ПМТФ, № 1, 1962

ОБ ИЗОТЕРМИЧЕСКОМ УСКОРЕНИИ ОДНОМЕРНОГО ПОТОКА ПЛАЗМЫ ВО ВНЕШНИХ ПОПЕРЕЧНЫХ ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ И ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЯХ

В. М. Сарычев

(*Новосибирск*)

Ускорение одномерного потока плазмы во внешних поперечных электрическом и магнитном полях рассматривалось в работах [1-3].

Ниже в предположении применимости одномерных уравнений сплошных сред рассматривается изотермическое ускорение плазмы во внешних поперечных однородном магнитном и электрическом полях в двух частных случаях: а) при постоянной по длине канала плотности тока и б) в канале с постоянным углом расширения. Рассматривается также изотермическое ускорение плазмы в тепловом сопле. Исследование проводится для двух видов зависимости проводимости плазмы от ее плотности.

1. Система уравнений. Пусть

$$\mathbf{u} = (u, 0, 0), \qquad \mathbf{E} = (0, E, 0), \qquad \mathbf{H} = (0, 0, H)_0$$

Для простоты будем рассматривать движение плазмы в плоском канале. Движение плазмы описывается системой уравнений

$$\rho u b = \rho_0 u_0 b_0, \qquad p = \rho R T, \qquad \rho u \frac{du}{dx} + \frac{dp}{dx} = \frac{jH_0}{c}$$
$$\rho u^2 \frac{du}{dx} = jE, \qquad j = \sigma\left(E - \frac{uH_0}{c}\right) \tag{1.1}$$

В случае однородной слабо ионизованной плазмы степень ее равновесной термической ионизации в соответствии с уравнением Саха будет обратно пропорциональна квадратному корню из плотности плазмы

$$\alpha = \frac{n_e}{n_n} \sim \frac{1}{\sqrt{\rho}} \tag{1.2}$$

Если взаимодействием электронов с ионами можно пренебречь по сравнению с взаимодействием электронов с нейтральными частицами ($n_e S_{ei} \ll n_n S_{en}$), то проводимость изотропной плазмы $\sigma \sim \alpha$ и, следовательно,

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{\sqrt{\rho}} \tag{1.3}$$

Для повышения проводимости газов с высоким потенциалом ионизации в них вводят небольшие добавки веществ с низким потенциалом ионизации — обычно щелочные металлы. Если при этом температура плазмы и ее состав таковы, что газ с высоким потенциалом ионизации не ионизован, а вещество с низким потенциалом ионизации ионизовано практически полностью, то проводимость такой плазмы не будет зависеть от ее плотности.

В качестве масштабов давления, плотности и скорости плазмы, плотности тока, напряженности электрического поля и проводимости плазмы возьмем значения этих величин в сечении $x = 0$, обозначая их соответственно через p_0, ρ_0, u_0, j_0, E_0 и σ_0. За масштаб длины возьмем ширину канала в сечении $x = 0 - b_0$.

Ниже всюду без особых обозначений употребляются *безразмерные* переменные.

2. Ускорение потока плазмы при постоянной вдоль канала плотности тока. Рассмотрим случай, когда $\sigma = 1$.

Решая систему (1.1) при постоянных σ и j, получим

$$E = \frac{M / M_0 + A_0}{1 + A_0} \qquad \left(M = \frac{u}{\sqrt{RT_0}}, A_0 = \frac{cj_0}{\sigma_0 u_0 H_0}, Q_0 = \frac{j_0 H_0 b_0}{p_0 c}\right)$$

$$p = \rho = \frac{M_0}{Mb} = \left(\frac{M / M_0 + A_0}{1 + A_0}\right)^{A_0^2 M_0^2} \exp\left[- A_0 M_0 (M - M_0)\right]$$

$$x = \frac{M_0 \exp (A_0 M_0^2)}{Q_0 (1 + A_0)^{A_0^2 M_0^2}} \int\limits_1^{M/M_0} \left(\frac{M}{M_0}\right)^2 \left(\frac{M}{M_0} + A_0\right)^{A_0^2 M_0^2 - 1} \exp (- A_0 M_0 M)\, dM \qquad (2.1)$$

Здесь M — число Маха для изотермического течения, A_0 и Q_0 — произвольные безразмерные параметры. Из анализа формул (2.1) следует, что рассматриваемая задача не имеет решения при $-M / M_0 \leqslant A_0 \leqslant -1$; кроме того, $Q_0 \to 0$ и $x \to \infty$ при $A_0 \to 0$. Так как

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d\rho}{dx} = - \frac{A_0 Q_0 M_0}{M}$$

то p и ρ при ускорении плазмы монотонно убывают.

