УДК 532 + 533

ГИДРОДИНАМИКА СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ В ТЕРМИНАХ ПЛОТНОСТИ ИМПУЛЬСА ЛАМБА

Г. А. Кузьмин

(Новосибирск)

В уравнении Навье — Стокса волновое движение стратифицированной жидкости не отделено от вихревой компоненты. Это затрудняет анализ движения в нелинейном случае, когда волновая и вихревая компоненты могут взаимно порождать друг друга. Поэтому описание нелинейной динамики стратифицированной жидкости в терминах поля скорости либо завихренности не является оптимальным и желателен выбор других переменных, эволюция которых во времени была бы взаимно менее зависимой.

Как показано в [1, 2], существует частный класс движений идеальных стратифицированных сред, которые сохраняют свой вид при произвольных уровнях нелинейности. В несжимаемой жидкости — это движения, поле скорости которых может быть выражено через плотность ρ и скалярные функции λ, φ формулой [2]

(1) $$\rho\mathbf{v} = -\nabla\varphi + \lambda\nabla\rho.$$

В терминах введенных функций динамика жидкости оказывается гамильтоновой, а λ, ρ служат канонически сопряженными переменными. Волновые движения, которые описываются такими переменными, обладают завихренностью. Однако класс движений (1) ограничен, и их можно считать аналогами потенциальных движений однородной жидкости [2].

В данной работе для поля скорости несжимаемой жидкости получено представление, которое обобщает (1) и дает разбиение полного движения на отдельные компоненты. Это представление естественным образом вытекает из уравнений движения, если их предварительно записать в терминах новой переменной — плотности импульса Ламба. Полученные уравнения преобразованы к гамильтоновой форме. Они могут использоваться для поиска лагранжевых и интегральных инвариантов с помощью процедуры, аналогичной предложенной в [3, 4] для случая однородной жидкости.

Плотность импульса Ламба неоднородной жидкости. Динамика идеальной неоднородной жидкости описывается уравнениями Эйлера

(2) $$d(\rho\mathbf{v})/dt = -\nabla p - \rho g;$$

(3) $$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \quad d\rho/dt = 0,$$

где $d/dt = \partial/\partial t + (\mathbf{v}\nabla)$; g — ускорение в поле силы тяжести. Остальные обозначения стандартны. Произведем в уравнениях (2), (3) замену переменных. Вместо скорости $\mathbf{v}$ и давления p введем поля $\mathbf{q}$, φ по формуле

(4) $$\rho\mathbf{v} = -\nabla\varphi + \mathbf{q}.$$

Векторную связь (4) необходимо дополнить скалярным соотношением, которое выбирается таким образом, чтобы из уравнений движения исключился градиент давления (см. ниже (8)). Если поля $\mathbf{q}$, ρ заданы, то с помощью условия несжимаемости

(5) $$\operatorname{div}\mathbf{v} = \operatorname{div}[(-\nabla\varphi + \mathbf{q})/\rho] = 0$$

можно найти переменную φ, зная которую, из (4) можно найти $\mathbf{v}$. Следовательно, динамика жидкости полностью описывается полями $\mathbf{q}$, ρ. Поле $\mathbf{q}$ играет роль плотности импульса Ламба.

Как известно [5, 6], движение жидкости можно характеризовать величиной импульса Ламба — полного импульса силы, который требуется для генерации движения из состояния покоя. Рассмотрим движение, которое возникает в неоднородной жидкости под действием импульсной внешней силы

(6) $$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{q}(\mathbf{x})\delta(t),$$

