СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ. 2014. Т. 17, № 3

УДК 519.853.4

Метод генерации тестовых квадратично-линейных задач двухуровневой оптимизации с гарантированным решением*

А.В. Орлов[1], А.В. Малышев[2]

[1]Институт динамики систем и теории управления Сибирского отделения Российской академии наук, ул. Лермонтова, 134, Иркутск, 664033

[2]Luxand, Inc., 901 N. Pitt str. Suite 325 Alexandria, VA 22314 USA
E-mails: anor@icc.ru (Орлов А.В.), anton@luxand.com (Малышев А.В.)

Орлов А.В., Малышев А.В. Метод генерации тестовых квадратично-линейных задач двухуровневой оптимизации с гарантированным решением // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2014. — Т. 17, № 3. — С. 245–257.

В работе предложен и обоснован новый метод генерации тестовых квадратично-линейных задач двухуровневой оптимизации в гарантированной постановке. Доказаны утверждения, позволяющие описать точный вид всех локальных и глобальных гарантированных решений в сгенерированных задачах, а также их количество.

Ключевые слова: *генерация тестовых задач, двухуровневая оптимизация, гарантированное (пессимистическое) решение, задачи-ядра.*

Orlov A.V., Malyshev A.V. The test problem generation for quadratic-linear pessimistic bilevel optimization // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2014. — Vol. 17, № 3. — P. 245–257.

The generation method of quadratic-linear bilevel optimization test problems in a pessimistic formulation is proposed and justified. The propositions about the exact form and the number of local and global pessimistic solutions in generated problems are proved.

Key words: *test problem generation, bilevel optimization, guaranteed (pessimistic) solution, kernel problems.*

1. Введение

Для экспериментальной проверки работоспособности и эффективности новых методов решения задач вычислительной математики (в особенности задач оптимизации), а также их сравнения с существующими подходами необходимо наличие достаточно широкого спектра тестовых задач различной сложности и размерности. При этом желательно обладать информацией о структуре и свойствах тестовых задач, чтобы сделать вывод о границах применимости исследуемых методов. Следуя классической монографии Б.Т. Поляка [1], хорошие тестовые задачи должны удовлетворять определенному набору свойств: быть унифицированными и общепринятыми, моделировать типовые трудности для данного класса задач, быть достаточно компактными, не обладать специфическими

*Работа частично поддержана РФФИ (проект № 11-01-00270-а).

особенностями, дающими преимущества тому или иному методу, и, наконец, решение в тестовой задаче должно быть известно.

Самый простой путь построения тестов — (псевдо)случайная генерация данных задачи. Однако этот путь применим далеко не всегда, и нельзя говорить о том, что задачи, построенные таким образом, будут удовлетворять указанному набору свойств. Только в случае, если задача оптимизации имеет решение при любых исходных данных и при этом, скажем, известно значение целевой функции в этом решении, применение данного подхода может быть оправдано. Например, этим условиям удовлетворяет невыпуклая билинейная задача, эквивалентная задаче отыскания ситуации равновесия по Нэшу в биматричной игре [2].

Другой путь для выбора поля тестовых примеров — использование существующих тестовых коллекций и библиотек. Например, широко известны и используются достаточно давно библиотека DIMACS для задач дискретной оптимизации [3], коллекции задач невыпуклой (глобальной) оптимизации К. Шитковски и В. Хока [4, 5], К. Флодаса и П. Пардалоса [6], а также более современная коллекция тестов С. Лейффера [7], включающая нелинейные смешанно-целочисленные задачи, задачи с равновесными ограничениями и задачи векторной оптимизации. Однако далеко не для всех классов задач подобные библиотеки существуют. К тому же этот путь, в частности для задач невыпуклой оптимизации, осложняется тем, что для большинства задач доступно только лишь “best known solution” (наилучшее известное решение), а информация о глобальном решении отсутствует.

Последнего недостатка лишен подход, базирующийся на разработке специальных методов генерации (конструирования) тестовых задач. В этом случае в тестовой задаче по построению известно глобальное решение, и зачастую есть возможность управлять свойствами сконструированной задачи путем изменения параметров генерации. В этом направлении есть ряд интересных результатов у группы под руководством Х. Моширвазири [8–11], предложивших методы конструирования задач вогнутой минимизации, обратновыпуклых задач оптимизации и линейных задач двухуровневого программирования, а также у группы под руководством Л. Висенте и П. Каламаи [12–15], исследовавших с этой целью ряд классов задач квадратичной и двухуровневой оптимизации. Стоит упомянуть и об оригинальной методике генерации классов тестовых функций для методов глобальной оптимизации, позволяющей строить наборы недифференцируемых, непрерывно дифференцируемых и дважды непрерывно дифференцируемых функций различной сложности и размерности [16]. Это, конечно, далеко не полный список подобного сорта публикаций.

Отметим, что все работы, касающиеся генерации тестовых задач различных классов двухуровневой оптимизации, которые удалось отыскать [10, 13, 14], имеют дело только с задачами в оптимистической постановке [17]. В этом случае предполагается, что цель лица, принимающего решение (ЛПР) на верхнем уровне, может быть согласована с действиями ЛПР на нижнем уровне. В практических же задачах иерархической структуры такая ситуация является редкостью, и более адекватным инструментом моделирования здесь является рассмотрение задач в гарантированной (пессимистической) постановке, где верхний уровень вынужден действовать исходя из обобщенного принципа гарантированного результата [18]. Задачи в этой постановке намного более сложны для исследования с точки зрения их численного решения и пока не столь популярны, хотя в последнее время начали появляться работы и в этой области [19–21].

В связи с этим думается, что разработка новых методов конструирования тестовых задач двухуровневой оптимизации с гарантированным решением является в настоящее время актуальной задачей исследования операций. Разумным представляется пойти по пути упомянутых выше групп авторов методов генерации тестов, которые проводили свою работу, постепенно усложняя рассматриваемые задачи, и начать исследования с одного из самых простых классов двухуровневых задач — квадратично-линейных (с квадратичной функцией на верхнем уровне и линейной функцией на нижнем).

С этой целью в работе на задачи указанного класса с гарантированным решением развита методика генерации тестовых двухуровневых задач, предложенная в [13, 14]. Эта методика представляется, на наш взгляд, наиболее привлекательной, поскольку, в отличие, например, от работы [10], для реализации метода не требуется никаких сложных операций и решения вспомогательных задач, кроме элементарных действий с матрицами и векторами.

