

РАСЧЕТ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО СВОБОДНОГО РАСШИРЕНИЯ НЕРАВНОВЕСНОЙ ПЛАЗМЫ ВОДОРОДА

Д. А. Бартенев, Г. А. Лукьянов

(Ленинград)

Приводятся схема и результаты расчета методом характеристик свободного расширения невязкой, нетеплопроводной, неравновесной, оптически толстой плазмы водорода из круглого сверхзвукового сопла. Определяющим элементарным процессом считается столкновительно-излучательная рекомбинация. В поле течения наблюдается сильное нарушение термического и ионизационного равновесия. Рассматривается влияние релаксационных процессов на геометрию течения и поля газодинамических параметров. Результаты расчетов сопоставляются с аналогичными данными для идеального совершенного газа.

1. Основные допущения. Одномерное свободное расширение неравновесной плазмы в сферическом источнике рассматривалось в работах [1-3]. В данной работе на основе макроскопического подхода решается осесимметричная стационарная задача о свободном расширении невязкой, нетеплопроводной, релаксирующей, оптически толстой плазмы водорода. Выбор водорода в качестве объекта исследования диктовался соображениями простоты и наглядности. При расчете полагаются справедливыми следующие предположения:

- 1) плазма состоит из электронов, ионов и атомов;
- 2) определяющим элементарным процессом является столкновительно-излучательная рекомбинация; акты ионизации за срезом сопла отсутствуют;
- 3) скорости всех компонент плазмы равны;
- 4) плазма квазинейтральна;
- 5) внутренняя энергия электронной компоненты определяется балансом между энергией, теряемой электронами при упругих столкновениях с тяжелыми частицами, и энергией, получаемой электронами при рекомбинации [3];
- 6) коэффициент рекомбинации является однозначной функцией локальных значений температуры и концентрации электронов [4].

2. Система уравнений. С учетом сделанных допущений система уравнений, описывающая осесимметричное свободное расширение плазмы, имеет вид

$$\rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + \rho \frac{v}{y} + \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (2.1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} \quad (2.4)$$

$$h(T, T_e, \alpha) = \frac{1}{m_a} \left[\frac{5}{2} k(T + \alpha T_e) + \alpha I \right] \quad (2.5)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = F_\alpha = - \frac{\rho}{m_a} K_p(N_e, T_e) \alpha^2 \quad (2.6)$$

$$Q^Y + Q^P = 0 \quad (2.7)$$

$$Q^Y = \frac{N_e^2 e^4}{m_a} \left(\frac{8\pi m_e}{kT_e} \right)^{1/2} \left(\frac{T}{T_e} - 1 \right) \ln \left[\frac{9(kT_e)^3}{8\pi N_e e^6} \right]$$

$$Q^P = \frac{I + 5/2 kT_e}{m_a^2} K_p(N_e, T_e) \alpha^2 \rho^2$$

$$p = \frac{k}{m_a} \rho (T + \alpha T_e) \quad (2.8)$$

$$\alpha = \frac{m_e}{\rho} \dot{N}_e, \quad \rho = m_a (N_e + N_a)$$

Здесь x и y — координаты (ось x направлена вдоль оси симметрии); u и v — проекции скорости на оси x и y соответственно; ρ — плотность; p — давление; h — энтальпия; T и T_e — температуры тяжелых частиц и электронов; α — степень ионизации; N_a и N_e — концентрация атомов и электронов; m_a и m_e — массы атома и электрона; e — заряд электрона; Q^Y — энергия, теряемая электронами при упругих столкновениях с ионами (столкновения с атомами при заметных степенях ионизации несущественны ввиду малых сечений столкновений); Q^P — энергия, передаваемая электронам при рекомбинации [1]; I — потенциал ионизации; K_p — коэффициент столкновительно-излучательной рекомбинации; k — постоянная Больцмана.

Уравнение энергии для электронной компоненты (2.7) является приближенным. Оно справедливо в некоторой области течения с достаточно высокой плотностью заряженных частиц, когда работа расширения пренебрежимо мала по сравнению с Q^Y и Q^P [2]. При выполнении конкретных расчетов обоснованность записи уравнения энергии электронов в форме (2.7) должна подтверждаться прямыми количественными оценками.