где $\delta(t)$ — функция Дирака; $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ — плотность импульса, который мгновенно передается жидкости. Его модуль считается ограниченной функцией координат. Добавим силу, определенную выражением (6), в правую часть уравнения (2) и проинтегрируем по малому временному интервалу $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Поскольку скорости возникающего движения конечны, в пределе $\varepsilon \to 0$ конвективный член в (2) и член с полем силы тяжести вклада не дадут. В несжимаемой жидкости, подвергнутой действию импульсной нагрузки, давление содержит, вообще говоря, вклад, пропорциональный $\delta(t)$. Поэтому результат интегрирования запишется в виде (4), где $\varphi = \lim_{\varepsilon\to 0} \int p(t)\,dt$. Обычная плотность импульса есть частный случай плотности импульса Ламба: $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ можно всегда подобрать таким образом, что $\rho\mathbf{v} = \mathbf{q}$. В этом случае $\varphi = 0$. Скорость $\mathbf{v}$ в отличие от $\mathbf{q}$ должна удовлетворять дополнительному условию соленоидальности. Поэтому данное поле $\mathbf{v}$ может генерироваться многими распределениями $\mathbf{q}$. Все такие распределения отличаются на градиент скалярной функции, который фиксируется скалярным калибровочным условием и выбирается из соображений удобства.

Выведем динамическое уравнение для $\mathbf{q}$. Подстановка (4) в (2) дает

$$\frac{dq_i}{dt} = -q_j\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left[-p - \rho\mathbf{g}\mathbf{x} + \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2}\rho v^2 - \Pi(\rho)\right] + \left(\mathbf{g}\mathbf{x} + \frac{d\Pi}{d\rho} - \frac{1}{2}v^2\right)\frac{\partial\rho}{\partial x_i}. \tag{7}$$

Здесь аналогично [2] введена функция плотности $\Pi(\rho)$, которая пока считается произвольной. Выберем в качестве калибровочного условия уравнение, аналогичное интегралу Коши — Лагранжа:

$$d\varphi/dt = p + \rho\mathbf{g}\mathbf{x} - \rho v^2/2 + \Pi(\rho). \tag{8}$$

Уравнение (7) приобретает вид

$$dq_i/dt = -q_j\partial v_j/\partial x_i + (\mathbf{g}\mathbf{x} + d\Pi/d\rho - v^2/2)\partial\rho/\partial x_i. \tag{9}$$

Уравнение (9) полностью определяет динамику идеальной неоднородной жидкости. Поля φ, $\mathbf{v}$ выражаются через $\mathbf{q}$ из (4), (5). Давление находится из калибровочного условия (8).

Рассмотрим некоторые свойства поля $\mathbf{q}$ и полученных уравнений в простейшем случае однородной жидкости $\rho = \mathrm{const}$. В этом случае в (8) можно пренебречь несущественной постоянной Π и членом с полем силы тяжести, а в (9) выпадает член с градиентом ρ:

$$dq_i/dt = -q_j\partial v_j/\partial x_i. \tag{10}$$

Из (4) следует, что в области, где $\mathbf{q} = 0$, течение потенциально $\mathbf{v} = -\nabla\varphi/\rho$. Обратное, вообще говоря, неверно. Пусть рассматриваемая область потенциального движения односвязна (в случае многосвязной области предполагаются проведенными разрезы). Подставив $\mathbf{v} = -\nabla\Phi/\rho$ в уравнение Эйлера, получим интеграл Коши — Лагранжа $\partial\Phi/\partial t - \rho v^2/2 - p = \mathrm{const}$, или

$$d\Phi/dt = p - \rho v^2/2 + \mathrm{const}. \tag{11}$$

Если опустить в правой части (11) несущественную постоянную, то $(d/dt)(\Phi - \varphi) = 0$. Легко проверить, что если $\mathbf{q} = \mathbf{q}_1$ есть решение уравнения (10), то $\mathbf{q}_1 + \nabla I$, где I — произвольная функция, удовлетворяющая $dI/dt = 0$, также будет решением (10). Если выбрать $I = \Phi - \varphi$, то новое поле оказывается равным нулю вне разрезов и областей течения с завихренностью. Отсюда следует, что финитному распределению завихренности можно поставить в соответствие финитное распределение $\mathbf{q}(\mathbf{x})$.