2. Постановка задачи и идея метода генерации

Рассмотрим квадратично-линейную двухуровневую задачу с гарантированным решением в следующей постановке:

$$\left.\begin{aligned} W(x) \overset{\triangle}{=} \sup_y \big\{F(x,y) \mid y \in Y_*(x)\big\} \downarrow \min_x, \\ x \in X, \quad Y_*(x) \overset{\triangle}{=} \operatorname*{Argmin}_y \big\{G(y) \mid y \in Y(x)\big\}, \end{aligned}\right\} \qquad (\mathcal{BP})$$

где $F(x,y) \overset{\triangle}{=} \frac{1}{2}\langle x, Cx\rangle + \langle c, x\rangle - \frac{1}{2}\langle y, C_1 y\rangle + \langle c_1, y\rangle$, $G(y) = \langle d, y\rangle$, $X \overset{\triangle}{=} \big\{x \in \mathbb{R}^m \mid Ax \le a, x \ge 0\big\}$, $Y(x) \overset{\triangle}{=} \big\{y \in \mathbb{R}^n \mid A_1 x + B_1 y \le b,\ y \ge 0\big\}$, $A \in \mathbb{R}^{p\times m}$, $A_1 \in \mathbb{R}^{q\times m}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{q\times n}$, $c \in \mathbb{R}^m$, $c_1, d \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^p$, $b \in \mathbb{R}^q$; $C = C^\top \ge 0$, $C_1 = C_1^\top \ge 0$ — неотрицательно определенные матрицы; $W(x)$ — оценка эффективности стратегий игрока верхнего уровня [18]. Задачи такого вида исследовались с точки зрения построения методов решения, в частности, в [19, 20].

Необходимо отметить, что с точки зрения поиска гарантированного решения интерес представляют только двухуровневые задачи, в которых при определенных допустимых значениях $x \in X$ решение задачи нижнего уровня оказывается неединственным. Действительно, в противном случае имеем

$$\forall\, x \in X \quad Y_*(x) = \big\{y(x)\big\}, \quad y(x) : G(y(x)) < G(y) \quad \forall\, y \in Y(x),\ y \ne y(x),$$

и, значит, минимум и максимум функции $F(x,\cdot)$ на множестве $Y_*(x)$, состоящем из одной точки $y(x)$, будут совпадать:

$$W(x) \overset{\triangle}{=} \sup_y \big\{F(x,y) \mid y \in Y_*(x)\big\} = F(x, y(x)) = \inf_y \big\{F(x,y) \mid y \in Y_*(x)\big\}. \qquad (1)$$

Из цепочки равенств (1) можно сделать вывод, что вместо требуемой минимизации оценки эффективности $W(x)$ стратегии игрока верхнего уровня в этом случае можно осуществлять минимизацию его критерия эффективности $F(x,y)$ по совокупности переменных (x,y), т. е. искать оптимистическое решение рассматриваемой задачи [17].

Предлагаемый метод генерации тестовых задач вида $(\mathcal{BP})$ состоит их трех этапов. *Первый этап* генерации заключается в построении так называемых двухуровневых задач-ядер небольшой размерности (с неединственным решением на нижнем уровне) и в аналитическом отыскании всех их локальных и глобальных гарантированных решений.

На *втором этапе* путем объединения конечного количества задач-ядер с различными свойствами конструируется сепарабельная двухуровневая задача заданной размерности. Наконец, на *третьем этапе* метода генерации, для того чтобы избавиться от сепарабельности построенной задачи, производится специальная замена переменных. Опишем и обоснуем каждый из указанных этапов.

3. Задачи-ядра и их аналитическое решение

Введем в рассмотрение задачи-ядра следующего вида, вкладывающиеся в исследуемый класс двухуровневых задач:

$$\left.\begin{aligned} W(x) = \sup_y \left\{ x^2 - 8x + p_k y_1 - 2y_2^2 \ \mid\ y \in Y_*(x) \right\} \downarrow \min_x, \\ x \in [0;6], \quad Y_*(x) \stackrel{\triangle}{=} \operatorname*{Argmin}_y \left\{ -y_1 \ \mid\ y_1 + y_2 \le x,\ 0 \le y_1 \le 3,\ y_2 \ge 0 \right\}, \end{aligned}\right\} \qquad (\mathcal{KP}_k)$$

где $x \in \mathbb{R}$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, а p_k — некоторый вещественный параметр.

Заметим, что в отличие от задач-ядер из [13, 14], где переменные на обоих уровнях являются скалярными, в задачах вида $(\mathcal{KP}_k)$ на нижнем уровне потребовалось использование двух переменных, чтобы добиться неединственности решения соответствующей оптимизационной задачи.

Для отыскания решений задачи $(\mathcal{KP}_k)$ прежде всего представим множество $Y_*(x)$ решений задачи нижнего уровня при различных значениях $x \in [0;6]$ в явном виде. Рассмотрим отдельно задачу нижнего уровня, входящую в задачу $(\mathcal{KP}_k)$:

$$y_1 \uparrow \max_y, \quad y_1 + y_2 \le x,\ 0 \le y_1 \le 3,\ y_2 \ge 0. \qquad (\mathcal{FKP}(x))$$

Задача $(\mathcal{FKP}(x))$ представляет собой задачу линейного программирования (ЛП) в пространстве $\mathbb{R}^2$. Следовательно, ее решение можно провести графически [22].

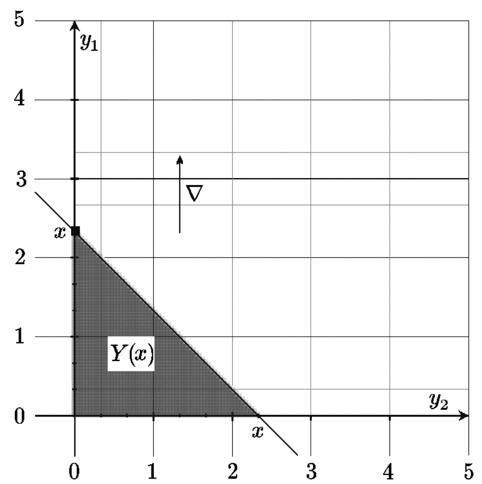

Рис. 1. $Y_*(x)$ при $x \le 3$

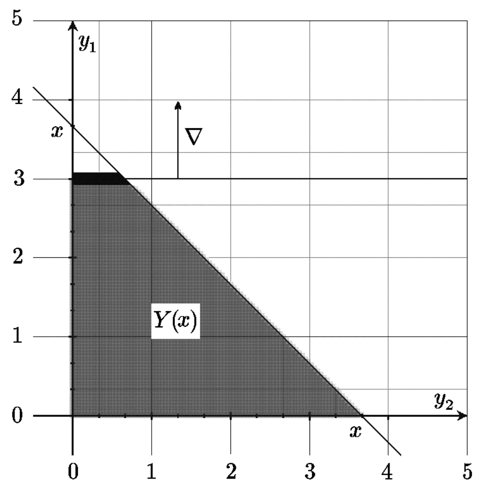

Рис. 2. $Y_*(x)$ при $x > 3$

На рисунках 1 и 2 допустимое множество задачи $(\mathcal{FKP}(x))$ обозначено через $Y(x)$, а вектор градиента целевой функции задачи $(\mathcal{FKP}(x))$ — через ∇. Нетрудно видеть, что при $x \in [0;3]$ множество $Y_*(x)$ решений задачи $(\mathcal{FKP}(x))$ состоит из одной точки $(y_1, y_2)=(x, 0)$, а при $x \in [3;6]$ оно представляет собой отрезок $\big\{(3, y_2) \mid 0 \le y_2 \le x-3\big\}$. Заметим, что при $x = 3$ этот отрезок вырождается в точку $(x, 0)$. Таким образом, множество решений задачи $(\mathcal{FKP}(x))$ имеет следующий вид:

