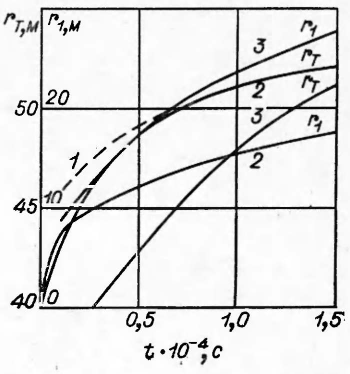
В качестве начальных значений для задачи численного счета при $t = 0$ приняты: $r_{T_0} = 30$ м, $r_1 = 0$, $\alpha = 0{,}5$, $m = 0$, $\rho_0 = 1{,}29$ кг/м³. Следовательно, при $t = 0$ $\rho_1 r_1^3 = \frac{3M_0}{4\pi}$.

На фигуре показаны зависимости от времени радиусов фронта тепловой и ударной волн. Кривые *1—3* соответствуют значениям $M_0 = 0$ (автомодельное решение [4]); 0,1 и 10 т. Видно, что выделившаяся масса существенно влияет на закономерности распространения тепловой и ударной волн.



Поступила 27 XII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. **Горбачев Л. П., Федоров В. Ф.** О влиянии ударной волны на распространение тепловой.— ПМТФ, 1975, № 3.
2. **Pomraning.** Early time air fireball model for near surface energy release.— «Nuclear Science and Engineering», 1974, vol. 53, N 2.
3. **Седов Л. И.** Методы подобия и размерностей в механике. Изд. 7-е. М., «Наука», 1972.
4. **Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.** Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., «Наука», 1966.

УДК 533.6.011,534.222.2

РАЗВИТИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ НА НАЧАЛЬНОЙ СТАДИИ ТОЧЕЧНОГО ВЗРЫВА В ТЕПЛОПРОВОДНОМ ГАЗЕ

В. П. Шидловский

(Москва)

Рассматриваются одномерные возмущения, возникающие в холодном однородном газе ($T_1 = 0$, ρ_1 — const) при мгновенном выделении конечной энергии в начале координат. Исходные уравнения составлены для газа, в котором механизм теплопередачи моделируется нелинейной теплопроводностью с коэффициентом $\lambda \sim T^n$. Преобразование уравнений к безразмерной форме с помощью введения «естественных» переменных позволяет указать и простейший путь исследования процесса в целом с помощью метода возмущений. Начальное приближение соответствует известному решению для тепловой волны [1], тогда как последующие приближения описывают совместное развитие как тепловых, так и динамических возмущений. Исследование свойств решений и пример расчета двух первых приближений (не считая начального) для случая точечного сферического взрыва при $n = 5$ дает представление о формировании ударной волны.

При изучении взрыва в газе важное значение имеет учет реальных процессов теплопередачи. Это особенно существенно на самой начальной стадии взрыва, ибо, как показывают наблюдения и теоретические исследования [2], тепловая волна возникает при взрыве еще до того, как проявлчется динамический характер явления. Механизм теплопередачи связан при этом главным образом с влиянием излучения, но если пренебречь давлением и энергией излучения, то вполне приемлемое описание указанного механизма обеспечивается моделью нелинейной теплопроводности. Исследование тепловых волн, возникающих в холодном газе при нелинейной теплопроводности, дается в [1]. Ниже предложен более общий подход, учитывающий не только тепловые, но и динамические процессы.

1. Система уравнений, пригодная для описания одномерных неустановившихся процессов в теплопроводном газе, записывается в виде

$$(1.1)\quad \frac{\partial\rho}{\partial t}+v\frac{\partial\rho}{\partial r}+\rho\left(\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{\nu-1}{r}v\right)=0,\quad \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{\partial p}{\partial r}=0,$$

$$\rho\left(\frac{\partial e}{\partial t}+v\frac{\partial e}{\partial r}\right)+p\left(\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{\nu-1}{r}v\right)=r^{1-\nu}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^{\nu-1}\lambda\frac{\partial(e/c_V)}{\partial r}\right],$$

$$p=(\varkappa-1)\rho e,$$

где t — время; r — координата; ρ, v, p, e — соответственно плотность, скорость, давление и внутренняя энергия газа ($e=c_VT$); $\varkappa=c_p/c_V$; ν — параметр симметрии ($\nu=1,\ 2,\ 3$).

