

вой точкой. Движение волны расширения вдоль сопла совпадает с картиной течения, полученной методом характеристик.

Пограничный слой на металлических стенках сопла хорошо просматривается благодаря резкому искривлению интерференционных полос, его толщина  $\delta_y$  составляет в выходном сечении сопла  $0.6 \div 0.85$  мм при числе Рейнольдса  $R_x = 1.35 \cdot 10^6$  и числе Маха  $M \approx 2$ . В окрестностях горла сопла толщина пограничного слоя пренебрежимо мала, на интерферограммах ее не удается измерить.

Эти результаты хорошо согласуются с данными работы [8], где при  $R_x = (2.8-3.5) \cdot 10^6$  и  $M = 2.3$  толщины пограничного слоя заключены в интервале от 0.6 до 1.4 мм. При этом давления перед соплом не превышали  $2 \div 5$  кг/см<sup>2</sup>.

Оценка толщины пограничного слоя  $\delta_z$  на стеклянной стенке, произведенная по формуле (2.2), дает  $\delta_z = (3 \div 4) \delta_y$  при  $L/h = 3.75 \div 7.5$ , где  $L$  — ширина сопла,  $h$  — его высота.

Авторы выражают благодарность Коронкевичу В. П. за оказанную помощь в работе.

Поступила 15 IV 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Зыкина - Моложен Л. М., Шапиро И. Г. Интерферометрическое исследование обтекания компрессорной решетки профилей. Аэродинамика, кн. 27, М., Машгиз, 1954.
2. Физические измерения в газовой динамике и при горении. М., Изд-во иностр. лит-ры, 1957.
3. Ладенбург Р., Бершадер Д. О ламинарном и турбулентном пограничном слое в сверхзвуковом потоке. Механика. Сб. сокр. перев. и рефератов иностр. период. лит-ры, 1950, вып. 1.

#### ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ РАДИУСА ВОЗДУШНОГО ВИХРЯ В ЦЕНТРОБЕЖНОЙ ФОРСУНКЕ

М. А. Гольдштик, Г. П. Зыкин, Ю. И. Петухов, В. Н. Соржин

(Новосибирск)

Для вычисления радиуса воздушного вихря чаще всего используется широко известный принцип максимума расхода [1]. Однако теоретически этот принцип не был обоснован. Наряду с ним предложены другие экстремальные принципы (например, [2]), дающие близкие результаты.

Известен ряд попыток обоснования принципа максимума расхода [3,4]. Однако в этих работах по существу показано, что данный принцип допускает различные эквивалентные формулировки. Здесь важно отметить, что принцип максимума расхода сформулирован для водосливов с широким порогом, частным случаем которых является центробежная форсунка с длинным соплом. Поэтому наиболее безукоризненно его применение для идеального случая бесконечного сопла [1]. Дальнейшее рассмотрение проведено в предположении, что сопло бесконечно длинно (явления в выходном сечении сопла не учитываются).

В рамках гидравлической постановки задачи, которая до настоящего времени только и рассматривалась, использование экстремальных принципов или иных дополнительных условий является необходимым. Целью данной работы является гидродинамическое решение задачи о течении идеальной жидкости в геометрии, отличающейся указанным образом от геометрии реальной центробежной форсунки. В такой постановке задача относится к числу типичных задач теории струй идеальной жидкости, для решения которых дополнительные условия типа экстремальных принципов не нужны. Роль соотношения, недостающего для замыкания системы уравнений в гидравлической постановке, играет условие потенциальности течения идеальной жидкости. Гидродинамические методы решения задачи позволяют вскрыть физический смысл принципа максимума расхода.

1. Численное решение задачи. Рассмотрим осесимметричное течение идеальной несжимаемой жидкости в области, показанной на фиг. 1. Здесь  $DCC'D'$  — участок бесконечного сопла. В расчетах сечение  $CC'$  считается достаточно удаленным от входа, так что течение в нем можно считать однородным,  $ABB'A'$  — свободная поверхность жидкости. Закрученный поток жидкости поступает через  $FEE'F'$ . Полный расход жидкости  $Q$  и циркуляция скорости  $\Gamma$  заданы.