$$Y_*(x) = \begin{cases} \big\{(x,0)\big\}, & \text{если } x \in [0;3], \\ \big\{(3, y_2) \ \mid \ 0 \le y_2 \le x - 3\big\}, & \text{если } x \in [3;6]. \end{cases} \tag{2}$$

Вернемся к решению задачи $(\mathcal{KP}_k)$. Используя представление (2) множества $Y_*(x)$, выражение для целевой функции задачи $(\mathcal{KP}_k)$ можно записать следующим образом:

$$W(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + p_k x, & \text{если } x \in [0;3], \\ \sup\limits_y \big\{x^2 - 8x + 3p_k - 2y_2^2 \ \mid \ 0 \le y_2 \le x - 3\big\}, & \text{если } x \in [3;6]. \end{cases} \tag{3}$$

Заметим, что функция, стоящая под знаком sup в выражении (3) при $x \in [3;6]$, убывает по $y_2 \ge 0$. Следовательно, ее точная верхняя грань достигается в точке $\hat{y}_2 = 0$:

$$\sup_y \big\{x^2 - 8x + 3p_k - 2y_2^2 \ \mid \ 0 \le y_2 \le x - 3\big\} = x^2 - 8x + 3p_k. \tag{4}$$

Объединяя (3) и (4), получаем выражение целевой функции $W(x)$ задачи $(\mathcal{KP}_k)$ в явном виде:

$$W(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + p_k x, & \text{если } x \in [0;3], \\ x^2 - 8x + 3p_k, & \text{если } x \in [3;6]. \end{cases}$$

Таким образом, $W(x)$ является непрерывной кусочно-квадратичной функцией. Можно показать, что при $p_k \in [2;8]$ задача имеет две стационарные точки: $\hat{x} = 4-0.5p_k \in [0;3]$, $\check{x} = 4 \in [3;6]$, а при других значениях p_k — одну стационарную точку $\check{x} = 4$. Ниже ограничимся рассмотрением трех фиксированных значений параметра $p_k = 3, 4, 6$ $(k = 1, 2, 3)$, которые лежат в отрезке $[2;8]$.

На рисунках 3, 4 и 5 изображены графики функции $W(x)$, соответствующие трем различным значениям параметра p_k : $p_1 = 3$, $p_2 = 4$, $p_3 = 6$. Нетрудно видеть, что задача $(\mathcal{KP}_1)$ (задача $(\mathcal{KP}_k)$ при $p_k = p_1$) имеет локальное решение в точке $\hat{x} = 2.5$ и глобальное решение в точке $\check{x} = 4$; задача $(\mathcal{KP}_2)$ имеет два глобальных решения в точках $\tilde{x} = 2$, $\check{x} = 4$ и не имеет локальных решений, не являющихся глобальными; задача $(\mathcal{KP}_3)$ имеет глобальное решение в точке $\overline{x} = 1$ и локальное решение в точке $\check{x} = 4$.

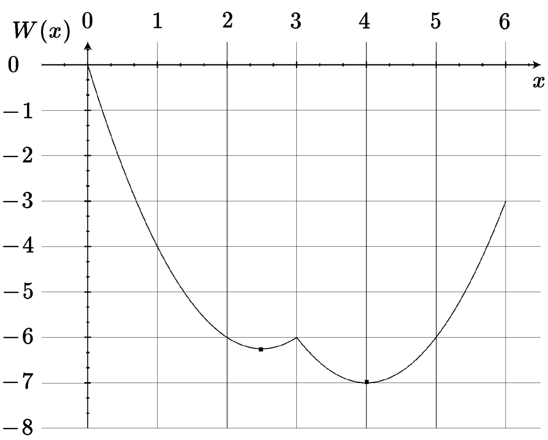

Рис. 3. $W(x)$ при $p_k = p_1 = 3$

Отметим что, выполняя действия, аналогичные описанным выше, можно отыскать и оптимистические решения в задачах $(\mathcal{KP}_k)$, однако это исследование лежит в стороне от предмета настоящей статьи и здесь не приводится.

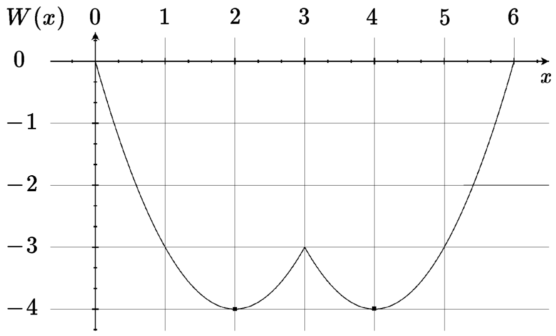

Рис. 4. $W(x)$ при $p_k = p_2 = 4$

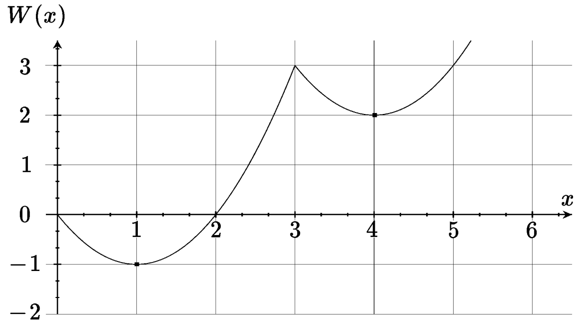

Рис. 5. $W(x)$ при $p_k = p_3 = 6$

4. Объединение задач-ядер и построение сепарабельной двухуровневой задачи

Рассмотрим двухуровневую задачу, полученную объединением произвольного числа r задач-ядер $(\mathcal{KP}_k)$, $k \in \{1, 2, 3\}$, которая принадлежит классу двухуровневых задач $(\mathcal{BP})$:

$$\left.\begin{aligned} &\sup_y \left\{ \sum_{i=1}^{r} F(x_i, y_{2i-1}, y_{2i}; \hat{p}_i) \mid \ y \in Y_*(x) \right\} \downarrow \min_x, \quad x \in \Pi[0;6], \\ &Y_*(x) \triangleq \operatorname*{Argmin}_y \left\{ \sum_{i=1}^{r} G(y_{2i-1}) \mid \ (y_{2i-1}, y_{2i}) \in Y(x_i), \ i = 1, \ldots, r \right\}, \end{aligned}\right\} \qquad (\mathcal{SP})$$