Коэффициент теплопроводности газа λ предполагается выраженным но формуле

$$\lambda=c_VAe^n\ (A,\ n=\mathrm{const}).$$

Если начальную температуру газа можно считать равной нулю, то при любом $t>0$ область возмущенного состояния будет ограничена фронтом возмущений $r=r_f(t)$. В случае точечного взрыва, когда при $t=0$ в начале координат выделяется конечная энергия E, начальные и граничные условия формулируются в виде

$$(1.2)\quad \begin{array}{ll} p=e=v=0, & \text{при } t=0,\\ \rho=\rho_1,\ \lambda\partial e/\partial r=0 & \text{или } t>0,\ r=r_f,\\ v=\lambda\partial e/\partial r=0 & \text{при } t>0,\ r=0,\end{array}$$

где начальная плотность ρ_1 будет считаться постоянной. В дополнение к этому должно удовлетворяться интегральное условие постоянства полной энергии возмущенного объема газа

$$(1.3)\quad \xi_\nu\int_0^{r_f}\rho(e+v^2/2)r^{\nu-1}dr=E,\quad \xi_\nu=2(\nu-1)\pi+(\nu-2)(\nu-3)/2,\quad E=\mathrm{const}.$$

Уравнения (1.1) удобно преобразовать к безразмерной форме, вводя новые аргументы

$$(1.4)\quad \eta=\frac{r}{r_f},\qquad \chi=\frac{A}{(\varkappa-1)^n}\frac{U^{2n-1}}{\rho_1 r_f},$$

где $U=dr_f/dt$ — скорость распространения фронта возмущений. Эти аргументы можно назвать естественными, так как первый из них представляет собой нормализованную пространственную координату а второй — это единственная безразмерная комбинация, зависящая от времени и не содержащая координаты r.

Преобразование искомых переменных также осуществляется с помощью введения «естественных» масштабов

$$v = UV(\eta, \chi), \ \rho = \rho_1 R(\eta, \chi), \ p = \rho_1 U^2 P(\eta, \chi),$$

$$e = (\varkappa - 1)^{-1} U^2 N(\eta, \chi), \ \lambda = c_V \rho_1 r_f U \chi N^n(\eta, \chi).$$

После перехода к новым переменным уравнения (1.1) принимают форму

$$(V - \eta)\frac{\partial R}{\partial \eta} + K\chi\frac{\partial R}{\partial \chi} + R\frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{\nu - 1}{\eta} RV = 0, \tag{1.5}$$

$$R\left[ZV + (V - \eta)\frac{\partial V}{\partial \eta} + K\chi\frac{\partial V}{\partial \chi}\right] + \frac{\partial P}{\partial \eta} = 0,$$

$$R\left[2ZN + (V - \eta)\frac{\partial N}{\partial \eta} + K\chi\frac{\partial N}{\partial \chi} + (\varkappa - 1)N\left(\frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{\nu - 1}{\eta}V\right)\right] =$$

$$= \chi\eta^{1-\nu}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\eta^{\nu-1}N^n\frac{\partial N}{\partial \eta}\right), \quad P = RN.$$

Здесь введены обозначения

$$Z(\chi) = (dU/dt) r_f U^{-2}, \ K(\chi) = (2n - 1)Z(\chi) - 1. \tag{1.6}$$

Граничные условия, получаемые из (1.2), имеют вид

$$R = 1, \ P = N = V = N^n \, dN/\partial\eta = 0 \ \text{при} \ \eta = 1, \tag{1.7}$$

$$V = N^n \, dN/\partial\eta = 0 \ \text{при} \ \eta = 0.$$

Прежде чем преобразовать условие (1.3), введем новую функцию

$$\Psi(\chi) = \int_0^1 R\left[(\varkappa - 1)^{-1} N + V^2/2\right] \eta^{\nu-1} d\eta.$$