Согласно (4), поле $\mathbf{q}$ в случае $\rho = \mathrm{const}$ есть сумма соленоидальной $\rho\mathbf{v}$ и градиентной $\nabla\varphi$ компонент. Соленоидальная и градиентная компоненты любого векторного поля могут быть выделены с помощью операторов проектирования. Их явный вид известен, например, в случае неограниченной области с полями, достаточно быстро убывающими на бесконечности [6]:

$$\partial\varphi/\partial x_i = \int \Pi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\, q_j(\mathbf{x}')\, dV(\mathbf{x}'), \tag{12}$$

$$v_i(\mathbf{x}) = \int Q_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\, q_j(\mathbf{x}')\, dV(\mathbf{x}'),$$

$$\Pi_{ij} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}, \quad Q_{ij} = \delta_{ij}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') - \Pi_{ij}.$$

В ограниченной области вместо $1/|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$ следует использовать функцию Грина краевой задачи для уравнения Пуассона.

Пусть теперь жидкость неоднородна $\rho \neq \mathrm{const}$. Рассмотрим эволюцию поля $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{q}\times\nabla\rho$. Непосредственное вычисление с использованием (9) $d\rho/dt = 0$, показывает, что $\boldsymbol{\zeta}$ удовлетворяет уравнению

$$d\boldsymbol{\zeta}/dt = (\boldsymbol{\zeta}\nabla)\mathbf{v}, \tag{13}$$

которое аналогично уравнению для завихренности в однородной жидкости. Из вида (13) следует, что $\boldsymbol{\zeta}$ принадлежит к классу вмороженных полей, силовые линии которых движутся вместе с жидкостью. Если $\boldsymbol{\zeta} = 0$ в начальный момент времени, то оно равно нулю и во все последующие моменты времени. В этом случае $\mathbf{q}$ параллелен $\nabla\rho$:

$$\mathbf{q} = \lambda\nabla\rho, \quad \rho\mathbf{v} = -\nabla\varphi + \lambda\nabla\rho, \tag{14}$$

где λ — некоторая скалярная функция. Подстановка (14) в (9) дает динамическое уравнение для λ

$$d\lambda/dt = -v^2/2 + d\Pi/d\rho + \mathbf{g}\cdot\mathbf{x}. \tag{15}$$

Представление (14) совпадает с (1) и описывает, в частности, внутренние волны. Функция $\Pi(\rho)$ может быть определена из условия, чтобы гидростатическое равновесие описывалось тривиальными решениями уравнений движения [2].

В общем случае вместо (14) положим

$$\mathbf{q} = \lambda\nabla\rho + \mathbf{q}', \quad \rho\mathbf{v} = -\nabla\varphi + \lambda\nabla\rho + \mathbf{q}', \tag{16}$$

где λ удовлетворяет уравнению (15). Подставив (16) в (9), получим

$$dq_i'/dt = -q_j'\partial v_j/\partial x_i, \tag{17}$$

т. е. $\mathbf{q}'$ удовлетворяет тому же уравнению, что и $\mathbf{q}$ в однородной жидкости. Представление (16) дает удобное разбиение полной плотности импульса Ламба на две компоненты. Первая из них может использоваться для описания внутренних волн, другая — всех прочих движений жидкости.

Лагранжевы инварианты. Рассмотрим поля трех видов. К первому виду отнесем «лагранжевы инварианты» — скалярные функции $I^{(l)}(\mathbf{x}, t)$, $l = 1, 2, \ldots$, инвариантные вдоль лагранжевых траекторий:

$$dI/dt = 0. \tag{18}$$

К другому виду отнесем векторные «вмороженные поля» $\mathbf{J}^{(m)}(\mathbf{x}, t)$, $m = 1, 2, \ldots$, которые удовлетворяют уравнению