где $F(x_i, y_{2i-1}, y_{2i}; \hat{p}_i) \triangleq x_i^2 - 8x + \hat{p}_i y_{2i-1} - 2y_{2i}^2$, $\hat{p}_i \in \{p_1, p_2, p_3\}$, $G(y_{2i-1}) \triangleq -y_{2i-1}$, $\Pi[0;6] \triangleq \{x = (x_1, \ldots, x_r) \mid x_i \in [0;6], \ i = 1, \ldots, r\}$, $Y(x_i) \triangleq \{(y_1, y_2) \mid y_1 + y_2 \le x_i,$ $y_1 \le 3,\ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0\}$, $i = 1, \ldots, r$, $x \in \mathbb{R}^r$, $y \in \mathbb{R}^{2r}$.

Отметим, что структура задачи $(\mathcal{SP})$ такова, что количество переменных на нижнем уровне в два раза больше количества переменных на верхнем уровне. Подобное свойство не ограничивает разнообразие строящихся тестовых задач, поскольку это разнообразие дают различные значения параметра $\hat{p}_i$. Тем более, что подобная ситуация (когда на нижнем уровне количество переменных больше, чем на верхнем) естественна для практических иерархических задач, в которых на нижнем уровне зачастую моделируются несколько игроков, зависящих от верхнего уровня.

Далее заметим, что задача нижнего уровня двухуровневой задачи $(\mathcal{SP})$:

$$\sum_{i=1}^{r} G(y_{2i-1}) \downarrow \min_y, \quad (y_{2i-1}, y_{2i}) \in Y(x_i), \quad i = 1, \ldots, r, \qquad (\mathcal{FSP}(x))$$

является сепарабельной задачей оптимизации. Ее решение может быть найдено следующим образом (см. также [23]).

Лемма 1. *Вектор* $\hat{y} = (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_{2r})$ *является решением задачи* $(\mathcal{FSP}(x))$ *тогда и только тогда, когда его компоненты* $(\hat{y}_{2i-1}, \hat{y}_{2i})$ *— суть решения задач* $(\mathcal{FKP}(x_i))$, $i = 1, \ldots, r$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\hat{y} \in \mathrm{Sol}(\mathcal{FSP}(x))$, тогда имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^{r} G(\hat{y}_{2i-1}) \leq \sum_{i=1}^{r} G(y_{2i-1}) \quad \forall\, y : (y_{2i-1}, y_{2i}) \in Y(x_i),\ i = 1, \ldots, r. \tag{5}$$

Далее нетрудно видеть, что для произвольного индекса $j \in \{1, \ldots, r\}$ в силу раздельности ограничений векторы вида $y(y_{2j-1}, y_{2j}) := (\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_{2j-2}, y_{2j-1}, y_{2j}, \hat{y}_{2j+1}, \ldots, \hat{y}_{2r})$: $(y_{2j-1}, y_{2j}) \in Y(x_j)$ будут допустимыми в задаче $(\mathcal{FSP}(x))$. Следовательно, неравенство (5) остается справедливым при $y = y(y_{2j-1}, y_{2j})$:

$$\sum_{i=1}^{r} G(\hat{y}_{2i-1}) \leq G(y_{2j-1}) + \sum_{i \neq j} G(\hat{y}_{2i-1}) \quad \forall\, (y_{2j-1}, y_{2j}) \in Y(x_j). \tag{6}$$

Упрощая (6), получаем неравенство, равносильное включению

$$(\hat{y}_{2j-1}, \hat{y}_{2j}) \in \mathrm{Sol}(\mathcal{FKP}(x_j)).$$

Достаточность. Пусть имеют место включения $(\hat{y}_{2i-1}, \hat{y}_{2i}) \in \mathrm{Sol}(\mathcal{FKP}(x_i))\ \forall\, i = 1, \ldots, r$. Тогда точка $\hat{y}$ является допустимой в задаче $(\mathcal{FSP}(x))$, и имеют место неравенства:

$$G(\hat{y}_{2i-1}) \leq G(y_{2i-1}) \quad \forall\, (y_{2i-1}, y_{2i}) \in Y(x_i),\ i = 1, \ldots, r. \tag{7}$$

Суммируя неравенства (7) по i, получаем неравенство (5), которое, с учетом допустимости точки $\hat{y}$ в задаче $(\mathcal{FSP}(x))$, равносильно требуемому включению $\hat{y} \in \mathrm{Sol}(\mathcal{FSP}(x))$. $\square$

Для того, чтобы описать структуру локальных решений задачи $(\mathcal{SP})$, потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 2. *Для любых значений $x \in \Pi[0; 6]$ имеют место равенства*:

$$\sup_y \left\{ \sum_{i=1}^{r} F(x_i, y_{2i-1}, y_{2i}; \hat{p}_i) \mid y \in Y_*(x) \right\} = \max_y \left\{ \sum_{i=1}^{r} F(x_i, y_{2i-1}, y_{2i}; \hat{p}_i) \mid y \in Y_*(x) \right\}$$
$$= \sum_{i=1}^{r} \max_{(y_{2i-1}, y_{2i})} \big\{ F(x_i, y_{2i-1}, y_{2i}; \hat{p}_i) \mid (y_{2i-1}, y_{2i}) \in Y_*(x_i) \big\}. \tag{8}$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную задачу при $x \in \Pi[0; 6]$:

$$\sum_{i=1}^{r} F(x_i, y_{2i-1}, y_{2i}; \hat{p}_i) \uparrow \max_y, \quad y \in Y_*(x). \tag{$\mathcal{P}_1(x)$}$$

В силу леммы 1 включение $y \in Y_*(x)$ равносильно включениям $(y_{2i-1}, y_{2i}) \in Y_*(x_i)$ $\forall\, i = 1, \ldots, r$, поэтому задача $(\mathcal{P}_1(x))$ может быть записана в виде следующей эквивалентной задачи сепарабельной оптимизации:

$$\sum_{i=1}^{r} F(x_i, y_{2i-1}, y_{2i}; \hat{p}_i) \uparrow \max_y, \quad (y_{2i-1}, y_{2i}) \in Y_*(x_i),\ i = 1, \ldots, r, \tag{$\mathcal{P}_1(x)$}$$

для которой можно доказать аналогичное лемме 1 утверждение: $\hat{y} \in \mathrm{Sol}(\mathcal{P}_1(x))$ тогда и только тогда, когда $(\hat{y}_{2i-1}, \hat{y}_{2i}) \in \mathrm{Argmax}_{(y_{2i-1}, y_{2i})} \big\{ F(x_i, y_{2i-1}, y_{2i}; \hat{p}_i) \mid (y_{2i-1}, y_{2i}) \in Y_*(x_i) \big\}\ \forall\, i = 1, \ldots, r$.