С учетом обозначений (1.6) условие (1.3) можно представить в форме

$$\chi K d\Psi/d\chi + (2Z + \nu)\Psi = 0.$$

2. Исходя из определения (1.4) переменной χ, заменяющей теперь время, можно заметить следующее. Предел $\chi \to 0$ соответствует превращению уравнений (1.5) в уравнения адиабатического автомодельного движения газа при сильном взрыве [3]. Физические свойства рассматриваемого явления свидетельствуют о том, что этот предел соответствует бесконечно большому времени, $t \to \infty$. Вводя естественное допущение о том, что зависимость $\chi(t)$ монотонна, приходим к выводу, что начальная стадия исследуемого процесса соответствует пределу $\chi \to \infty$. Попытаемся найти предельную форму уравнений (1.5) при больших χ, предполагая, что она не будет содержать явной зависимости от χ и в уравнении энергии должен сохраниться как член, связанный с теплопроводностью, так и член, характеризующий изменения во времени. С этой целью изменим масштабы части искомых переменных, вводя новые функции по формулам

$$N = B\chi^\alpha f(\eta, \chi), \ V = \chi^{\alpha/2} g(\eta, \chi), \ P = B\chi^\alpha h(\eta, \chi), \tag{2.1}$$

где B — нормировочная константа ($B = 0(1)$), вводимая для удобства сравнения с полученными ранее решениями. Упомянутое выше условие относительно порядка величины членов уравнения энергии позволяет найти

$$\alpha = -1/n. \tag{2.2}$$

Уравнения (1.5) с учетом (2.1), (2.2) принимают форму

$$(\chi^{-1/2n}g - \eta)\frac{\partial R}{\partial \eta} + K\chi\frac{\partial R}{\partial \chi} + \chi^{-1/2n}R\left(\frac{\partial g}{\partial \eta} + \frac{\nu-1}{\eta}g\right) = 0, \tag{2.3}$$

$$R\left[Zg + (\chi^{-1/2n}g - \eta)\frac{\partial g}{\partial \eta} - \frac{1}{2n}Kg + K\chi\frac{\partial g}{\partial \chi}\right] + \chi^{-1/2n}B\frac{\partial h}{\partial \eta} = 0,$$

$$R\left[2Zf + (\chi^{-1/2n}g - \eta)\frac{\partial f}{\partial \eta} - \frac{1}{n}Kf + K\chi\frac{\partial f}{\partial \chi} + \right.$$

$$\left. + (\varkappa - 1)\chi^{-1/2n}f\left(\frac{\partial g}{\partial \eta} + \frac{\nu-1}{\eta}g\right)\right] = \frac{B^n}{n+1}\eta^{1-\nu}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\eta^{\nu-1}\frac{\partial f^{n+1}}{\partial \eta}\right), \quad h = Rf.$$

Система (2.3) имеет вид, очень удобный не только для получения предельной формы уравнений при $\chi \to \infty$, но и для построения решений, соответствующих конечным, хотя и достаточно большим значениям χ. Ряд членов, входящих в уравнения (2.3), содержит множитель $\chi^{-1/2n}$, и естественно попытаться искать такие решения в форме рядов

$$F(\eta, \chi) = F_0(\eta) + \sum_i \chi^{-i/2n}F_i(\eta), \tag{2.4}$$

где F — любая из функций f, g, h или R. Аналогичные ряды могут использоваться и для представления функций $Z(\chi)$ и $K(\chi)$ при больших χ.

Подставим в уравнения (2.3) представления (2.4) и, переходя к пределу $\chi \to \infty$, получим уравнения начального приближения, т. е. предельную форму исходных уравнений, соответствующую начальной стадии взрыва:

$$\frac{dR_0}{d\eta} = 0, \quad R_0\left[\left(Z_0 - \frac{1}{2n}K_0\right)g_0 - \eta\frac{dg_0}{d\eta}\right] = 0,$$

$$R_0\frac{b_\nu}{\nu n+2}\left[2\left(Z_0 - \frac{1}{2n}K_0\right)f_0 - \eta\frac{df_0}{d\eta}\right] = \eta^{1-\nu}\frac{d}{d\eta}\left(\eta^{\nu-1}\frac{df_0^{n+1}}{d\eta}\right).$$

Положим, что входящая в формулы (2.1) константа B равна

$$B = \left[\frac{(\nu n+2)(n+1)}{b_\nu}\right]^{1/n}, \quad b_\nu^{\frac{\nu n+2}{2n}} = 2\left[\frac{2(\nu n+2)(n+1)}{n}\right]^{1/n}\Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{n+1}{n}\right)\left[\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{n}\right)\right]^{-1}.$$

Учитывая получаемые из (1.7) граничные условия $R_0(1) = 1$, $g_0(1) = 0$, получим $R_0 \equiv 1$, $g_0 \equiv 0$.