$$dJ_i/dt = J_j\partial v_i/\partial x_j. \tag{19}$$

Уравнение (19) показывает, что поле $\mathbf{J}$ эволюционирует вдоль лагранжевых траекторий аналогично вектору $d\mathbf{l}$, соединяющему две бесконечно близкие материальные точки [6]. Уравнению (19) удовлетворяет завихренность $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{rot}\,\mathbf{v}$ в однородной жидкости и поле $\boldsymbol{\zeta}$ — в неоднородной (см. (13)). Наряду с I, $\mathbf{J}$ рассмотрим поля $\mathbf{S}^{(n)}(\mathbf{x}, t)$, $n = 1, 2, \ldots$, которые эволюционируют вдоль лагранжевых траекторий подобно дифференциальным ориентированным элементам площади [6]:

$$dS_i/dt = -S_j\partial v_j/\partial x_i. \tag{20}$$

Примером поля $\mathbf{S}$ служит поле $\mathbf{q}$ для однородной жидкости и поле $\mathbf{q}'$ — для неоднородной.

В [3] показано, как по известным лагранжевым инвариантам и вмороженным полям построить новые. Так, поле $I\nabla I'\times\nabla I''$ есть вмороженное поле, а скалярная функция $(\mathbf{J}\nabla)I$ есть новый лагранжев инвариант. Якобиан трех полей $D(I^{(1)}, I^{(2)}, I^{(3)})/D(x_1, x_2, x_3)$ также будет лагранжевым инвариантом. Последовательно применяя эти соотношения и рассматривая линейные комбинации полей, можно получить новые лагранжевы инварианты и новые вмороженные поля.

Уравнение (20) можно использовать для поиска дополнительных лагранжевых инвариантов, а схема их поиска становится более симметричной. В силу квазилинейности уравнений (18)—(20) линейные комбинации полей каждого сорта принадлежат к тому же классу. Прямые вычисления показывают, что поля I, $\mathbf{J}$, $\mathbf{S}$ обладают следующими свойствами. Градиент функций I удовлетворяет уравнению (20). Ротор поля $\mathbf{S}$ есть вмороженное поле, а дивергенция любого вмороженного поля есть лагранжев инвариант. Например, $\operatorname{div} \boldsymbol{\zeta} = \rho e$, где $e = \nabla\rho\cdot\boldsymbol{\omega}$ — лагранжев инвариант Эртеля [7].

Можно также показать, что поля $\mathbf{J}$, $\mathbf{S}$ обладают следующими свойствами взаимности. Векторное произведение $\mathbf{S} \times \mathbf{S}'$ есть вмороженное поле, а векторное произведение двух вмороженных полей $\mathbf{J} \times \mathbf{J}'$ удовлетворяет уравнению (20). Скалярное произведение $\mathbf{J}\cdot\mathbf{S}$ есть лагранжев инвариант. Пользуясь всеми этими соотношениями, можно по известным полям типа I, $\mathbf{J}$, $\mathbf{S}$ построить новые поля.

Рассмотрим простые примеры. Вектор $d\mathbf{l}$, соединяющий две бесконечно близкие материальные точки, удовлетворяет уравнению (19), а поле $\mathbf{q}'$ — уравнению (20). Поэтому их скалярное произведение $\mathbf{q}'\cdot d\mathbf{l}$ есть лагранжев инвариант. Сохраняется во времени и интеграл от $\mathbf{q}'$ по произвольному материальному контуру (не обязательно замкнутому). Поле $\mathbf{q}'\cdot\operatorname{rot}\mathbf{q}'$ естественно назвать спиральностью поля $\mathbf{q}'$. Согласно изложенному выше, $\operatorname{rot}\mathbf{q}'$ есть вмороженное поле, а $\mathbf{q}'\cdot\operatorname{rot}\mathbf{q}'$ — лагранжев инвариант. Таким образом, в отличие от спиральности поля скорости $\mathbf{v}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{v}$, которая сохраняется интегрально [8], спиральность поля $\mathbf{q}'$ сохраняется локально — вдоль лагранжевых траекторий.

