $0 \leq \alpha_2 < \alpha_1 < \pi/2$, тогда формула (26) будет выглядеть следующим образом:

$$\alpha_2 = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\alpha_1}{2} \right)}{\exp(k_1 T)} \right). \quad (28)$$

Радиус и положение центра этой окружности однозначно определяются из координат источника (x_1, y_1) и угла выхода оттуда волнового луча α_1 (рис. 2.4):

$$r = y_1 / \sin(\alpha_1), \quad x_0 = x_1 + r \cos(\alpha_1) = x_1 + y_1 / \operatorname{tg}(\alpha_1). \quad (29)$$

При $\alpha_1 = \pi/2$ радиус r равен, естественно, y_1 , а абсцисса центра окружности совпадает с абсциссой точки выхода (т.е. x_1). Теперь по формулам (26) и (27) легко найти координаты точки (x_2, y_2) , лежащей на волновом луче, куда волновой фронт придёт через время T .

3. Нахождение высоты волны цунами в лучевом приближении.

Для решения задачи нахождения высоты цунами в области с параболическим рельефом дна надо сначала разделить всю область на лучевые трубки, для чего по координатам начальных точек и углам выхода оттуда лучей по формулам (26) и (27), меняя время T , строить волновые лучи, выходящие от границы этого источника в ортогональном к ней направлении. Радиусы и абсциссы центров окружностей, представляющих волновые лучи, даются формулами (29).

Например, если источник цунами имеет форму круга радиуса R_0 с центром в точке (x_{00}, y_{00}) , то, расположив вдоль его границы N точек и выпустив из каждой волновой луч по направлению радиус-вектора к этой окружности, построим набор из N волновых лучей от границы источника до точек, находящихся вблизи границ области. Схема построения одного такого луча представлена на рис. 3.1. Перебрав значения α по всему интервалу $(-\pi, +\pi)$ с достаточно маленьким шагом $\Delta\alpha$, мы разделим всю область на лучевые трубки. Здесь следует иметь в виду, что в случае кругового начального фронта цунами координаты точек выхода волнового луча (x_1, y_1) меняются в соответствии с формулами:

$$x_1 = x_{00} + R_0 \sin(\alpha), \quad y_1 = y_{00} + R_0 \cos(\alpha), \quad (30)$$

где α — это угол выхода луча относительно оси ординат. Здесь нельзя говорить “до точек на берегу”, так как из формулы (25) следует, что на берегу, где угол α_2 равен π радиан, время T бесконечно велико.

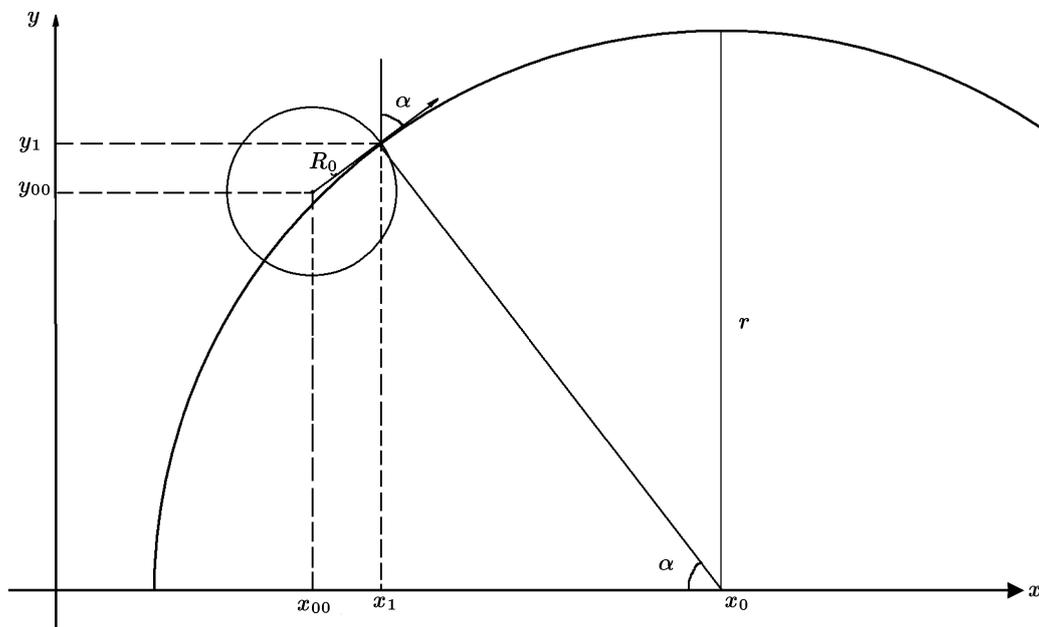


Рис. 3.1. Траектория волнового луча над параболическим дном, выходящего из точки на границе круглого источника под углом α относительно оси ординат