Для угла расширения канала будем иметь (2.2)

$$\frac{db}{dx} = \frac{Q_0 M_0^2}{M^4} \left(\frac{1 + A_0}{M / M_0 + A_0}\right)^{2A_0^2 M_0^2} \left[A_0 (M^2 - 1) - \frac{M}{M_0}\right] \exp\left[2A_0 M_0 (M - M_0)\right]$$

Отсюда следует, что до значений $M / M_0 = (1 + \sqrt{1 + 4A_0^2 M_0^2}) / 2A_0 M_0^2$ ускорение плазмы происходит в сужающемся канале, а при больших числах Маха — в расширяющемся канале. Если $A_0 \geqslant (M_0^2 - 1)^{-1}$, то ускорение происходит в расширяющемся канале во всем диапазоне M.

3. Ускорение потока плазмы в равномерно расширяющемся канале. В этом случае (θ — угол расширения канала)

$$b = 1 + \chi x, \qquad \chi = 2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} \qquad (3.1)$$

а) Рассмотрим случай $\sigma = 1$. Исключая из уравнений (1.1) и (3.1) величины p, ρ, b, E и du / dx, для плотности тока получим

$$j = \frac{1}{2A_0 M_0} \frac{M}{M^2 - 1} \left\{1 + \left[1 + 4\chi \frac{A_0 M_0^2 (M^2 - 1)}{Q_0 (1 + \chi x)^2}\right]^{1/2}\right\} \qquad (3.2)$$

Отсюда следует, что при ускорении плазмы j монотонно убывает. В точке $M = 1$ величина j принимает бесконечное значение. Поэтому в рассматриваемом случае нельзя осуществить непрерывное ускорение потока плазмы через эту точку. При

$$M^2 < 1 - \frac{Q_0 (1 + \chi x)^2}{4\chi A_0 M_0^2}$$

рассматриваемая задача не имеет решения; при $x = 0$

$$M_0 = \sqrt{(A_0 + 1) / (A_0 - \chi / Q_0)} \qquad (3.3)$$

Это соотношение между параметрами не может выполняться (а следовательно, и данная задача не имеет решения) при $-1 < A_0 < \chi / Q_0$.

При заданных величинах A_0 и Q_0 величину M_0 можно уменьшить, уменьшая χ в случае $A_0 > \chi / Q_0$ и увеличивая χ в случае $A_0 < -1$.

Если $M < 1$, то задача имеет решение только при $A_0 < 0$. В этом случае $j < 0$, а из (3.3) имеем $Q < -M_0^2 \chi$. Если $M > 1$, то задача имеет решение только при $A_0 > 0$. В этом случае $j > 0$ и $Q_0 > 0$.

Разрешая исходную систему уравнений относительно M, получим

$$\frac{1}{M} \frac{dM}{dx} = \frac{\chi}{(1 + \chi x)(M^2 - 1)} + \frac{Q_0 M^2 (1 + \chi x)}{2A_0 M_0^2 (M^2 - 1)^2} \left\{1 + \left[1 + \frac{4\chi A_0 M_0^2 (M^2 - 1)}{Q_0 (1 + \chi x)^2}\right]^{1/2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{M^2 - 1} \left[\frac{\chi}{1 + \chi x} + Q_0 (1 + \chi x) \frac{M}{M_0} j\right] \qquad (3.4)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{dM}{dx} > 0 \quad \text{при} \quad \frac{M}{M_0} > \frac{\sqrt{\chi A_0 / Q_0}}{1 + \chi x}$$

Если $\chi < Q_0 / A_0$, то $dM / dx > 0$ при всех M. Для ускорения потока плазмы в канале постоянного сечения $b = 1$ ($\chi = 0$) будем иметь

$$j = \frac{M}{M_0} \frac{M_0^2 - 1}{M^2 - 1} \qquad \left(A_0 = \frac{1}{M_0^2 - 1}\right)$$

$$x = \frac{M_0^2}{Q_0 (M^2 - 1)} \left[\frac{M^2 - M_0^2}{2} - 2 \ln \frac{M}{M_0} + \frac{M^{-2} - M_0^{-2}}{2}\right] \tag{3.5}$$

В этом случае задача имеет решение только при $dM / dx > 0$.