Введем цилиндрические координаты  $r$  и  $z$  и поставим задачу об определении гармонической функции потенциала скорости по следующим условиям:

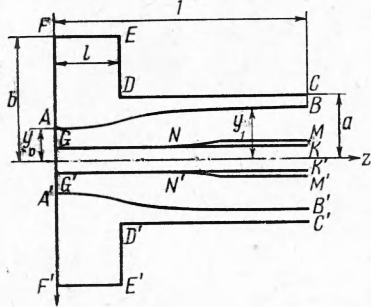
$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{на } AB, CD, DE, FA; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = -1 \quad \text{на } EF \quad (1.1) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{2bl}{a^2 - y_1^2} \quad \text{на } BC, \quad \Phi = v^2 + \frac{v_0^2 b^2}{y^2} - \frac{v_0^2 b^2}{y_0^2} = 0 \quad \text{на } AB \\ (v_0 = \Gamma / 2\pi b, \quad v^2 = v_r^2 + v_z^2) \end{aligned}$$

Здесь  $r = y(z)$  — уравнение образующей искомой свободной поверхности. Последнее условие есть требование постоянства давления на поверхности  $AB$ . Во всех предыдущих формулах масштаб безразмерного потенциала принят расход  $Q$ , а масштаб скоростей выбрана радиальная скорость в сечении  $FEE'F'$ .

Из соотношения (1.1) находим для дальнейшего

$$\frac{1}{y_0^2} = \frac{1}{y_1^2} + \frac{4l^2}{v_0^2(a^2 - y_1^2)^2} \quad (1.2)$$

Предположим, что кривая  $AB$  задана. Тогда функция  $\Phi$  определяется решением задачи Неймана



Фиг. 1. Осевое сечение идеализированного варианта центробежной форсунки

$$\Delta \Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = f(N)$$

Здесь  $n$  — внешняя нормаль к границе области,  $N$  — точка на границе. Эта задача путем использования формулы Грина может быть сведена к интегральному уравнению вида

$$\int_S [\Phi(N) - \Phi(N_0)] r \frac{\partial G}{\partial n} dS = \int_S f(N) r G dS \quad (1.3)$$

Здесь

$$G = \frac{x}{\sqrt{2q}} K(x), \quad x = \left( \frac{2q}{p+q} \right)^{1/2},$$

$$q = 2rr_0, \quad p + q = (r - r_0)^2 + (z - z_0)^2$$

Здесь  $N_0$  — «точка наблюдения»;  $S$  — контур, ограничивающий область течения  $K(x)$  — полный эллиптический интеграл первого рода.

Для численного решения интегралы были заменены конечными суммами по квадратурным формулам Гаусса. На всех участках, кроме  $BC$  и  $EF$ , было выбрано по восемь точек, на  $BC$  и  $EF$  — по одной в середине каждого интервала. Особенность в правой части (1.3) была выделена на основе асимптотического представления

$$K(x) \sim \ln \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} + O(1-x^2) \quad \text{при } x \rightarrow 1$$

Обозначая выбранные точки через  $N_i$  ( $i = 1, \dots, 34$ ), из (1.3) получим систему линейных уравнений

$$\sum_k c_k (\Phi_k - \Phi_i) r_k \frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{k,i} = \Phi_i \quad (i = \dots, 34)$$

где  $\Phi_i$  — значение правой части, вычисленное при  $N_0 N_i$ .

Вследствие того, что при  $k = i$  соответствующее слагаемое обращается в нуль можем написать

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{34} B_{k,i} \Phi_k = \Phi_i \\ B_{k,i} = c_k r_k \frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{k,i} \quad (k \neq i), \quad B_{k,i} = - \sum_{j \neq i} c_j r_j \frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{j,i} \quad (k = i) \quad (1.4) \end{aligned}$$

Потенциал скорости определяется с точностью до константы, поэтому можно положить  $\Phi_{34} = 0$  и одно уравнение опустить.