Пусть в начальный момент времени $\mathbf{q}'\cdot\operatorname{rot}\mathbf{q}'=0$. Тогда спиральность поля $\mathbf{q}'$ равна нулю и в последующие моменты времени. Как известно [8, 9], спиральность поля равна нулю в том или только в том случае, если это поле представимо в виде $\chi\nabla\psi$. Подставив $\mathbf{q}' = \chi\nabla\psi$ в (16), получим соотношение

$$\rho\mathbf{v} = -\nabla\varphi + \lambda\nabla\rho + \chi\nabla\psi. \tag{21}$$

Как отмечалось в [10], равенство (21) можно рассматривать как обобщение представления (1) и представления Клебша (в частном случае $\nabla\rho = 0$ (21) совпадает с представлением Клебша [5, 11]). В качестве потенциала ψ можно выбрать какой-либо лагранжев инвариант, например, инвариант Эртеля e [12]. Подставив $\mathbf{q}' = \chi\nabla e$ в (17), получим, что χ также должна быть лагранжевым инвариантом. Динамика жидкости описывается в терминах пяти функций, а полная система уравнений состоит из (5), (15) и трех уравнений:

$$d\rho/dt = de/dt = d\chi/dt = 0. \tag{22}$$

Из изложенного выше ясна ограниченность представления Клебша и его обобщения (21): они описывают лишь течения со спиральностью поля $\mathbf{q}'$, всюду равной нулю. Оставаясь в рамках представления (21), более общий класс течений можно описать ценой введения многозначных потенциалов Клебша [13].

Гамильтонова форма уравнений движения. Полная энергия стратифицированной жидкости запишется в виде

$$H = \int [\rho v^2/2 + U(\rho, \mathbf{x})]\, dV, \tag{23}$$

где U — плотность потенциальной энергии. Поскольку потенциальная энергия определена с точностью до константы, то в U можно включить произвольную функцию лагранжевых инвариантов движения, например функцию плотности $\Pi(\rho)$, которая фигурировала в (7)—(9), (15):

$$U = \rho\mathbf{g}\mathbf{x} + \Pi(\rho) - \Pi(\rho_0),$$

$\rho_0(\mathbf{x})$ — равновесная плотность. Уравнения эволюции обобщенных потенциалов Клебша (15), (22) можно записать в канонической гамильтоновой форме, если в качестве гамильтониана выбрать (23) (см. [2, 10]):

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta\rho}, \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta\lambda}, \quad \frac{\partial\chi}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta\psi}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta\chi}. \tag{24}$$

Ниже в эйлеровых и в лагранжевых переменных получена гамильтонова форма общего уравнения для плотности импульса Ламба. В эйлеровых переменных используются неканонические скобки Пуассона [14]. Их вид для нашего случая проще всего получить способом пересчета [10] от канонических переменных. В соответствии с (24) скобки Пуассона двух произвольных функционалов F, G канонических переменных имеют вид

$$\{F, G\}(\lambda, \rho, \chi, \psi) = \int \left(\frac{\delta F}{\delta\lambda}\frac{\delta G}{\delta\rho} - \frac{\delta F}{\delta\rho}\frac{\delta G}{\delta\lambda} + \frac{\delta F}{\delta\chi}\frac{\delta G}{\delta\psi} - \frac{\delta F}{\delta\psi}\frac{\delta G}{\delta\chi} \right) dV. \tag{25}$$

Перейдем в (25) к переменным ρ, $\mathbf{q} = \lambda\nabla\rho + \chi\nabla\psi$:

$$\frac{\delta F}{\delta\rho} = \left.\frac{\delta F}{\delta\rho}\right|_{\mathbf{q}} - \operatorname{div}\left(\lambda\frac{\delta F}{\delta\mathbf{q}}\right), \quad \frac{\delta F}{\delta\lambda} = \frac{\delta F}{\delta\mathbf{q}}\nabla\rho, \tag{26}$$

$$\frac{\delta F}{\delta\lambda} = \frac{\delta F}{\delta\mathbf{q}}\nabla\psi, \quad \frac{\delta F}{\delta\psi} = -\operatorname{div}\left(\chi\frac{\delta F}{\delta\mathbf{q}}\right).$$

