ПМТФ, № 3, 1970

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ПОЛЯРИЗАЦИОННОГО ДАТЧИКА

Ю. В. Лисицын, В. Н. Минеев, Е. З. Новицкий

(Москва)

Рассматриваются следующие задачи: о заряде в поляризационном датчике, включенном на емкостную нагрузку; о процессах релаксации в цепи датчика после прохождения ударной волны по образцу; о поляризационном токе через датчик, в котором существуют два механизма поляризации. Показана возможность определения всех искомых параметров ударно сжатого диэлектрика посредством измерений в цепях короткозамкнутого поляризационного датчика и датчика, нагруженного на емкость. Учет двух механизмов поляризации приводит к решению, качественно описывающему ряд экспериментальных фактов.

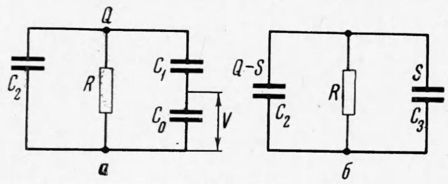
В последние годы поляризация диэлектриков в ударных волнах (в дальнейшем просто волна) стала объектом тщательного изучения, которое идет по трем направлениям: расширение класса исследуемых веществ, феноменологическое описание экспериментальных результатов, выяснение физической природы наблюдаемых явлений.

Существующие феноменологические теории [1-5] связывают плотность тока j в измерительной цепи с удельным объемным сопротивлением ρ, диэлектрической проницаемостью ε, удельной поляризацией P_0, временем ее распада (механической релаксацией) τ и сжатием вещества δ за фронтом волны. В теориях предполагается существование одного механизма поляризации, изотропность диэлектрика. Сложность полученных решений затрудняет однозначное определение P_0, ε, ρ и τ без привлечения дополнительных, специально поставленных измерений, скажем, ρ и (или) ε.

Существование аномалии в ходе зависимости P_0 (δ) и изменение знака j в процессе распространения волны по веществу (переполюсовка) не поддаются математическому описанию в рамках перечисленных теорий и указывают на возможность существования нескольких механизмов поляризации с разными значениями P_0 и τ. В данной работе такой подход развивается для случая двух механизмов.

Вообще говоря, все рассматриваемые здесь решения могут быть получены как следствия теории Зайделя [5] при определенных частных предположениях. Однако для того чтобы придать наглядность производимым операциям, целесообразно использовать представления о поляризационном датчике, как о некоей эквивалентной электрической цепи [2,4].

1. Поляризационный датчик с емкостной нагрузкой. Задачу будем решать в тех же предпосылках, что и в [4], а именно фронт волны, движущийся с волновой скоростью D, разделяет диэлектрик с начальной толщиной l_0 на две области — сжатого и несжатого вещества (соответствующие характеристики: ε_2, ρ, δ, u — массовая скорость и ε_1, $\rho_1 = \infty$, $u = 0$); вещество за и перед фронтом волны изотропно; диэлектрик поляризуется на фронте до величины P_0 по или против направления движения вещества; ввиду одномерности задачи фронт волны является эквипотенциальной поверхностью, как и любая другая, ему параллельная.



Фиг. 1

Постановка задачи. Представим диэлектрик, подвергнутый ударному сжатию, электрической схемой на некоторый момент времени t так, как показано на фиг. 1,*а*. Согласно [4] запишем

$$C_1 = \frac{\alpha_1}{T - t}, \quad C_2 = \frac{\alpha_1 \varkappa}{t}, \quad R = \frac{\rho D t}{\delta} \qquad (1.1)$$

(Выкладки повсюду проводятся для единицы поверхности фронта ударной волны).

$$\left(\alpha_1 = \frac{\varepsilon_1}{4\pi D}, \quad \varkappa = \frac{\varepsilon_2\delta}{\varepsilon_1}, \quad T = \frac{I_0}{D}, \quad \delta = \frac{D}{D-u}\right)$$