Окончательный вид системы, из которой находились  $\Phi_i$ , таков:

$$\sum_{k=1}^{33} B_{k,i} \Phi_k = \Phi_i \quad (i = 1, \dots, 33) \quad (1.5)$$

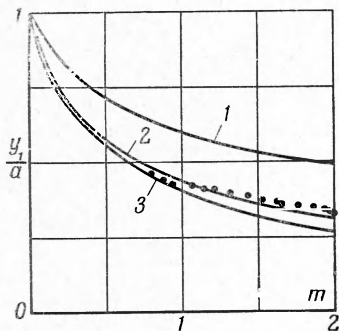
При заданной форме границы отыскание  $\Phi_i$  требует 38 сек машинного времени на машине М-20.

Скорость вычислялась по формуле

$$v_i = \frac{1}{\sqrt{1+r_i^2}} \frac{\partial \Phi_i}{\partial z}$$

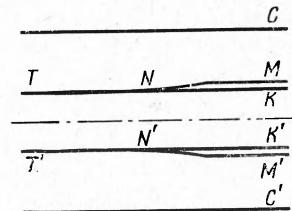
где дифференцирование производилось численно по конечным приращениям. Изложенная схема позволяет решать задачу, когда вид области течения известен.

Для нахождения неизвестной свободной границы кривая  $AB$  варьировалась до тех пор, пока не выполнялось условие (1.1) в восьми внутренних точках. Неизвестными были десять ординат свободной границы — восемь внутренних и две концевые. В качестве двух дополнительных условий служили соотношение (1.2) и условие  $dy/dz = 0$  при  $z = 0$ , выражающее требование ортогональности свободной поверхности к торцовой стенке  $AF$ . Полученная нелинейная система уравнений решалась методом, представляющим собой комбинацию методов Ньютона — Конторовича и модификации последнего.



Фиг. 2

Фиг. 2. Зависимость асимптотического радиуса приосевого разрыва от параметра



Фиг. 3

Фиг. 3. Осевое сечение упрощенной области течения

Полученная таким способом величина относительного радиуса воздушного вихря  $y_1/a$  представлена на фиг. 2 кривой 2. По оси абсцисс отложены значения  $m = 2Q/\Gamma a = 1/A$ , где  $A$  — геометрическая характеристика форсунки.

2. Приближенное решение задачи. Примем здесь масштабом длины внешний радиус  $R$  выходной трубы.

Рассмотрим течение идеальной жидкости в области, близкой к области течения в форсунке (фиг. 1). Здесь  $GG'K'K$  — внутренняя цилиндрическая стенка радиуса  $r_0$ . При доста точно больших значениях  $A$ , когда точка схода жидкости лежит на  $FF'$ , эта стенка не влияет на вид области, занятой жидкостью. При уменьшении  $A$   $y_0$  уменьшается. Когда  $y_0 = r_0$ , свободная поверхность одной точкой касается внутреннего цилиндра. Дальнейшее уменьшение  $A$  переместит точку схода жидкости со стенки  $FF'$  на  $GG'K'K$  (точка  $N$ ), причем координата  $Z_N$  точки  $N$  тем больше, чем ближе значение  $A$  к некоторому критическому  $A_0$ , при котором вся область между двумя коаксиальными цилиндрами заполняется. Когда  $Z_N \rightarrow \infty$   $y_1 \rightarrow r_0$ .

Пусть  $Z_N$  велико. В этом случае влияние условий входа жидкости на вид свободной поверхности ничтожно мало и можно считать, что течение происходит в бесконечной полосе, как изображено на фиг. 3. Чем больше  $Z_N$ , тем точнее выполняется тождество между первичным течением (фиг. 1) и течением в полосе (фиг. 3).