Подставив (26) в (24), находим скобки Пуассона в терминах полей ρ, $\mathbf{q}$

$$\{F, G\}(\rho, \mathbf{q}) = -\int q_j \left(\frac{\delta F}{\delta q_m}\nabla_m\frac{\delta G}{\delta q_j} - \frac{\delta G}{\delta q_m}\nabla_m\frac{\delta F}{\delta q_j} \right) dV + \int \frac{\partial\rho}{\partial x_j}\left(\frac{\delta F}{\delta q_j}\frac{\delta G}{\delta\rho} - \frac{\delta F}{\delta\rho}\frac{\delta G}{\delta q_j} \right) dV. \tag{27}$$

По построению (27) удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к скобкам Пуассона. Выражение (27) можно принять за определение скобок Пуассона в общем случае, в котором $\mathbf{q}$ не выражается через канонические переменные, а спиральность поля $\mathbf{q}'$ принимает произвольные значения. Используя (27), находим, что уравнение $d\rho/dt = 0$ и уравнение (10) могут быть записаны в неканонической гамильтоновой форме: $\partial\rho/\partial t = \{\rho, H\}$, $\partial\mathbf{q}/\partial t = \{\mathbf{q}, H\}$. При варьировании H подразумевается, что φ — функционал от ρ, $\mathbf{q}$ такой, что $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$.

В частном случае $\rho = \mathrm{const}$ в гамильтониане (23) надо отбросить потенциальную энергию, а в скобках Пуассона — второе слагаемое. Гамильтониан в этом случае может быть записан с помощью оператора проектирования (12):

$$H = (1/2\rho)\int Q_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')\, q_i(\mathbf{x}')\, q_j(\mathbf{x}'')\, dV(\mathbf{x}')\, dV(\mathbf{x}''), \tag{28}$$

что позволяет автоматически учесть условие $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$.

Уравнения движения можно записать в гамильтоновом виде и в лагранжевых переменных. Выразив в (28) эйлеровы координаты $\mathbf{x}$ через лагранжевы $\mathbf{a}$, получим

$$H = (1/2\rho)\int Q_{ij}[\mathbf{x}(\mathbf{a}'), \mathbf{x}(\mathbf{a}'')]\, \tilde{q}_i(\mathbf{a}')\, \tilde{q}_j(\mathbf{a}'')\, dV(\mathbf{a}')\, dV(\mathbf{a}''), \tag{29}$$

$$\tilde{q}_i(\mathbf{a}) = q_i[\mathbf{x}(\mathbf{a})].$$

Вычислим функциональные производные от гамильтониана (29) по $x_i(\mathbf{a})$, $\tilde{q}_i(\mathbf{a})$:

$$\frac{\delta H}{\delta x_i(\mathbf{a})} = \tilde{q}_j\frac{\partial}{\partial x_i}\int Q_{jm}[\mathbf{x}(\mathbf{a}), \mathbf{x}(\mathbf{a}')]\, \tilde{q}_m(\mathbf{a}')\, dV(\mathbf{a}'),$$

$$\frac{\delta H}{\delta\tilde{q}_i(\mathbf{a})} = \int Q_{im}[\mathbf{x}(\mathbf{a}), \mathbf{x}(\mathbf{a}')]\, \tilde{q}_m(\mathbf{a}')\, dV(\mathbf{a}').$$

Отсюда следует, что уравнения движения невязкой жидкости постоянной плотности (10) в лагранжевых переменных могут быть записаны в канонической гамильтоновой форме:

$$\partial x_i/\partial t = \delta H/\delta \tilde{q}_i, \ \partial \tilde{q}_i/\partial t = -\delta H/\delta x_i. \tag{30}$$