3. Уравнения характеристик. Для численного решения системы уравнений (2.1) — (2.8) можно использовать метод характеристик в форме, предложенной в работе [3]. Расчетная система уравнений включает в себя уравнения характеристик первого и второго семейств и соотношения вдоль линий тока. Уравнения характеристик записываются в виде

$$dx = \frac{\beta \mp \zeta}{\beta \zeta \pm 1} dy \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{1 + \zeta^2} d\zeta \pm \frac{\beta}{\rho w^2} dp \pm \frac{1}{\beta \zeta \pm 1} \left\{ \frac{\zeta}{y} + \frac{(1 + \zeta^2)^{1/2} I F_\alpha}{5/2 k w (T + \alpha T_e)} \right\} dy = 0 \quad (3.2)$$

$$d\psi = \pm \frac{\rho w y (1 + \zeta^2)^{1/2}}{\beta \zeta \pm 1} dy \quad (3.3)$$

Здесь $\zeta = \tan \theta$ (θ — угол наклона вектора скорости к оси x); $\beta = \sqrt{w^2/a^2 - 1}$, $w = \sqrt{u^2 + v^2}$, ψ — функция тока; a — «замороженная» скорость звука, $a^2 = 5 k (T + \alpha T_e) / 3 m_a$.

Соотношения вдоль линий тока имеют вид

$$dy = \zeta dx \quad (3.4)$$

$$d\alpha = \frac{(1 + \zeta^2)^{1/2}}{w} F_\alpha dx \quad (3.5)$$

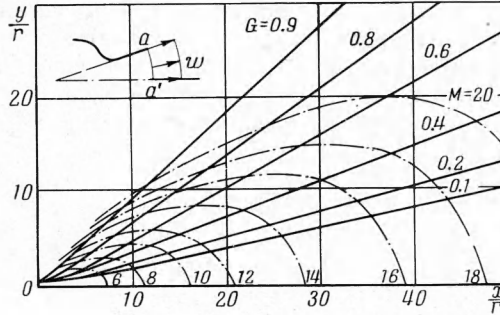
$$\frac{3}{2} \frac{dp}{\rho} - \frac{5}{2} \frac{p}{\rho^2} d\rho + \frac{I}{m_a} d\alpha = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{w^2}{2} + h = h_0, \quad h = \frac{1}{m_a} \left[\frac{5}{2} k (T + \alpha T_e) + I \alpha \right] \quad (3.7)$$

$$Q^Y + Q^P = 0 \quad (3.8)$$

$$p = \frac{k}{m_a} \rho (T + \alpha T_e) \quad (3.9)$$

4. **Схема и пример расчета.** Для расчетов система уравнений (3.1)—(3.9) записывается в конечно-разностной форме в соответствии с работой [5]. Программа расчета струи включает в себя подпрограммы расчета параметров на начальной поверхности, в поле течения, на оси струи и в окрестности угловой точки (кромки сопла). Параметры течения в узлах характеристической сетки определяются методом последовательных приближений. Наиболее медленно сходящейся величиной является температура электронов. Эта величина и была выбрана в качестве критерия сходимости. Расчет параметров в каждой точке прекращался, когда разность значений T_e при двух последовательных приближениях составляла $10^{-3}\%$. В среднем при расчете каждой точки делалось $5 \div 6$ приближений.



Фиг. 1

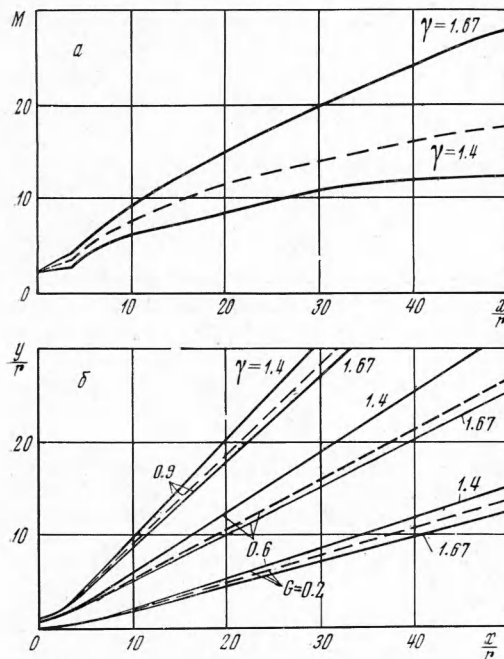
В качестве примера рассмотрим свободное расширение из конического сопла с углом полураствора 11.3° ($\zeta = 0.2$). Примем, что геометрия течения на срезе сопла соответствует течению в источнике с полюсом в точке пересечения образующей сопла с осью симметрии (фиг. 1).