Введем функцию тока  $\psi$ , которая, как известно, удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (2.1)$$

Пусть  $\psi = 0$  при  $r = 1$  и  $\psi = Q/2\pi$  на линии  $TNM$ . Это стандартные для функции тока граничные условия. Кроме того, на свободной границе  $NM$  должно выполняться условие постоянства давления

$$\left| \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right|^2 + \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 y^2} = \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 r_0^2} + v_N^2 \quad (2.2)$$

где  $v_N$  — неизвестная осевая скорость в точке схода  $N$ . Пусть кривая  $TNM$  описывается функцией  $r = y(z)$ . Тогда из (2.1) на  $NM$  с помощью теории узких полос Лаврентьева — Моисеева [5,6], позволяющей находить асимптотические уравнения Лапласа в областях, близких к полосе, получим

$$\frac{1}{y^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 = \frac{Q^2}{\pi^2 (1-y^2)^2} \left\{ 1 + y'' \frac{y}{y^2-1} \left( \frac{y^2-1}{2} - 1 + \frac{\ln y^2}{y^2-1} \right) \right\} \quad (2.3)$$

Отброшенные в (2.3) члены пропорциональны третьей и т. д. производным от  $y$ , которые, как будет дальше показано, стремятся к нулю при  $z_N \rightarrow \infty$ .

Из (2.2) с учетом (2.3) получим уравнение

$$\frac{1}{(1-\tau\delta^2)^2} \left\{ 1 + \tau \frac{d^2\delta}{dz^2} \frac{\delta}{\tau\delta^2-1} \left( \frac{\tau\delta^2-1}{2} - 1 + \frac{\ln \tau\delta^2}{\tau\delta^2-1} \right) \right\} = \mu \frac{\delta^2-1}{\delta^2} + \nu \quad (2.4)$$

Здесь

$$\tau = r_0^2, \quad \delta = \frac{y}{r_0}, \quad \mu = \frac{\Gamma^2}{4r_0^2 Q^2}, \quad \nu = v_N^2 \frac{\pi^2}{Q^2}$$

Из определения  $\delta$  и требования схода свободной поверхности со стенки по касательной имеем в точке  $N$  граничные условия:  $\delta = 1$ ,  $d\delta/dz = 0$ . Разложив входящий в (2.4) логарифм в ряд и введя малую величину  $s = \delta^2 - 1$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{6} \frac{d^2 s}{dz^2} = & \left[ \frac{1}{1-\tau} - \nu(1-\tau) \right] + \left[ \frac{\tau}{(1-\tau)^2} + \nu\tau - \mu(1-\tau) \right] s + \\ & + \left[ \mu(1-\tau) + \tau\mu + \frac{\tau^2}{(1-\tau)^3} \right] s^2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Домножив (2.5) на  $ds/dz$  и проинтегрировав (в точке схода  $s = 0$  и  $ds/dz = 0$ ), получим

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{12} \left( \frac{ds}{dz} \right)^2 = & \left[ \frac{1}{1-\tau} - \nu(1-\tau) \right] S + \left[ \frac{\tau}{(1-\tau)^2} + \nu\tau - \mu(1-\tau) \right] \frac{s^2}{2} + \\ & + \left[ \mu(1-\tau) + \tau\mu + \frac{\tau^2}{(1-\tau)^3} \right] \frac{s^3}{3} \end{aligned} \quad (2.6)$$

При большом, но конечном  $z_N$ , и при  $z \rightarrow \infty$   $s$  стремится к своему асимптотическому значению  $s_0$ , а  $ds/dz$  стремится в нулю (асимптотически однородный поток). Отсюда ясно, что правая часть уравнения (2.6) должна иметь кратный корень  $S_0$ .

При  $z_N \rightarrow \infty$

$$v_N^2 \rightarrow \frac{Q^2}{\pi^2 (1-\tau)^2}, \quad \nu \rightarrow \frac{1}{(1-\tau)^2}$$

поэтому из условия кратности корня следует критерий заполнения:

$$\mu = \frac{2r_0^2}{(1-r_0^2)^3} \quad (2.7)$$

Очевидно, (2.7) совпадает с соответствующим соотношением принципа максимума расхода, но имеет другой смысл.