Обратимся к условию (1.8). В соответствии с (2.1) полагаем

$$\Psi(\chi) = \chi^{-1/n}\left(a_0 + \sum_i \chi^{-i/2n}a_i\right), \tag{2.5}$$

где a_0 и a_i — некоторые числа. В начальном приближении получаем

$$-K_0/n + 2Z_0 + \nu = 0,$$

откуда с учетом (1.6) следует

$$Z_0 = -(\nu n + 1), \; K_0 = -n[\nu(2n - 1) + 2],$$

а в соответствии с определением Z устанавливается и закон движения фронта возмущений

$$r_f = \gamma t^{1/(\nu n + 2)},$$

где постоянный множитель γ может быть выражен через определяющие параметры задачи, включая энергию E.

Таким образом, построение начального приближения сводится к решению единственного уравнения

$$\frac{d}{d\eta}\left(\eta^{\nu-1}\frac{df_0^{n+1}}{d\eta}\right) = -\frac{b_\nu}{\nu n + 2}\frac{d}{d\eta}(\eta^\nu f_0) \tag{2.6}$$

с граничными условиями

$$f_0(1) = \left(df_0^{n+1}/d\eta\right)_{\eta=1} = 0.$$

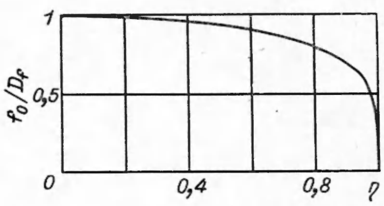
Уравнение (2.6) в точности совпадает с уравнением задачи о тепловой волне [4], которое было получено вне связи с динамической задачей. Решение уравнения (2.6) имеет вид

$$f_0 = D_f(1 - \eta^2)^{1/n}, \quad D_f^n = \frac{nb_\nu}{2(n+1)(\nu n + 2)}. \tag{2.7}$$

График зависимости $f_0(\eta)$ показан на фиг. 1.

3. Проведем построение функций первого приближения. Из первого уравнения системы (2.3) и из условия $R_1(1) = 0$ можно найти $R_1 \equiv 0$. Для функции f_1 получается уравнение вида

$$\eta^{1-\nu}\frac{d}{d\eta}\left[\eta^{\nu-1}\frac{d}{d\eta}(f_0^n f_1)\right] = - \tag{3.1}$$
$$-\frac{b_\nu}{(n+1)(\nu n + 2)}\left[\eta^{1-\nu}\frac{d}{d\eta}(\eta^\nu f_1) - \frac{Z_1}{n}f_0\right].$$



Фиг. 1

Параметр Z_1 заранее неизвестен, поэтому представим

$$f_1 = f_{11} + Z_1 f_{12},$$

где f_{11} — решение однородного уравнения, получаемого из (3.1). С учетом (2.7) можно получить $f_{11} = C(1-\eta^2)^{(1-n)/n}$. Если принять во внимание, что нас интересуют значения $n > 1$, выполнение граничного условия $f_{11}(1) = 0$ оказывается возможным, только если $C = 0$, откуда $f_{11} \equiv 0$.

После этого параметр a_1 (см. (2.5)) можно представить в виде

$$a_1 = Z_1 B(\varkappa - 1)^{-1}\int_0^1 f_{12}\eta^{\nu-1}d\eta = Z_1 k_1.$$

Уравнение (1.8) в рассматриваемом приближении с учетом (2.3) имеет вид

$$Z_1(-K_0 k_1/2 + a_0) = 0. \tag{3.2}$$

В общем случае выражение в скобках в левой части уравнения (3.2) отлично от нуля, откуда следует $Z_1 = 0$, и, таким образом, окончательно имеем $f_1 \equiv 0$.