Последнее включение влечет выполнение второго равенства в (8).

Первое же равенство в (8) справедливо в силу структуры множества $Y_*(x_i)$ решений задач $(\mathcal{FKP}(x_i))$, $i = 1, \ldots, r$, которое в зависимости от выбора значения $x_i \in [0; 6]$ представляет собой либо точку, либо отрезок (непустое компактное множество), следовательно, точная верхняя грань в (8) достигается. □

Замечание. В силу первого равенства из (8) задачу $(\mathcal{SP})$ можно записать в виде

$$\left.\begin{array}{r} \max\limits_{y}\left\{\sum\limits_{i=1}^{r} F(x_i, y_{2i-1}, y_{2i}; \hat{p}_i) \mid y \in Y_*(x)\right\} \downarrow \min\limits_{x}, \\ x \in \Pi[0;6],\ Y_*(x) \overset{\triangle}{=} \operatorname*{Argmin}\limits_{y}\left\{\sum\limits_{i=1}^{r} G(y_{2i-1}) \mid (y_{2i-1}, y_{2i}) \in Y(x_i),\ i = 1, \ldots, r\right\}. \end{array}\right\} \quad (\mathcal{SP})$$

Предложение 1. *Точка* $\hat{x} \in \mathbb{R}^r$ *является локальным решением задачи* $(\mathcal{SP})$ $(\hat{x} \in \mathrm{LocSol}(\mathcal{SP}))$ *тогда и только тогда, когда ее компоненты* $\hat{x}_i$ *являются локальными решениями задач* $(\mathcal{KP}_k)$, *соответствующих значениям* $p_k = \hat{p}_i$, $i = 1, \ldots, r$, *использованных при построении задачи* $(\mathcal{SP})$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\hat{x} \in \Pi[0;6]$ и $\exists\, \varepsilon > 0$ такое, что для всех $x \in \Pi[0;6] \cap U(\hat{x}, \varepsilon)$, где $U(\hat{x}, \varepsilon) \overset{\triangle}{=} \{x \mid \ \|x - \hat{x}\| \le \varepsilon\}$, имеет место неравенство

$$\max_{y}\left\{\sum_{i=1}^{r} F(\hat{x}_i, y_{2i-1}, y_{2i}; \hat{p}_i) \mid y \in Y_*(\hat{x})\right\} \le \max_{y}\left\{\sum_{i=1}^{r} F(x_i, y_{2i-1}, y_{2i}; \hat{p}_i) \mid y \in Y_*(x)\right\}. \quad (9)$$

С использованием второго равенства в (8) (см. лемму 2) неравенство (9) можно переписать покомпонентно, внося знаки “max” под сумму. С учетом того, что это неравенство верно $\forall\, x \in \Pi[0;6]$: $\|x - \hat{x}\| \le \varepsilon$, полагаем $x_i = \hat{x}_i$, $i \ne j$, где $j \in \{1, \ldots, r\}$ — некоторый фиксированный индекс. В результате получаем

$$\begin{gathered} \forall\, x_j \in [0;6] : |x_j - \hat{x}_j| \le \varepsilon \\ \max_{(y_{2j-1}, y_{2j})} \left\{F(\hat{x}_j, y_{2j-1}, y_{2j}; \hat{p}_j) \mid (y_{2j-1}, y_{2j}) \in Y_*(\hat{x}_j)\right\} \\ \le \max_{(y_{2j-1}, y_{2j})} \left\{F(x_j, y_{2j-1}, y_{2j}; \hat{p}_j) \mid (y_{2j-1}, y_{2j}) \in Y_*(x_j)\right\}, \end{gathered} \quad (10)$$

что, с учетом произвольности выбора $j \in \{1, \ldots, r\}$, равносильно выполнению включений $\hat{x}_i \in \mathrm{LocSol}(\mathcal{KP}_k)$, $p_k = \hat{p}_i$, $i = 1, \ldots, r$.

Достаточность. Пусть теперь $\hat{x}_i \in \mathrm{LocSol}(\mathcal{KP}_k)$, $k : p_k = \hat{p}_i$, $i = 1, \ldots, r$, или, что то же самое, $\hat{x}_j \in [0;6]$ и $\forall j \in \{1, \ldots, r\}$ при $\varepsilon = \varepsilon_j$ имеет место неравенство (10). Полагая $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r\}$ и суммируя неравенства (10) по j, получаем

$$\begin{gathered} \forall\, x \in \Pi[0;6] :\ |x_j - \hat{x}_j| \le \varepsilon,\ j = 1, \ldots, r, \\ \sum_{j=1}^{r} \max_{(y_{2j-1}, y_{2j})} \left\{F(\hat{x}_j, y_{2j-1}, y_{2j}; \hat{p}_j) \mid (y_{2j-1}, y_{2j}) \in Y_*(\hat{x}_j)\right\} \\ \le \sum_{j=1}^{r} \max_{(y_{2j-1}, y_{2j})} \left\{F(x_j, y_{2j-1}, y_{2j}; \hat{p}_j) \mid (y_{2j-1}, y_{2j}) \in Y_*(x_j)\right\}. \end{gathered}$$

Отсюда с учетом леммы 2 заключаем, что $\forall\, x \in \Pi[0;6] : |x_i - \hat{x}_i| \le \varepsilon$, $i = 1, \ldots, r$, имеет место неравенство (9). Далее, с учетом определения евклидовой нормы, нетрудно видеть, что

$$U(\hat{x},\varepsilon) \subset \big\{x \mid \ |x_i - \hat{x}_i| \le \varepsilon,\ i = 1,\ldots,r\big\}.$$

Следовательно, неравенство (9) справедливо и $\forall\, x \in \Pi[0;6] \cap U(\hat{x},\varepsilon)$. Другими словами, имеет место включение $\hat{x} \in \mathrm{LocSol}(\mathcal{SP})$. □

Отметим, что для глобальных решений задачи $(\mathcal{SP})$ имеет место утверждение, аналогичное предложению 1.