В случае $\rho \neq \text{const}$ плотность в лагранжевых переменных не меняется во времени. Поэтому в лагранжевых координатах удобна иная калибровка плотности импульса Ламба, в которой уравнения движения не содержат эйлеровых градиентов плотности. Если мы потребуем, чтобы поле φ в (7) удовлетворяло условию $d\varphi/dt = p$, то уравнение для $\mathbf{q}$ приобретает вид

$$dq_i/dt = -q_j \partial v_j/\partial x_i + \rho\partial(v^2/2)/\partial x_i - \rho g_i.$$

Правая часть этого уравнения равна $-\delta H/\delta \mathbf{x}$. Функциональная производная от гамильтониана (23) по $\tilde{q}_i$ дает скорость. Таким образом, уравнения (30) остаются справедливыми и в случае $\rho \neq \text{const}$.

Заключение. Обсудим связь представления (16) с преобразованием Вебера уравнений гидродинамики [11]. Как известно, уравнение для завихренности в идеальной однородной жидкости может быть переписано в форме уравнений Коши [11]:

$$\omega_i(t) = \omega_j(0)\partial x_i/\partial a_j. \tag{31}$$

В неоднородной жидкости в форме (31) может быть записано уравнение (13). Уравнение (17) является, в каком-то смысле, сопряженным уравнению (13). Поэтому следует ожидать, что $\mathbf{q}'$ эволюционирует согласно уравнению, сопряженному (31).

Произведем в (17) замену переменной

$$q_i' = b_j \partial a_j/\partial x_i, \tag{32}$$

где $\mathbf{b}$ — новый неизвестный вектор. Подстановка (32) в (17) дает $d\mathbf{b}/dt = 0$. Отсюда, положив в (32) $t = 0$, получаем $\mathbf{q}'(0) = \mathbf{b}(0) = \mathbf{b}(t)$ и

$$q_i'(t) = q_j'(0)\,\partial a_j/\partial x_i. \tag{33}$$

Из (16), (33) следует равенство

$$\rho v_j \partial x_j/\partial a_i = -\partial\varphi/\partial a_i + \lambda\partial\rho/\partial a_i + q_i'(0),$$

которое можно рассматривать как одну из форм обобщенного преобразования Вебера.

Переход от поля $\mathbf{v}$ к новой переменной $\mathbf{q}$ можно рассматривать как смену калибровки гидродинамического поля, в которой вместо калибровочного условия несжимаемости накладывается новое условие (8). Аналогичная смена калибровки возможна в уравнениях магнитной гидродинамики (см. [4]), а также гидродинамики сжимаемой жидкости с соответствующим обобщением схемы поиска лагранжевых инвариантов. При наличии вязкости отсутствуют лагранжевы инварианты, подобные полученным выше. Уравнение для плотности импульса Ламба в этом случае выводится аналогично (9), (10); в их правую часть войдет диссипативное слагаемое $\nu\Delta\mathbf{v}$. В случае однородной жидкости $\nu\Delta\mathbf{v} = -\nu \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v} = -\nu \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{q}/\rho$.

В [15—17] содержались предложения использовать конечномерную аппроксимацию течения вихревыми кольцами. При этом в [16, 17] для создания бессеточных алгоритмов расчета предлагалось использовать систему динамических уравнений для импульсов Ламба и координат малых вихревых колец, которая была выведена для случая однородной жидкости в [16, 18]. Для применимости этой системы необходимо, чтобы был мал безразмерный параметр — отношение размеров вихрей к расстоянию между ними. Поэтому она не описывает траекторий вихрей при сближениях на расстояния порядка их размера. Имеется также значительный произвол в выборе параметров вихревых колец и связанный с этим произвол в величине их самоиндуцированной скорости.