При учете результатов нулевого приближения функция $g_1(\eta)$ определяет собой главный член выражения для скорости газа. Для определения g_1 получаем уравнение (штрих означает дифференцирование по η)

$$\eta g_1' - [\nu(n-1)+1]\, g_1 = Bf_0'. \tag{3.3}$$

После интегрирования (3.3) с учетом граничного условия получим

$$g_1 = B\eta^{\nu(n-1)+1}\int\limits_1^{\eta} f_0'\eta^{-[\nu(n-1)+2]}\,d\eta. \tag{3.4}$$

Обращаясь к выражению (2.7) и вводя обозначение

$$x = (1-\eta^2)^{1/n}, \tag{3.5}$$

можем переписать (3.5) в несколько ином виде

$$g_1 = D_f B\eta^{\nu(n-1)+1}\int\limits_0^{x}(1-x^n)^{-\frac{1}{2}[\nu(n-1)+2]}\,dx. \tag{3.6}$$

Если n — нечетное целое число, то квадратура в правой части (3.6) может быть вычислена аналитически, в общем же случае следует прибегать к численному методу. Можно указать на некоторые характерные особенности функции $g_1(\eta)$, проявляющиеся при любых ν и любых $n > 1$.

В центре взрыва формула (3.6) дает $g_1(0) = 0$, при конечной производной

$$g_1'(0) = \frac{2}{n(n-1)\nu}BD_f\ .$$

В окрестности фронта $g_1(\eta)$ ведет себя так же, как и $f_0(\eta)$, т. е. как $(1-\eta^2)^{1/n}$.

График функции $g_1(\eta)$ при $\nu = 3$, $n = 5$ показан на фиг. 2. Несмотря на то, что эта функция характеризует «малое возмущение», по своему виду она очень напоминает разрывную функцию адиабатического движения.

Главный член динамического возмущения плотности выражается функцией $R_2(\eta)$. Уравнение для определения этой функции имеет форму

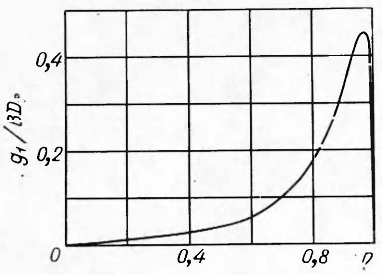
$$\eta R_2' + n^{-1}K_0R_2 - \eta^{1-\nu}(\eta^{\nu-1}g_1)' = 0. \tag{3.7}$$

При условии $R_2(1) = 0$ решение уравнения (3.7) можно представить в виде

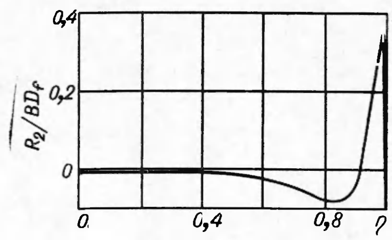
(3.8)

$$R_2 = -\frac{\nu n}{\nu n+2}\frac{g_1}{\eta} + \frac{2(\nu n+1)}{\nu n+2}BD_f\eta^{\nu(2n-1)+2}\int\limits_0^{x}(1-x^n)^{-\frac{1}{2}[\nu(2n-1)+4]}\,dx,$$

где вновь использована подстановка (3.5). Как и при определении g_1, решение свелось к одной квадратуре.



Фиг. 2



Фиг. 3

Пользуясь (3.8), укажем на некоторые свойства функции $R_2(\eta)$. Как и функция $g_1(\eta)$, на фронте возмущений она обращается в нуль и ведет себя в окрестности этой точки, как $(1-\eta^2)^{1/n}$. К центру она приходит с нулевой производной, принимая там конечное значение

$$R_2(0) = -2BD_f/n(n-1)[\nu(2n-1)+2].$$

Результат численного расчета функции $R_2(\eta)$ при $\nu = 3$ и $n = 5$ представлен на фиг. 3; видно, что на значительной части возмущенной области величина R_2 меняется несущественно, сохраняя малые отрицательные значения. Основные же изменения происходят вблизи фронта, причем, как и в случае скорости, волна сжатия во фронтальной зоне сильно напоминает ударную волну.