б) Рассмотрим случай $\sigma = \rho^{-1/2}$; при этом имеем

$$j = \frac{1}{2A_0} \left(\frac{M}{M_0}\right)^{3/2} \frac{(1 + \chi x)^{1/2}}{M^2 - 1} \left\{1 + \left[1 + 4\chi \frac{A_0}{Q_0} M_0^2 \left(\frac{M_0}{M}\right)^{1/2} \frac{M^2 - 1}{(1 + \chi x)^{5/2}}\right]^{1/2}\right\}$$

$$\frac{1}{M} \frac{dM}{dx} = \frac{\chi}{(1 + \chi x)(M^2 - 1)} + \frac{Q_0}{2A_0} \left(\frac{M}{M_0}\right)^{3/2} \frac{(1 + \chi x)^{3/2}}{(M^2 - 1)^2} \times \tag{3.6}$$

$$\times \left\{1 + \left[1 + 4\chi \frac{A_0}{Q_0} M_0^2 \left(\frac{M_0}{M}\right)^{1/2} \frac{M^2 - 1}{(1 + \chi x)^{5/2}}\right]^{1/2}\right\}$$

При ускорении плазмы j монотонно убывает. И в этом случае точка, где $M = 1$, является критической. Рассматриваемая задача не имеет решения, если подкоренное выражение в (3.6) отрицательно. При $\chi = 0$

$$j = \left(\frac{M}{M_0}\right)^{3/2} \frac{M_0^2 - 1}{M^2 - 1}$$

$$x = \frac{M_0^{3/2}}{Q_0 (M_0^2 - 1)} \left[\frac{2}{3} (M^{3/2} - M_0^{3/2}) + 4 (M^{-1/2} - M_0^{-1/2}) - \frac{2}{5} (M^{-5/2} - M_0^{-5/2})\right] \tag{3.7}$$

4. Изотермическое ускорение плазмы в тепловом сопле. В частном случае, когда $H = 0$ и электромагнитной силой индуцированного магнитного поля можно пренебречь по сравнению с гидростатической силой, рассматриваемая задача сводится к задаче об изотермическом ускорении плазмы в тепловом сопле. При этом в третьем уравнении (1.1) исчезнет член в правой части. Интересно рассмотреть случай, когда

$$\rho u (1 + \chi x)^2 = 1 \tag{4.1}$$

Решая систему (1.1), где первое уравнение заменено на (4.1), имеем

$$1 + \chi x = \sqrt{\frac{M_0}{M}} \exp\left[\frac{1}{4} (M^2 - M_0^2)\right], \qquad p = \rho = \exp\left[-\frac{1}{2} (M^2 - M_0^2)\right]$$

$$j^2 = \frac{2\chi}{A_0 Q_0 (1 + \chi x)^3} \frac{M^2}{M^2 - 1} \qquad \text{при } \sigma = 1 \tag{4.2}$$

$$j^2 = \frac{2\chi}{A_0 Q_0 (1 + \chi x)^3} \frac{M^2}{M^2 - 1} \exp\left[\frac{1}{4} (M^2 - M_0^2)\right] \qquad \text{при } \sigma = \frac{1}{\sqrt{\rho}}$$

$$M_0 = (1 - 2\chi / A_0 Q_0)^{-1/2}$$

Задача имеет решение при $A_0 Q_0 > 2\chi$; критической будет точка $M = 1$. Производная $dM / dx > 0$, если $M > 1$. При $\chi = 0$ изотермическое ускорение плазмы в тепловом сопле невозможно.

Поступила 14 VIII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Реслер Э., Сирс У. Перспективы магнитной аэродинамики. Сб. пер., Механика, 1958, № 6.
2. Реслер Э., Сирс У. Магнитогазодинамическое течение в канале. Сб. пер., Механика, 1959, № 6.
3. Сарычев В. М. Об ускорении плазмы в скрещенных электрическом и магнитном полях. ПМТФ, 1961, № 6.