Параметры на поверхности aa' полагаются постоянными. Расчет выполнен при радиусе выходного сечения сопла r , равном 1 см, и следующих параметрах на срезе сопла:

$$\begin{aligned} M = w/a &= 2.5, \quad w = 1.4 \cdot 10^6 \text{ см/сек}, \quad T = 2 \cdot 10^3 \text{ К} \\ \rho &= 5 \cdot 10^{-8} \text{ г/см}^3, \\ p &= 8.3 \cdot 10^{-3} \text{ кг/см}^2 \end{aligned}$$

Значения α и T_e на начальной поверхности находятся из уравнений (3.7) и (3.9). Значения коэффициента столкновительно-излучательной рекомбинации взяты из работы [4].

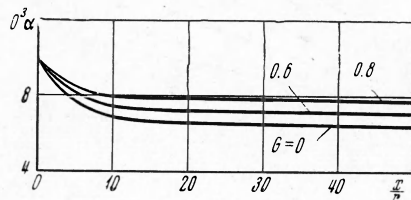
На фиг. 1 приведены результаты расчета чисел M и спектра линий тока. На линиях тока даны значения относительных массовых расходов G , проходящих внутри тела вращения, образованного данной линией тока.



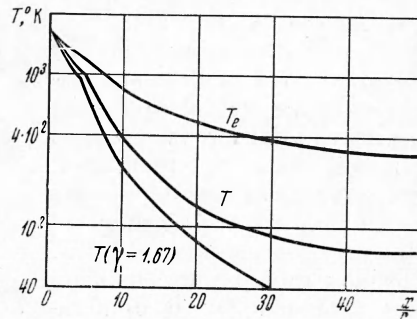
Фиг. 2

Оси симметрии соответствует $G = 0$, границе струи — $G = 1$. На фиг. 2, a результаты расчета чисел M на оси струи плазмы водорода (пунктир) сравниваются с числами M на оси струй идеального совершенного одноатомного ($\gamma = 1.67$) и двухатомного ($\gamma = 1.4$) газов. Энерговыделение в рекомбинирующей, расширяющейся плазме приводит к уменьшению чи-

сел M в поле течения и более интенсивному развороту газа от оси симметрии (фиг. 2, б). В рассматриваемом примере влияние релаксационных процессов на геометрию течения и поля w и ρ невелико, что объясняется замедленным переходом энергии ионизации в поступательные степени свободы. Для принятых параметров энергия ионизации на срезе сопла составляет $\sim 20\%$ полной энтальпии. Однако вследствие быстрого «замораживания» степени ионизации вдоль линий тока (фиг. 3) происходит выделение лишь малой доли запасенной энергии. Различие в ходе α вдоль разных линий тока связано с различием в скорости расширения плазмы вдоль них.



Фиг. 3



Фиг. 4

Для свободно расширяющейся рекомбинирующей плазмы типично нарушение термического равновесия вследствие замедленного обмена энергией между электронами и тяжелыми частицами. На фиг. 4 приведены результаты расчета T и T_e на оси симметрии. Отношение T_e/T увеличивается вниз по течению. Количественные оценки показывают, что уравнение энергии для электронной компоненты в виде (2.7) может использоваться во всей области расчета.

При увеличении степени ионизации на срезе сопла и достаточно большой скорости рекомбинации влияние релаксационных процессов на геометрию течения становится все более заметным. Следует, однако, заметить, что при значительных α использованный приближенный подход становится недостаточным. Увеличение роли излучения и релаксационных процессов требует более детальной постановки задачи, учитывающей кинетику заселения дискретных энергетических состояний и диффузию излучения.

Поступила 6 X 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов Н. М., Райзер Ю. П. О рекомбинации электронов в плазме, расширяющейся в пустоту. ПМТФ, 1965, № 4.
2. Лукьянов Г. А. Стационарный сверхзвуковой источник неравновесной плазмы. ПМТФ, 1968, № 6.
3. Chou Y. S., Talbot L. Source — flow expansion of a partially ionized gas into a vacuum. AIAA Journal, 1967, vol. 5, No. 12.
4. Bates D. R., Kingston A. E., McWhirter R. W. P. Recombination between electrons and atomic ions II. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1962, vol. 270, No. 1341.
5. Кацкова О. Н., Крайко А. Н. Расчет плоских и осесимметричных сверхзвуковых течений при наличии необратимых процессов. М., ВЦ АН СССР, 1964.