На рис. 3.2 представлены волновые лучи, построенные для значений углов выхода лучей от границы круглого источника, равных $\alpha_i = i\pi/200$ ($i = 1, \dots, 200$).

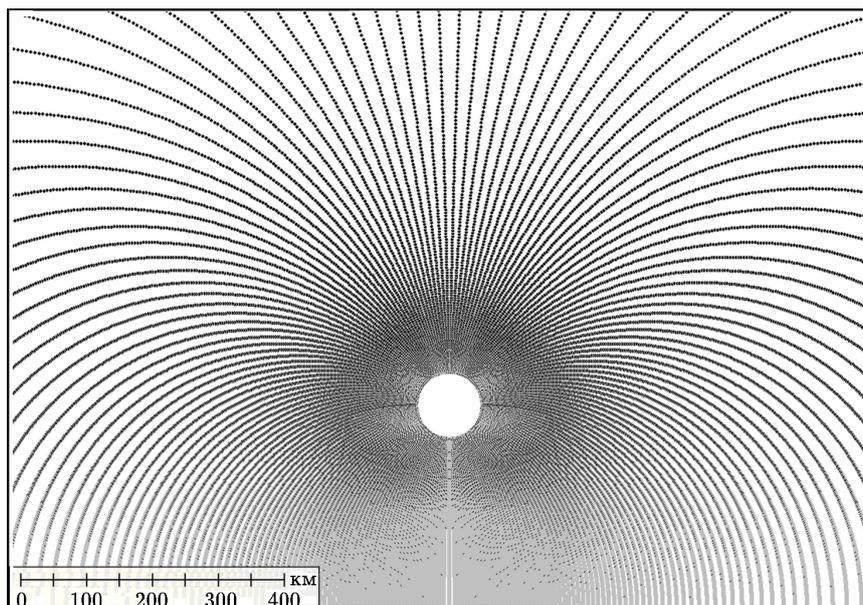


Рис. 3.2. Траектории двухсот волновых лучей над параболическим рельефом дна, выходящих из точек на границе круглого источника цунами

Одновременно с построением волновых лучей можно находить вдоль каждого из них точки, соответствующие одинаковым моментам времени. Таким образом будут построены изохроны цунами для заданных моментов времени. На рис. 3.3 представлены положения волнового фронта через каждые 5 мин распространения, начиная с начального момента. В этом конкретном случае центр круглого источника радиусом $R_0 = 50$ км располагался на расстоянии 300 км от прямолинейной береговой линии, а коэффициент пропорциональности k параболического изменения глубины равен 10^{-4} из (24). В этом случае на расстоянии 1000 км от берега глубина составила 10000 м.