Предложение 2. *Точка $\hat{x} \in \mathbb{R}^r$ является (глобальным) решением задачи $(\mathcal{SP})$ тогда и только тогда, когда ее компоненты $\hat{x}_i$ являются решениями задач $(\mathcal{KP}_k)$, соответствующих значениям параметров $p_k = \hat{p}_i$, $i = 1,\ldots,r$, использованных при построении задачи $(\mathcal{SP})$.*

Для доказательства достаточно положить $\varepsilon = +\infty$ в доказательстве предложения 1 и считать, что $U(\hat{x},\varepsilon) = \mathbb{R}^r$. □

Следующее предложение описывает зависимость количества локальных и глобальных решений задачи $(\mathcal{SP})$ от того набора задач $(\mathcal{KP}_k)$, который был использован при ее построении.

Предложение 3. *Задача $(\mathcal{SP})$, в которую входит r_1 задач-ядер вида $(\mathcal{KP}_1)$, r_2 задач-ядер вида $(\mathcal{KP}_2)$ и r_3 задач-ядер вида $(\mathcal{KP}_3)$, так что $r_1 + r_2 + r_3 = r$, имеет 2^r локальных решений, из которых 2^{r_2} являются ее глобальными решениями.*

Доказательство. В силу предложения 1 каждое локальное решение задачи $(\mathcal{SP})$ представимо в виде $\hat{x} = (\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_r)$, где $\hat{x}_i$ — некоторое локальное решение задачи $(\mathcal{KP}_k)$ при $p_k = \hat{p}_i$, $i = 1,\ldots,r$. Учитывая, что компоненты вектора $\hat{x}$ не зависят друг от друга и каждая задача-ядро $(\mathcal{KP}_k)$ имеет ровно два локальных решения, по правилу прямого произведения (см., например, [24]) получаем, что в задаче $(\mathcal{SP})$ существует ровно 2^r локальных решений.

Аналогично, в силу предложения 2 каждое глобальное решение задачи $(\mathcal{SP})$ представимо в виде $x_* = (x_1^*,\ldots,x_r^*)$. При этом $r_1 + r_3$ компонент вектора x_* фиксированы, поскольку задачи-ядра $(\mathcal{KP}_1)$ и $(\mathcal{KP}_3)$ имеют по одному глобальному решению. Каждая же из оставшихся r_2 компонент вектора x_* может принимать два различных значения. Применяя правило прямого произведения, как и выше, заключаем, что задача $(\mathcal{SP})$ имеет ровно 2^{r_2} глобальных решений. □

5. Преобразование сепарабельной задачи

На заключительном этапе метода генерации с целью увеличения разнообразия конструируемых задач вида $(\mathcal{BP})$ необходимо избавиться от сепарабельности. Для этого осуществляется подстановка $x = M_x M_x^{-1} x$, $y = M_y M_y^{-1} y$, где $M_x \in \mathbb{R}^{m\times m} : \det M_x \ne 0$, $M_y \in \mathbb{R}^{n\times n} : \det M_y \ne 0$ (для задачи $(\mathcal{SP})$ $m = r$, $n = 2r$), и производится замена переменных $z = M_x^{-1} x$, $u = M_y^{-1} y$. Осуществляя описанное преобразование с произвольной задачей класса $(\mathcal{BP})$, получаем задачу:

$$\sup_u \Big\{F'(z,u) \,|\, u \in Y'_*(z)\Big\} \downarrow \min_z, \quad z \in X', \quad Y'_*(z) \stackrel{\triangle}{=} \operatorname*{Argmin}_u \Big\{\big\langle M_y^\top d, u\big\rangle \,|\, u \in Y'(z)\Big\}, \quad (\mathcal{BP}')$$

где $F'(z,u) \stackrel{\triangle}{=} \frac{1}{2}\big\langle z, M_x^\top C M_x z\big\rangle + \big\langle M_x^\top c, z\big\rangle - \frac{1}{2}\big\langle u, M_y^\top C_1 M_y u\big\rangle + \big\langle M_y^\top c_1, u\big\rangle$, $X' \stackrel{\triangle}{=} \big\{z \in \mathbb{R}^m \mid AM_x z \le a,\ M_x z \ge 0\big\}$, $Y'(z) \stackrel{\triangle}{=} \big\{y \in \mathbb{R}^n \mid A_1 M_x z + B_1 M_y u \le b,\ M_y u \ge 0\big\}$.

Пользуясь стандартными определениями линейной алгебры, нетрудно показать, что преобразования $M_x^\top C M_x$ и $M_y^\top C_1 M_y$ оставляют матрицы C и C_1 неотрицательно определенными. Следовательно, полученная в результате замены переменных задача $(\mathcal{BP}')$ остается в классе квадратично-линейных двухуровневых задач $(\mathcal{BP})$. Для установления взаимосвязи между решениями (локальными и глобальными) исходной задачи $(\mathcal{BP})$ и преобразованной задачи $(\mathcal{BP}')$ потребуются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 3. *Справедливы следующие соотношения*:

i) $x \in X \Leftrightarrow M_x^{-1} x \in X'$,

ii) $y \in Y(x) \Leftrightarrow M_y^{-1} y \in Y'(M_x^{-1} x)$,

iii) $y \in Y_*(x) \Leftrightarrow M_y^{-1} y \in Y'_*(M_x^{-1} x)$.

Доказательство. **i)** пользуясь определением множества X и очевидным равенством $E = M_x M_x^{-1}$, можно переписать включение $x \in X$ в виде $x \in \big\{x \mid AM_x M_x^{-1} x \le a,\ M_x M_x^{-1} x \ge 0\big\}$, что по определению множества X' равносильно включению $M_x^{-1} x \in X'$.

ii) доказывается аналогично.

iii) пусть $\hat{y} \in Y_*(x)$. Тогда $\big\langle d, M_y M_y^{-1} \hat{y}\big\rangle \le \big\langle d, M_y M_y^{-1} y\big\rangle\ \forall\, y \in Y(x)$. Пользуясь свойством скалярного произведения и пунктом **ii)** этой леммы, из последнего неравенства получаем $\big\langle M_y^\top d, M_y^{-1} \hat{y}\big\rangle \le \big\langle M_y d, M_y^{-1} y\big\rangle\ \forall\, (M_y^{-1} y) \in Y(M_x^{-1} x)$, что равносильно включению $M_y^{-1} \hat{y} \in Y'_*(M_x^{-1} x)$. $\square$

Лемма 4. *При согласованности матричной и векторной норм и произвольном выборе* $\varepsilon > 0$:

i) $\big(M_x^{-1} x\big) \in U\big(M_x^{-1} \hat{x}, \varepsilon/\|M_x\|\big) \Rightarrow x \in U(\hat{x}, \varepsilon)$,

ii) $x \in U\big(\hat{x}, \varepsilon/\big\|M_x^{-1}\big\|\big) \Rightarrow \big(M_x^{-1} x\big) \in U\big(M_x^{-1} \hat{x}, \varepsilon\big)$.