Используя эти выражения, найдем напряжение V на нагрузке C_0

$$V = \frac{Q}{C_0}\frac{t}{(\varkappa+\gamma)T + (1-\varkappa)t} \qquad \left(\gamma = \frac{C}{C_0}, \ C = \alpha_1\varkappa T^{-1}\right) \tag{1.2}$$

Здесь Q — величина полного заряда в системе фиг. 1,*а*, который необходимо найти, C — емкость полностью сжатого диэлектрика. Для удобства преобразуем цепь фиг. 1,*а* к схеме фиг. 1, *б*. При этом

$$C_3 = C_1C_0(C_1 + C_0)^{-1}$$

Решение задачи. Величина заряда, распределенного между C_2 и C_3 так, как показано на фиг. 1,*б*, определяется следующими процессами: ударной поляризацией, механической релаксацией (τ), проводимостной релаксацией ($\theta = \rho\varepsilon_2 / 4\pi$). Изменение заряда dQ за время dt может быть переписано из [4] (формула (14))

$$dQ / dt = t^{-1}[P_0 \exp(-t/\tau) - Q] - \theta^{-1}(Q - S) \tag{1.3}$$

Равенство напряжений на конденсаторах C_2 и C_3 дает

$$S = Q\frac{t}{(\varkappa+\gamma)T + (1-\varkappa)t} \tag{1.4}$$

Исходное дифференциальное уравнение (1.3) после подстановки (1.4) принимает вид

$$\frac{dQ}{dt} + Q\left[\frac{1}{t} + \frac{1}{\theta}\frac{(\varkappa+\gamma)T - \varkappa t}{(\varkappa+\gamma)T + (1-\varkappa)t}\right] = \frac{P_0}{t}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \tag{1.5}$$

Его решение с начальными условиями $Q = P_0$ при $t = 0$ приводит к

$$Q = P_0\frac{\exp(t/\nu)}{t[(\varkappa+\gamma)T + (1-\varkappa)t]^{\omega}}\int_0^t \frac{\exp(-t/\mu)}{[(\varkappa+\gamma)T + (1-\varkappa)t]^{-\omega}}dt \tag{1.6}$$

$$\left(\nu = \frac{1-\varkappa}{\varkappa}\theta, \ \mu = \frac{\tau\theta(1-\varkappa)}{\theta + \varkappa(\tau-\theta)}, \ \omega = \frac{T}{\theta}\frac{\varkappa+\gamma}{(1-\varkappa)^2}\right)$$

Простыми алгебраическими действиями в [4] можно показать, что заряд системы в цепи короткозамкнутого поляризационного датчика есть

$$Q = P_0\frac{\exp(t/\nu)}{t[\varkappa T + (1-\varkappa)t]^{\varphi}}\int_0^t \frac{\exp(-t/\mu)\,dt}{[\varkappa T + (1-\varkappa)t]^{-\varphi}}, \quad \varphi = \frac{T\varkappa}{\theta(1-\varkappa)^2} \tag{1.7}$$

Это выражение — частный случай (1.6) для $C_0 \gg C$ ($\gamma \gg 1$, $\varkappa \approx 1$).

Если проводимость вещества за фронтом волны мала, то величина Q есть связанный заряд системы Q_∞. Он может быть получен решением дифференциального уравнения (1.5) при $\theta \gg T$.

$$Q_\infty = \frac{P_0\tau}{t}[1 - \exp(-t/\tau)] \tag{1.8}$$

Подставляя (1.6) в (1.2), получаем в общем случае

$$V = \frac{P_0}{C_0}\frac{\exp(t/\nu)}{[(\varkappa+\gamma)T + (1-\varkappa)t]^{\omega+1}}\int_0^t \frac{\exp(-t/\mu)}{[(\varkappa+\gamma)T + (1-\varkappa)t]^{-\omega}}dt \tag{1.9}$$

а при отсутствии проводимости за фронтом волны

$$V = \frac{P_0\tau}{C_0}\frac{1-\exp(-t/\tau)}{(\varkappa+\gamma)T+(1-\varkappa)t} \qquad (1.10)$$

2. Релаксационные процессы в цепи поляризационного датчика. Найдем величину заряда в системе фиг. 1, *б* для тех случаев, когда волна выходит из исследуемого вещества на измерительный электрод без отражения. Рассматривать будем времена $t \geqslant T$. Обозначим $t' = t - T$ и $Q_{t=T} = Q^\circ$. Очевидно, Q° равно Q при $t' = 0$.