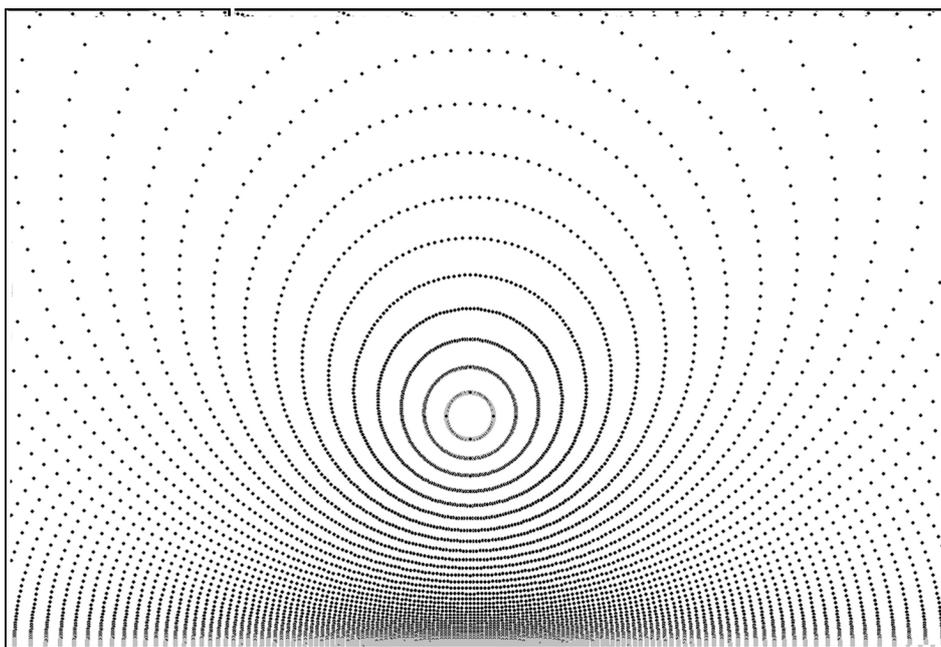


Рис. 3.3. Положения волнового фронта (изохроны) цунами от круглого источника радиусом 50 км над параболическим рельефом дна через каждые 5 мин

Для того, чтобы оценить высоту волны в точке (x_1, y_1) , куда за время T волна распространится вдоль волнового луча, выходящего из точки $(x_{00} + R_0 \sin(\alpha), y_{00} + R_0 \cos(\alpha))$ под углом α , надо найти координаты точки назначения, до которой волна за то же время дойдёт вдоль волнового луча, выходящего из соседней точки начального фронта $(x_{00} + R_0 \sin(\alpha + \Delta\alpha), y_{00} + R_0 \cos(\alpha + \Delta\alpha))$ под углом $\alpha + \Delta\alpha$ к вертикальному направлению. Затем надо посчитать по формуле (11) коэффициент убывания (роста) высоты волны за счёт изменения ширины лучевой трубки и вследствие изменения глубины. Прделав это для разных значений времени T и для разных направлений выхода волновых лучей, получим распределение коэффициента изменения высоты волны во всей области, куда способны пойти волновые лучи из точек начального волнового фронта.

Для верификации полученного распределения максимумов высоты волны также было проведено численное моделирование распространения цунами по дифференциальной модели мелкой воды с использованием пакета MOST [13]. В этом численном эксперименте центр кругового очага радиусом 50 км располагался на расстоянии 300 км от берега. Этот круглый очаг формировал круговую волну, имевшую высоту 100 см на расстоянии 50 км от центра источника. Именно такой начальный фронт был взят в качестве начальных условий для вычисления амплитуд по лучевой модели. На рис. 3.4 серым цветом нарисованы изолинии распределения максимумов высоты волны цунами в прибрежной

области 1000×1000 км при наличии параболического дна, полученные с помощью формул (26), (27), а также (11). Здесь же для сравнения чёрным цветом нанесены соответствующие тому же набору значений изолинии максимумов высоты волны, полученные в результате численного решения той же задачи по модели мелкой воды [13]. В обоих случаях значения уровней на изолиниях, высота на которых отображена в метрах, были взяты с интервалом 5 см (рис. 3.4). Из рисунка видно, что распределение амплитуд, полученных двумя разными методами, в основном совпадает, кроме прибрежной зоны, где в отличие от лучевого приближения в дифференциальной модели мелкой воды сильнее проявляется нелинейность, присущая динамике волн в шельфовой зоне при глубинах, не превышающих 100 м.