Другими словами, точка x лежит в окрестности точки $\hat{x}$ тогда и только тогда, когда точка $M_x^{-1} x$ принадлежит некоторой окрестности точки $M_x^{-1} \hat{x}$.

Доказательство. **i)** пусть $\big(M_x^{-1} x\big) \in U\big(M_x^{-1} \hat{x}, \varepsilon/\|M_x\|\big)$. Тогда $\big\|M_x^{-1} x - M_x^{-1} \hat{x}\big\| \le \varepsilon/\|M_x\|$. С учетом согласованности матричной и векторной норм из последнего неравенства получаем

$$\big\|M_x\big(M_x^{-1} x - M_x^{-1} \hat{x}\big)\big\| \le \|M_x\|\, \big\|M_x^{-1} x - M_x^{-1} \hat{x}\big\| \le \|M_x\| \frac{\varepsilon}{\|M_x\|}. \tag{11}$$

Из цепочки (11) следует неравенство $\|x - \hat{x}\| \le \varepsilon$, что равносильно включению $x \in U(\hat{x}, \varepsilon)$.

ii) доказывается аналогично. $\square$

Следующее предложение обосновывает переход от задачи $(\mathcal{SP})$ (принадлежащей к классу двухуровневых задач $(\mathcal{BP})$) к задаче $(\mathcal{BP}')$, что позволяет избавиться от сепарабельности.

Предложение 4. *Точка $\hat{x}$ является локальным (глобальным) решением задачи $(\mathcal{BP})$ тогда и только тогда, когда точка $M_x^{-1} \hat{x}$ является локальным (глобальным) решением задачи $(\mathcal{BP}')$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\hat{x} \in \mathrm{LocSol}(\mathcal{BP})$, тогда $\hat{x} \in X$ и, кроме того, $\exists\, \varepsilon > 0$:

$$\sup_y \big\{F(\hat{x},y) \mid y \in Y_*(\hat{x})\big\} \le \sup_y \big\{F(x,y) \mid y \in Y_*(x)\big\} \qquad \forall\, x \in X \cap U(\hat{x},\varepsilon). \tag{12}$$

В силу пункта **i)** леммы 3 точка $M_x^{-1}\hat{x}$ является допустимой точкой в задаче $(\mathcal{BP}')$.

Далее, используя очевидное равенство $F'\big(M_x^{-1}x, M_y^{-1}y\big) \overset{\triangle}{=} F(x,y)$ и лемму 3, перепишем (12) в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\forall\, x \in U(\hat{x},\varepsilon):\ M_x^{-1}x \in X' \\ &\sup_y \big\{F'\big(M_x^{-1}\hat{x}, M_y^{-1}y\big) \ \mid\ M_y^{-1}y \in Y'_*\big(M_x^{-1}\hat{x}\big)\big\} \\ &\qquad \le \sup_y \big\{F'\big(M_x^{-1}x, M_y^{-1}y\big) \ \mid\ M_y^{-1}y \in Y'_*\big(M_x^{-1}x\big)\big\}. \end{aligned} \tag{13}$$

Пользуясь пунктом **i)** леммы 4, из (13) получаем

$$\begin{aligned} &\forall\, \big(M_x^{-1}x\big) \in U\bigg(M_x^{-1}\hat{x}, \frac{\varepsilon}{\|M_x\|}\bigg):\ M_x^{-1}x \in X' \\ &\sup_y \big\{F'\big(M_x^{-1}\hat{x}, M_y^{-1}y\big) \mid\ M_y^{-1}y \in Y'_*\big(M_x^{-1}\hat{x}\big)\big\} \\ &\qquad \le \sup_y \big\{F'\big(M_x^{-1}x, M_y^{-1}y\big) \mid\ M_y^{-1}y \in Y'_*\big(M_x^{-1}x\big)\big\}. \end{aligned} \tag{14}$$

Производя замену переменных $z = M_x^{-1}x$, $u = M_y^{-1}y$ в (14), получим

$$\begin{gathered} \forall\, z \in U\bigg(M_x^{-1}\hat{x}, \frac{\varepsilon}{\|M_x\|}\bigg) \cap X' \\ \sup_u \big\{F'\big(M_x^{-1}\hat{x}, u\big) \mid\ u \in Y'_*\big(M_x^{-1}\hat{x}\big)\big\} \le \sup_u \big\{F'(z,u) \mid\ u \in Y'_*(z)\big\}. \end{gathered}$$

Следовательно, $M_x^{-1}\hat{x} \in \mathrm{LocSol}(\mathcal{BP}')$.

Достаточность. Теперь предположим, что $M_x^{-1}\hat{x} \in \mathrm{LocSol}(\mathcal{BP}')$, тогда $M_x^{-1}\hat{x} \in X'$ и $\exists\, \varepsilon > 0$:

$$\begin{gathered} \forall\, z \in U\big(M_x^{-1}\hat{x}, \varepsilon\big) \cap X' \\ \sup_u \big\{F'\big(M_x^{-1}\hat{x}, u\big) \mid\ u \in Y'_*\big(M_x^{-1}\hat{x}\big)\big\} \le \sup_u \big\{F'(z,u) \mid\ u \in Y'_*(z)\big\}. \end{gathered} \tag{15}$$

По лемме 3 из включения $M_x^{-1}\hat{x} \in X'$ следует допустимость точки $\hat{x}$ в задаче $(\mathcal{BP})$. Далее, осуществляя замену переменных $z = M_x^{-1}x$, $u = M_y^{-1}y$ и используя лемму 3 и пункт **ii)** леммы 4 так же, как и при доказательстве необходимости, из (15) получаем

$$\sup_y \big\{F(\hat{x},y) \mid\ y \in Y_*(\hat{x})\big\} \le \sup_y \big\{F(x,y) \mid\ y \in Y_*(x)\big\} \quad \forall\, x \in U\bigg(\hat{x}, \frac{\varepsilon}{\big\|M_x^{-1}\big\|}\bigg) \cap X.$$

Таким образом, $\hat{x} \in \mathrm{LocSol}(\mathcal{BP})$.

Наконец, отметим, что для доказательства взаимосвязи глобальных решений задач $(\mathcal{BP})$ и $(\mathcal{BP}')$ в приведенном выше доказательстве достаточно положить $\varepsilon = +\infty$ и считать, что $U(\hat{x},\varepsilon) = \mathbb{R}^m$. $\square$

Следствие. *Количество локальных (глобальных) решений задачи $(\mathcal{BP}')$ совпадает с количеством локальных (глобальных) решений задачи $(\mathcal{BP})$.*

Опишем один из способов построения матриц M_x и M_y, предложенный в [13, 14]. Пусть $M_x := H_x D_x H_x$, $M_y := H_y D_y H_y$, где D_x, D_y — произвольные положительно определенные диагональные матрицы, $H_x \triangleq E - 2v_x v_x^\top$, $H_y \triangleq E - 2v_y v_y^\top$ — матрицы Хаусхолдера (матрицы отражения) [25]. Здесь $v_x \in \mathbb{R}^m, v_y \in \mathbb{R}^n$ — векторы, такие что $\|v_x\| = \|v_y\| = 1$.