Желая выяснить тенденцию развития динамического возмущения температуры, следует определить функцию $f_2(\eta)$, удовлетворяющую уравнению

$$B^n\eta^{1-\nu}\left[\eta^{\nu-1}\left(f_0^{\varkappa}f_2\right)'\right]' + \eta^{2\nu(n-1)+3}\left[\eta^{-2[\nu(n-1)+1]}f_2\right]' = \tag{3.9}$$
$$= n^{-1}Z_2f_0 - R_2\eta^{1-\nu}\left(\eta^{\nu}f_0\right)' + g_1f_0' + (\varkappa-1)\,\eta^{1-\nu}f_0\left(\eta^{\nu-1}g_1\right)'.$$

Граничные условия для $f_2(\eta)$ получаются из (1.7) в виде

$$f_2(1) = 0, \quad (1-\eta^2)\,f_2'(\eta) = 0 \text{ при } \eta = 0 \text{ и } \eta = 1.$$

Параллельно с определением $f_2(\eta)$ нужно найти и величину Z_2, поэтому вновь используется представление

$$f_2 = f_{21} + Z_2f_{22}.$$

Обращаясь к представлению $\Psi(\chi)$, согласно (2.5), положим также

$$a_2 = a_{21} + Z_2a_{22},$$

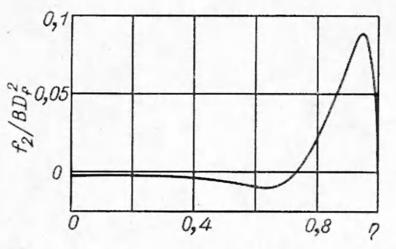
где

$$a_{21} = \int_0^1 \left[B(\varkappa-1)^{-1}(f_0R_2 + f_{21}) + g_1^2/2\right]\eta^{\nu-1}d\eta;$$

$$a_{22} = B(\varkappa-1)^{-1}\int_0^1 f_{22}\eta^{\nu-1}d\eta.$$

Если функции f_{21} и f_{22} определены, то можно найти и величины a_{21} и a_{22}, после чего с помощью (1.8) получаем

$$Z_2 = a_{21}K_0/(a_0 - a_{22}K_0).$$



Фиг. 4

График функции $f_2(\eta)$ при тех же параметрах $\nu = 3$ и $n=5$ показан на фиг. 4. Число граничных условий для уравнений (3.3), (3.9) на единицу больше порядка самих уравнений. Выполнение «лишних» граничных условий обеспечивается здесь за счет свойств самих уравнений, однако в принципе мы не обязаны ограничивать себя поисками решений лишь в классе непрерывных функций. Как из теоретических рассмотрений, так и из анализа экспериментальных данных известно (см., например, [2]), что в области между центром взрыва и фронтом возмущений при определенных условиях могут возникать сильные разрывы. В условиях выбранного примера и в рамках рассмотренных здесь приближений указанные разрывы не обнаруживаются.

Поступила 24 XII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. **Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.** Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., «Наука», 1966.
2. **Коробейников В. П.** Задачи теории точечного взрыва в газах.— «Труды МИАН им. Стеклова», 1973, т. 119.
3. **Седов Л. И.** Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1967.
4. **Баренблатт Г. И.** О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде.— ПММ, 1952, т. 16, вып. 1, с. 67—78.

УДК 532.517.4

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Г. А. Кузьмин, А. З. Паташинский

(Новосибирск)

В основе феноменологической теории локальной структуры турбулентности [1] лежит представление, что в турбулентном потоке обмениваются энергией лишь пульсации близких масштабов. Предположение о случайном характере обмена энергией приводит к выводу об универсальности и подобии статистического режима пульсаций малых масштабов. В эйлеровых уравнениях движения наряду с взаимодействиями, осуществляющими обмен энергии между пульсациями, имеются фиктивные взаимодействия, связанные с переносом пульсаций данного масштаба l пульсациями масштабов $l' \gg l$. Как подчеркивалось в работах [2, 3], при эйлеровом описании турбулентности эффект переноса приводит к сильной статистической зависимости пульсаций различных масштабов. Поэтому свойства универсальности и подобия мелкомасштабных пульсаций могут наблюдаться лишь в переменных, в которых отсутствуют эффекты чистого переноса одних пульсаций другими. В связи с этим в работах [1—3] приведены качественные соображения о необходимости описания мелкомасштабных пульсаций в системе отсчета, движущейся в каждой точке со всеми крупномасштабными пульсациями. В данной работе показывается, что такое описание мелко-