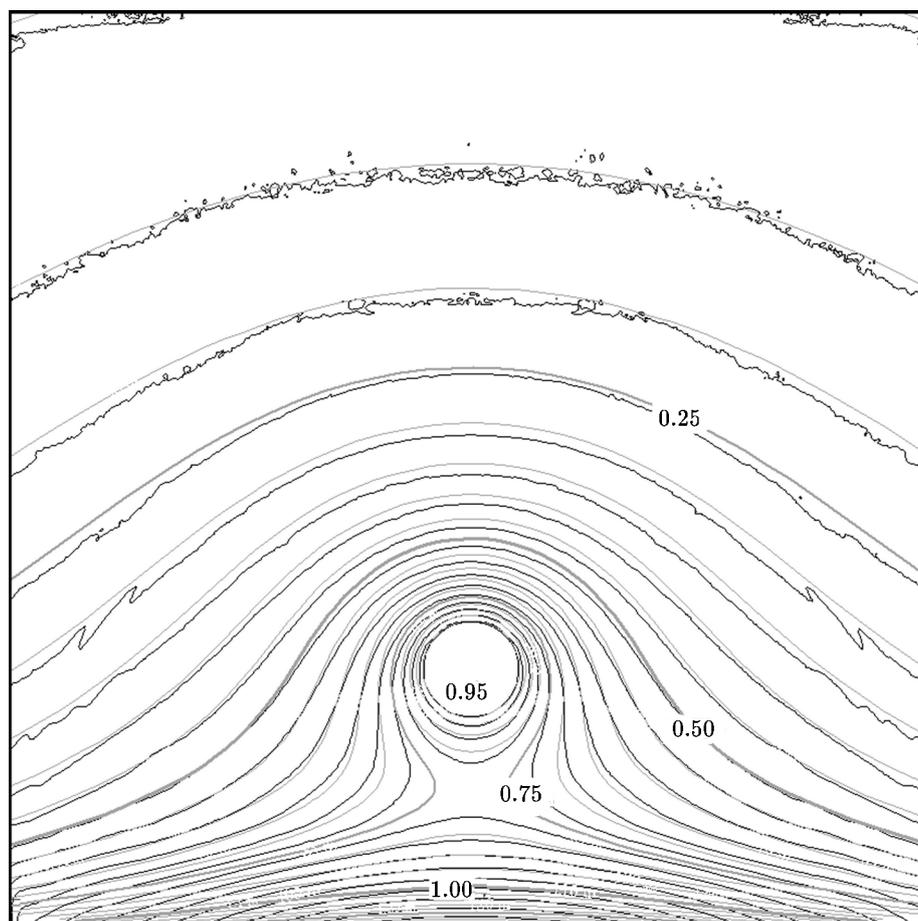


Рис. 3.4. Сравнительное расположение изолиний максимумов высоты цунами, рассчитанных по модели мелкой воды (черный цвет) и в лучевом приближении (серый цвет)

4. Заключение

Исходя из особенностей волн, описываемых дифференциальными уравнениями мелкой воды, найдена точная траектория волнового луча над параболическим дном. Используя формулы для траекторий волновых лучей, а также зависимость высоты цунами вдоль лучевой трубки, найдено распределение максимумов высоты волны от круглого

источника в области, где глубина пропорциональна квадрату расстояния до прямолинейной береговой линии. Сравнение полученного распределения с результатом расчёта, проведённого по модели мелкой воды, показало хорошее их соответствие вне зоны шельфа, т. е. на глубинах более 100 м. При этом оценка высот в рамках лучевой модели требует на 2 порядка меньше вычислительных ресурсов (машинного времени, оперативной памяти и т. д.).

Литература

1. **Стокер Дж.Дж.** Волны на воде. — М.: ИЛ, 1959.
2. **Марчук Ан.Г., Чубаров Л.Б., Шокин Ю.И.** Численное моделирование волн цунами. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1983.
3. **Марчук Ан.Г.** Вычисление высоты цунами, распространяющейся над наклонным дном, в лучевом приближении // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2015. — Т. 18, № 4. — С. 377–388.
4. **Романов В.Г.** Обратные задачи для дифференциальных уравнений: Учебное пособие. — Новосибирск: НГУ, 1983.
5. **Цецохо В.А., Белоносова А.В., Белоносов А.С.** Формулы для вычисления линейного расхождения волновых лучей в трёхмерной блочно-неоднородной градиентной среде // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2009. — Т. 12, № 3. — С. 325–339.
6. **Белоносов А.С.** Формулы для вычисления расхождения волновых лучей в прямоугольной системе координат. — Новосибирск, 1982. — (Препринт ВЦ СО АН СССР; 396).
7. **Kabanikhin S.I., Krivorot'ko O.I.** A numerical method for determining the amplitude of a wave edge in shallow water approximation // Applied Computational Mathematics. — 2013. — Vol. 12, iss. 1. — P. 91–96.
8. **Krivorot'ko O.I.** Fast algorithm for calculation of the moving tsunami wave height // Сибирские электронные математические известия. Тр. пятой Междунар. молодежной научной школы-конференции “Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач”. — Новосибирск, 2014. — Т. 11. — С. 115–120.
9. **Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е., Тироцци Б.** Асимптотические решения двумерного модельного волнового уравнения с вырождающейся скоростью и локализованными начальными данными // Алгебра и анализ. — 2010. — Т. 22, вып. 6. — С. 67–90.
10. **Доброхотов С.Ю., Тироцци Б.** Локализованные решения одномерной нелинейной системы уравнений мелкой воды со скоростью $c = \sqrt{x}$ // УМН. — 2010. — Т. 65, вып. 1(391). — С. 185–186.
11. **Маслов В.П.** Асимптотические методы решения псевдодифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1987.
12. **Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И.** Геометрическая оптика неоднородных сред. — М.: Наука, 1980.
13. **Titov V.V., Gonzalez F.** Implementation and Testing of the Method of Splitting Tsunami (MOST) // NOAA Technical Memorandum ERL PMEL-112. — Washington DC, 1997.