В силу равенства $v_x^\top v_x = \|v_x\|^2 = 1$ имеет место следующая цепочка:

$$H_x H_x = \left(E - 2v_x v_x^\top\right)\left(E - 2v_x v_x^\top\right) = E - 4v_x v_x^\top + 4v_x v_x^\top v_x v_x^\top = E.$$

Аналогичные равенства справедливы и для v_y. Поэтому обратные для M_x и M_y матрицы могут быть в этом случае вычислены по формулам: $M_x^{-1} = H_x D_x^{-1} H_x$, $M_y^{-1} = H_y D_y^{-1} H_y$.

Итак, все необходимые элементы метода генерации описаны. Выбирая значения r_1, r_2, r_3 для того, чтобы задать количество задач-ядер каждого класса в “большой” задаче, и действуя в соответствии с описанными этапами, можно добиться как относительной простоты получаемой задачи (напр., при $r_1 = r_3 = 0$ каждое ее локальное решение будет глобальным решением в силу предложения 3 и следствия), так и высокой сложности этой задачи (количество ее локальных решений, не являющихся глобальными, по предложению 3 и следствию равно $2^r - 2^{r_2}$, т. е. зависит от r экспоненциально). При этом можно построить произвольное количество различных задач желаемой сложности путем выбора диагональных матриц D_x, D_y и векторов v_x, v_y с помощью любого генератора псевдослучайных чисел.

6. Заключение

Подводя итоги работы, отметим, что предложенный в работе метод весьма прост в реализации, поскольку включает только элементарные действия с матрицами и векторами. При этом построенные тестовые задачи могут быть представлены достаточно компактно. В то же время, поскольку метод позволяет строить двухуровневые задачи произвольной размерности с известными гарантированными (глобальными) решениями и очень большим количеством локальных решений, не являющихся глобальными, то, можно сказать, что моделируются типовые трудности задач исследуемого класса. Следовательно, можно сделать вывод о том, что тестовые задачи, сгенерированные с помощью разработанного метода, будут удовлетворять основным требованиям, предъявляемым к тестовым задачам [1].

Литература

1. **Поляк Б.Т.** Введение в оптимизацию. — М.: Наука, 1983.
2. **Стрекаловский А.С., Орлов А.В.** Биматричные игры и билинейное программирование. — М.: Физматлит, 2007.
3. DIMACS Implementation Challenges. — URL: http://dimacs.rutgers.edu/Challenges/.
4. **Hock W., Schittkowski K.** Test Examples for Nonlinear Programming Codes. — Berlin etc.: Springer-Verlag, 1981. — (Lect. Notes in Economics and Math. Systems; 187).
5. **Schittkowski K.** More Test Examples for Nonlinear Programming Codes — Berlin etc.: Springer-Verlag, 1987. — (Lect. Notes in Economics and Math. Systems; 282).
6. **Floudas C.A., Pardalos P.M.** A Collection of Test Problems for Constrained Global Optimization Algorithms. — Berlin etc.: Springer-Verlag, 1990. — (Lect. Notes in Economics and Math. Systems; 455).

7. Sven Leyffer's Test Problems. — URL: http://wiki.mcs.anl.gov/leyffer/index.php/Sven_Leyffer's_Test_Problems.
8. **Moshirvaziri K.** Construction of test problem for a class of reverse convex program // J. of Optimization Theory and Applications. — 1994. — Vol. 81, № 2. — P. 343–354.
9. **Moshirvaziri K.** Generalization of the construction of test problems for nonconvex optimization // J. of Global Optimization. — 1994. — Vol. 5, № 1. — P. 21–34.
10. **Moshirvaziri K., Amouzegar M.A., and Jacobsen S.E.** Test problem construction for linear bilevel programming problem // J. of Global Optimization. — 1996. — Vol. 8. — P. 235–243.
11. **Moshirvaziri K.** Construction of test problems for concave minimization under linear and nonlinear constraints // J. of Optimization Theory and Applications. — 1998. — Vol. 98, № 1. — P. 83–108.
12. **Vicente L., Calamai P., and Judice J.** Generation of disjointly constrained bilinear programing test problems // Computational Optimization and applications. — 1992. — Vol. 1, № 3. — P. 299–306.
13. **Calamai P., Vicente L.** Generating linear and linear-quadratic bilevel programming problems // SIAM J. on Scientific Computing. — 1993. — Vol. 14, № 4. — P. 770–782. — (Archive).
14. **Calamai P., Vicente L.** Generating quadratic bilevel programming test problems // ACM Transactions on Mathematical Software. — 1994. — Vol. 20. — P. 103–119.
15. **Vicente L., Calamai P., and Judice J.** A new technique for generating quadratic test problems // Mathematical programming. — 1993. — Vol. 61. — P. 215–231.
16. **Gaviano M., Kvasov D.E., Lera D., and Sergeyev Y.D.** Algorithm 829: Software for generation of classes of test functions with known local and global minima for global optimization // ACM Transactions on Mathematical Software. — 2003. — Vol. 29, № 4. — P. 469–480.
17. **Dempe S.** Foundations of Bilevel Programming. — Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2002.
18. **Гермейер Ю.Б.** Игры с непротивоположными интересами. — М.: Наука, 1976.
19. **Малышев А.В., Стрекаловский А.С.** О взаимосвязи некоторых задач двухуровневой и нелинейной оптимизации // Известия вузов. Математика. — 2011. — № 4. — С. 99–103.
20. **Малышев А.В., Стрекаловский А.С.** Глобальный поиск гарантированных решений в квадратично-линейных задачах двухуровневой оптимизации // Известия Иркутского государственного университета. Математика. — 2011. — Т. 4, № 1. — С. 73–82.
21. **Wiesemann W., Tsoukalas A., Kleniati P.-M., and Rustem B.** Pessimistic bilevel optimization // SIAM J. on Optimization. — 2013. — Vol. 23, № 1. — P. 353–380.
22. **Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю.** Линейное программирование. — М.: Факториал, 1998.
23. **Базара М., Шетти К.** Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. — М.: Мир, 1982.
24. **Иванов Б.Н.** Дискретная математика. Алгоритмы и программы: Учеб. пособие. — М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002.
25. **Калиткин Н.Н.** Численные методы. — М.: Гл. ред. физ.-мат. лит. изд-ва “Наука”, 1978.

Поступила в редакцию 15 мая 2013 г.