Динамическое уравнение (9) может служить как для построения аналогичных численных алгоритмов расчета течений идеальной жидкости, свободных от отмеченных ограничений, так и для их обобщения на случай неоднородной жидкости. Гамильтоновость уравнения (9) означает, что фазовый объем и другие интегральные инварианты Пуанкаре сохраняются во времени. Это свойство позволяет построить статистическую механику жидкости и может быть полезным при исследовании устойчивости решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гончаров В. П., Красильников В. А., Павлов В. И.** К теории волновых взаимодействий в стратифицированных средах.—Изв. АН СССР. Сер. ФАО, 1976, т. 12, № 11.
2. **Воронович А. Г.** Гамильтоновский формализм для внутренних волн в океане.— Изв. АН СССР. Сер. ФАО, 1979, т. 15, № 1.
3. **Моисеев С. С., Сагдеев Р. З. и др.** Об интегралах вмороженности и лагранжевых инвариантах в гидродинамических моделях.— ЖЭТФ, 1982, т. 83, вып. 1.
4. **Kuz'min G. A.** Ideal incompressible hydrodynamics in terms of the vortex momentum density.— Phys. Lett. A, 1983, vol. 96, N 2.
5. **Ламб Г.** Гидродинамика. М.: ОНТИ, 1947.
6. **Бэтчелор Дж.** Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.
7. **Ле Блон П., Майсек Л.** Волны в океане М.: Мир, 1981.
8. **Моффат Г.** Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. М.: Мир, 1980.
9. **Phillips H. B.** Vector analysis. N. Y.: Wiley, 1933.
10. **Захаров В. Е., Кузнецов Е. А.** Гамильтоновский формализм для систем гидродинамического типа. Препринт ИАЭ СО АН СССР, № 186,Новосибирск, 1982.
11. **Серрин Дж.** Математические основы классической механики жидкости. М.: ИЛ, 1963.
12. **Lynden-Bell D., Katz J.** A Lagrangian for Eulerian fluid mechanics.— Proc. Roy. Soc. London, 1982, vol. A 381, N 1781.
13. **Kuznetsov E. A., Mikhailov A. V.** On topological meaning of canonical Clebsch variables.— Phys. Lett. A, 1980, vol. 77, № 1.
14. **Morrison P., Greene J. M.** Noncanonical Hamiltonian density formulation of hydrodynamics and ideal magnetohydrodynamics.— Phys. Rev. Lett., 1980, vol. 45, N 10.
15. **Новиков Е. А.** Статистическая необратимость и передача энергии по спектру.— В кн.: Турбулентные течения. М.: Наука, 1974.
16. **Яненко П. Н., Веретенцев А. Н., Григорьев Ю. Н.** Гамильтонов формализм для пространственной системы малых вихрей в идеальной жидкости.— ЧММСС, 1979, т. 10, вып. 5.
17. **Григорьев Ю. Н., Левинский В. Б., Яненко Н. Н.** Гамильтоновы вихревые модели в теории турбулентности.— ЧММСС, 1982, т. 13, вып. 3.
18. **Roberts P. H.** A Hamiltonian theory for weakly interacting vortices.— Mathematika, 1972, vol. 19, N 1.

Поступила 10/VI 1983 г.

УДК 532.516

ПРИМЕР ОБТЕКАНИЯ САМОДВИЖУЩЕГОСЯ ТЕЛА ОСЕСИММЕТРИЧНЫМ ПОТОКОМ ЖИДКОСТИ

В. Л. Сенницкий

(*Новосибирск*)

В [1] рассмотрена плоская задача о стационарном обтекании потоком вязкой несжимаемой жидкости самодвижущегося цилиндрического тела — кругового цилиндра, движущаяся граница которого является движителем. В данной работе изучается осесимметричная задача о стационарном обтекании потоком вязкой несжимаемой жидкости самодвижущегося шара. Нормальная компонента вектора скорости течения распределена на поверхности шара так, что поток массы и полный поток импульса жидкости через эту поверхность равны нулю. При малых числах Рейнольдса получена, в частности, асимптотическая формула, согласно которой возмущение скорости течения в следе за рассматриваемым телом с увеличением расстояния стремится к нулю по закону X^{-2}, т. е. значительно быстрее, чем в стационарном осесимметричном следе за телом, передающим жидкости в единицу времени отличный от нуля импульс. В последнем случае, как известно [2], возмущение скорости течения стремится к нулю по закону X^{-1}.