*Поступила в редакцию 30 мая 2016 г.,
в окончательном варианте 2 сентября 2016 г.*

Литература в транслитерации

1. **Stoker Dzh.Dzh.** Volny na vode. — M.: IL, 1959.
2. **Marchuk An.G., Chubarov L.B., Shokin Yu.I.** Chislennoe modelirovanie voln cunami. — Novosibirsk: Nauka. Sib. otd-nie, 1983.
3. **Marchuk An.G.** Vychislenie vysoty cunami, rasprostranyayushcheysya nad naklonnym dnom, v luchevom priblizhenii // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2015. — T. 18, № 4. — S. 377–388.
4. **Romanov V.G.** Obratnye zadachi dlya differencial'nykh uravneniy: Uchebnoe posobie. — Novosibirsk: NGU, 1983.
5. **Cecokho V.A., Belonosova A.V., Belonosov A.S.** Formuly dlya vychisleniya lineynogo raskhozhdeniya volnovykh luchey v trekhmernoy blochno-neodnorodnoy gradientnoy srede // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2009. — T. 12, № 3. — S. 325–339.
6. **Belonosov A.S.** Formuly dlya vychisleniya raskhozhdeniya volnovykh luchey v pryamougol'noy sisteme koordinat. — Novosibirsk, 1982. — (Preprint VC SO AN SSSR; 396).
7. **Kabanikhin S.I., Krivorot'ko O.I.** A numerical method for determining the amplitude of a wave edge in shallow water approximation // Applied Computational Mathematics. — 2013. — Vol. 12, iss. 1. — P. 91–96.
8. **Krivorot'ko O.I.** Fast algorithm for calculation of the moving tsunami wave height // Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya. Tr. pyatoy Mezhdunar. molodezhnoy nauchnoy shkoly-konferencii “Teoriya i chislennye metody resheniya obratnykh i nekorrektnykh zadach”. — Novosibirsk, 2014. — T. 11. — C. 115–120.
9. **Dobrokhotov S.Yu., Nazaykinskiy V.E., Tirocci B.** Asimptoticheskie resheniya dvumernogo model'nogo volnovogo uravneniya s vyrozhdayushcheysya skorost'yu i lokalizovannymi nachal'nymi dannymi // Algebra i analiz. — 2010. — T. 22, vyp. 6. — C. 67–90.
10. **Dobrokhotov S.Yu., Tirocci B.** Lokalizovannye resheniya odnomernoy nelineynoy sistemy uravneniy melkoy vody so skorost'yu $c = \sqrt{x}$ // UMN. — 2010. — T. 65, vyp. 1(391). — S. 185–186.
11. **Maslov V.P.** Asimptoticheskie metody resheniya psevdodifferencial'nykh uravneniy. — M.: Nauka, 1987.
12. **Kravcov Yu.A., Orlov Yu.I.** Geometricheskaya optika neodnorodnykh sred. — M.: Nauka, 1980.
13. **Titov V.V., Gonzalez F.** Implementation and Testing of the Method of Splitting Tsunami (MOST) // NOAA Technical Memorandum ERL PMEL-112. — Washington DC, 1997.