Все параметры цепи фиг. 1, *б* постоянны. Так

$$C_2 = C = \alpha_1\varkappa T^{-1}, \qquad R = \rho I_0\delta^{-1}, \qquad C_3 = C_0$$

Зависимость от времени t' сохраняет лишь заряд Q, который будет распадаться вследствие существования релаксационных процессов, причем с временем τ будет распадаться только часть полного заряда — связанный заряд Q_∞, а с временем θ — весь заряд системы Q.

Величина связанного заряда на момент $t' = 0$ ($Q_\infty{}^\circ$) определяется из (1.8)

$$Q_\infty{}^\circ = \tau P_0 T^{-1}[1-\exp(-T/\tau)] \qquad (2.1)$$

Тогда Q_∞ при $t' > 0$

$$Q_\infty = Q_\infty{}^\circ \exp(-t'/\tau)$$

и убыль Q_∞ — соответственно

$$dQ_1 = -Q_\infty{}^\circ\tau^{-1}\exp(-t'/\tau)\,dt' \qquad (2.2)$$

Убыль зарядов за счет проводимости вещества за фронтом волны есть

$$dQ_2 = -\frac{V}{R}dt' = -\frac{Qdt'}{R(C+C_0)} = -\frac{\gamma Qdt'}{\theta(1+\gamma)} \qquad (2.3)$$

Суммируя (2.2) и (2.3), получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dQ}{dt'} + Q\frac{\gamma}{\theta(1+\gamma)} = -Q_\infty{}^\circ\tau^{-1}\exp(-t'/\tau) \qquad (2.4)$$

Решение (2.4) с начальными условиями

$$Q^\circ = P_0T^{-1}\frac{\exp(T/\nu)}{[T(1+\gamma)]^\omega}\int_0^T\frac{\exp(-t/\mu)\,dt}{[(\varkappa+\gamma)T+(1-\varkappa)t]^{-\omega}} \qquad (2.5)$$

при $t' = 0$ дает

$$Q = Q_\infty{}^\circ\frac{m}{\tau-m}\exp\frac{-t'}{m}\left\{1-\exp\left[t'\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{\tau}\right)\right] + \frac{Q^\circ}{Q_\infty{}^\circ}\frac{\tau-m}{m}\right\} \qquad \left(m = \frac{\theta(C+C_0)}{C}\right) \qquad (2.6)$$

Тогда

$$V = Q(C+C_0)^{-1}$$

Проведем краткий анализ полученного выражения.

При $C_0 \to \infty$ (что отвечает условию короткозамкнутой цепи) и θ, отличном от нуля, из (2.6) следует:

$$Q = Q^\circ - Q_\infty{}^\circ[1-\exp(-t'/\tau)] \qquad (2.7)$$

Производная (2.7) по t' дает значение тока релаксации

$$j_+ = -Q_\infty{}^\circ\tau^{-1}\exp(-t'/\tau)$$

или после подстановки $Q_\infty{}^\circ$ из (2.1)

$$j_+ = -P_0T^{-1}[1-\exp(-T/\tau)]\exp(-t'/\tau) \qquad (2.8)$$

что совпадает с решением В. В. Якушева, О. К. Розанова, А. Н. Дремина [6], полученного в рамках теории Аллисона [1], не учитывающей проводимость вещества за фронтом волны, и означает, что спад тока в короткозамкнутой цепи поляризационного датчика определяется только временем релаксации τ.