Из условия кратности при  $\nu = 0$  получается связь параметров для течения без внутренней стенки

$$\mu = \frac{(2\tau + 16/3) + \sqrt{(2\tau + 16/3)^2 + 5^2/3\tau^3}}{2(1-\tau)^3} \quad (\tau = y_0^2) \quad (2.8)$$

Дифференцируя (2.5) нужное число раз, можно убедиться, что при  $z_N \rightarrow \infty$   $ds/dz$ ,  $d^2s/dz^2 \gg d^3s/dz^3$ ,  $d^4s/dz^4$  и т. д., причем по мере роста  $z_N$  неравенство усиливается, так что в пределе соотношение (2.3) становится точным и, следовательно, критерий (2.7) точен.

Итак, соотношения, вытекающие из принципа максимума расхода, имеют смысл критерия заполнения рассмотренной канонической области.

**3. Экспериментальные исследования параметров осесимметричного полого течения.** Формулы п. 1—2 выведены при условии идеальности тяжелой жидкости. Поэтому при подготовке и проведении эксперимента основное внимание было уделено предельному уменьшению влияния вязкости реальной жидкости. Это достигается большими скоростями жидкости (до 20 м/сек) и большими характерными размерами области течения.

Модель камеры представляет собой цилиндр, составленный из 32 лопаток, с выходным соплом. Оси лопаток расположены на окружности диаметром 280 мм. Цилиндр имеет высоту 30 мм. Камера расположена внутри кожуха, выполненного в виде улитки. Улиточный подвод позволяет равномерно распределить жидкость по окружности направляющего аппарата. Каждая лопатка длиной 90 мм имеет возможность поворачиваться вокруг своей оси на углы от 0 до 65° относительно радиуса. Одновременный поворот всех 32 лопаток осуществлялся с помощью специального поворотного устройства. Внутренний диаметр сопла 72 мм, длина 700 мм.

Важнейшей характеристикой такой геометрии течения является отношение циркуляции жидкости (характеризующей интенсивность тангенциального движения) к расходу. Возможность изменять это отношение обеспечивалась описанным направляющим аппаратом.

Угол наклона  $\alpha$  лопаток к радиусу, проходящему через ось лопатки, определяет численное значение отношения следующим образом. Пусть скорость жидкости в пространстве между лопатками равна некоторой величине  $v_0$ . Тогда на радиусе  $R$

$$v_\varphi = v_0 \sin \alpha, \quad v_r = v_0 \cos \alpha, \quad \Gamma = 2\pi R v_\varphi, \quad Q = 2\pi R h v_r$$

$$m = \frac{1}{A} = \frac{2Q}{\Gamma a} = \frac{2h}{a} \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Таким образом, параметр  $A$  однозначно определяется через угол и размеры установки.

Радиус воздушного вихря измерялся на расстоянии 400 мм от входа в сопло щупом, вводимым через отверстие в торцевой стенке. Сопло изготовлено из стекла, так что при специально подобранном освещении момент сопротивления щупа с поверхностью жидкости наблюдается четко.

Полученные значения  $y_1/a$  в диапазоне значений  $m$  (0.8 ÷ 2) для случая  $l/a = 0.83$  приведены на фиг. 2 (сплошные кружки). Здесь же нанесена кривая 1, которая соответствует принципу максимального расхода. Кривая 3 построена по (2.8).

Поступила 24 II 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А б р а м о в и ч Г. Н. Прикладная газовая динамика. М., Гостехтеоретиздат, 1951.
2. Г о л ь д ш т и к М. А., Л е о н т ь е в А. К., П а л е е в И. И. Аэродинамика вихревой камеры. Теплоэнергетика, 1961, № 2.
3. С к о б е л к и н В. И., Теория и расчет центробежной форсунки. Тр. М-ва авиа. пром-сти, 1948, № 17.
4. К л я ч к о Л. А. К теории центробежной форсунки. Теплоэнергетика, 1962, № 3.
5. Л а в р е н т ь е в М. А., Ш а б а т Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1965.
6. М о и с е е в Н. Н. Асимптотические методы типа узких полос. Сб. «Некоторые проблемы математики и механики», Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1961.