Начальный ток j_0, возникающий в момент входа ударной волны в испытуемый образец, не зависит от релаксационных процессов [4] и определяется выражением $j_0 = P_0(\varkappa T)^{-1}$. При известном $k = j_+ / j_0$ найдем значение $\varkappa$

$$\varkappa = k\{[\exp(-T / \tau) - 1] \exp(-t' / \tau)\}^{-1} \tag{2.9}$$

Если найдены τ и $\varkappa$ согласно (2.8) и (2.9) из опытов в короткозамкнутой цепи, то легко можно найти значения

$$P_0 = j_0 \varkappa T, \qquad C = \alpha_1 \varkappa T^{-1}$$

и Q_∞° из (2.1). Напряжение в схеме фиг. 1, *б* при $t' = 0$ $(t = T)$ определяет заряд $Q^\circ = V(C + C_0)$, выражаемый (2.5). Напряжение в этой же схеме при любом $t' > 0$ позволяет из (2.6) найти единственное теперь неизвестное m. Параметры $\varkappa$ и m содержат в себе искомые ε_2 и ρ.

3. Поляризационный ток в датчике при наличии двух механизмов поляризации. Факт аномальной поляризации в ионных кристаллах, а также изменение в некоторых случаях знака поляризационного тока в процессе прохождения волны по образцу могут быть объяснены существованием по меньшей мере двух независимых процессов поляризации с разными знаками. Каждый из этих процессов должен характеризоваться собственными значениями τ и P_0.

Рассмотрим случай короткозамкнутой цепи. Для определенности будем полагать, что $P_0^{(1)}$ положительно всегда, а $P_0^{(2)}$ может приобретать как положительное, так и отрицательное значение. В дальнейших рассуждениях следуем работе [4].

Прирост заряда в системе происходит только лишь в C_2 (фиг. 1, *а*) за счет поляризации дополнительных слоев диэлектрика

$$dQ_1 = (P_0^{(1)} \pm P_0^{(2)} - Q)\, t^{-1}\, dt \tag{3.1}$$

Уменьшение зарядов за счет механической релаксации dQ_2 выразится

$$dQ_2 = -t^{-1} \quad \{P_0^{(1)}[1 - \exp(-t / \tau_1)] \pm P_0^{(2)}[1 - \exp(-t / \tau_2)]\}dt \tag{3.2}$$

а убыль зарядов за счет проводимости

$$dQ_3 = -(Q - S)\, \theta^{-1}\, dt \tag{3.3}$$

Здесь S — заряд, перетекающий в цепи короткозамкнутого датчика, величина которого обязана удовлетворять условию равенства напряжений

$$(Q - S)\, C_1 = SC_2$$

Суммируя (3.1), (3.2) и (3.3), найдем

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{t}\left\{P_0^{(1)} \exp\frac{-t}{\tau_1} \pm P_0^{(2)} \exp\frac{-t}{\tau_2} - Q\right\} - \frac{Q - S}{\theta}\, dt \tag{3.4}$$

или относительно заряда S

$$\frac{dS}{dt} + S\left[\frac{1-\varkappa}{\varkappa T + (1-\varkappa)t} + \frac{1}{\theta}\frac{\varkappa(T-t)}{\varkappa T + (1-\varkappa)t}\right] = \tag{3.5}$$

$$= \frac{P_0^{(1)} \exp(-t / \tau_1) \pm P_0^{(2)} \exp(-t / \tau_2)}{\varkappa T + (1-\varkappa)t}$$

Решение (3.5) с нулевыми начальными условиями дает возможность записать зависимость плотности поляризационного тока от времени

$$j = \frac{P_0^{(1)} \exp(-t/\tau_1)}{\varkappa T + (1-\varkappa)t} \left\{ 1 - \frac{\theta^{-1}\varkappa(T-t) + (1-\varkappa)}{[\varkappa T + (1-\varkappa)t]^{\varphi}} \times \right. \tag{3.6}$$

$$\left. \times \exp(t/\mu_1) \int_0^t \frac{[\varkappa T + (1-\varkappa)t]^{\varphi-1}}{\exp(t/\mu_1)} dt \right\} \pm \frac{P_0^{(2)} \exp(-t/\tau_2)}{\varkappa T + (1-\varkappa)t} \times$$

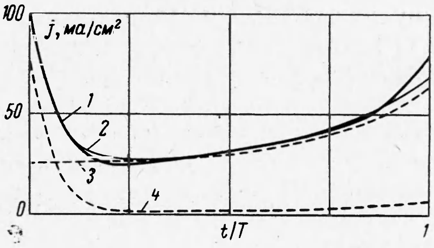
$$\times \left\{ 1 - \frac{\varkappa(T-t)\theta^{-1} + (1-\varkappa)}{[\varkappa T + (1-\varkappa)t]^{\varphi}} \exp(t/\mu_2) \int_0^t \frac{[\varkappa T + (1-\varkappa)t]^{\varphi-1}}{\exp(t/\mu_2)} dt \right\}$$

которое является, по существу, суперпозицией двух решений [4].

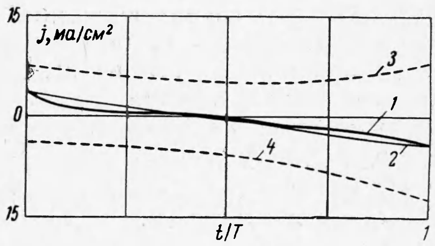
Продолжая выкладки дальше, получаем, что и ток релаксации есть суперпозиция двух решений (2.8), т. е.

$$j_+ = -\left\{ \frac{P_0^{(1)}}{T} \left[1 - \exp\frac{-T}{\tau_1} \right] \exp\frac{-t'}{\tau_1} \pm \frac{P_0^{(2)}}{T} \left(1 - \exp\frac{-T}{\tau_2} \right) \exp\frac{-t'}{\tau_2} \right\}$$

Все это позволяет в новом свете оценить как результаты измерения φ в широком диапазоне давлений, так и трудности, возникающие при феноменологическом описании экспериментальных кривых $J(t)$ с помощью существующих теорий.



Фиг. 2



Фиг. 3

На фиг. 2 приводятся для сравнения: экспериментальная кривая *1*, полученная в опыте с NaCl при давлении на фронте волны 100 *кбар*, $T = 0.825$ *мксек*; расчетная кривая *2*, полученная суперпозицией кривой *3* ($P_0 = 4.12 \cdot 10^{-8}$ *к/см²*, $\varkappa = 2$, $\tau = \theta = 1.65$ *мксек*) и кривой *4* ($P_0 = 1.24 \cdot 10^{-7}$*к/см²*, $\varkappa = 2$, $\tau = 0.04$ *мксек*, $\theta = 1.65$ *мксек*).

На фиг. 3 приводятся: экспериментальная кривая *1*, полученная в опыте с KBr при давлении на фронте волны 78 *кбар*, $T = 1.31$ *мксек*; расчетная кривая *2*, полученная суперпозицией кривой *3* ($P_0 = 1.97 \cdot 10^{-8}$ *к/см²*, $\varkappa = 2$, $\tau = 0.65$ *мксек*, $\theta = 6.5$ *мксек*) и кривой *4* ($P_0 = -0.98 \cdot 10^{-8}$ *к/см²*, $\varkappa = 2$, $\tau = \theta = 6.5$ *мксек*).

Поступила 18 IX 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Allison F. E. Shock-induced polarization in plastics. I. Theory. J. Appl. Phys., 1965, vol. 36, No. 7.
2. Иванов А. Г., Новицкий Е. З. Задача о двойном слое в ударно сжатых диэлектриках. ПМТФ, 1966, № 5.
3. Зельдович Я. Б. Э. д. с., возникающая при распространении ударной волны по диэлектрику. ЖЭТФ, 1967, т. 53, вып. 1.
4. Иванов А. Г., Лисицын Ю. В., Новицкий Е. З. Задача о поляризации диэлектриков при ударном нагружении. ЖЭТФ, 1968, т. 54, вып. 1.
5. Зайдель Р. М. Определение режима электрической релаксации при ударном нагружении. ЖЭТФ, 1968, т. 54, вып. 4.
6. Якушев В. В., Розанов О. К., Дремин А. Н. Об измерении времени релаксации поляризации в ударной волне. ЖЭТФ, 1968, т. 54, вып. 2.