УДК 517.946:531.36

О ТЕХНИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СОСТОЯНИЙ УПРУГОГО АППАРАТА ПРИ ЕГО ВЕРТИКАЛЬНОМ ПОЛЕТЕ

К. С. Матвийчук

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, 03057 Киев

Получены достаточные условия технической устойчивости нелинейных динамических состояний удлиненных упругих летательных систем при их управляемом продольном вертикальном движении. В заданных летательных системах учитывается влияние изменения площади их поперечного сечения, поперечных деформаций и колебаний. Сформулированные критерии технической устойчивости зависят от основных параметров управляемого процесса, в частности от приращения поперечной нагрузки за счет искривления оси системы и аэродинамических сил во время вертикального полета.

Введение. Работа посвящена исследованию технической устойчивости [1–8] нелинейных динамических состояний удлиненных упругих летательных систем типа ракеты при их продольном движении в вертикальной плоскости. Данные системы имеют форму тонких удлиненных тел с переменным поперечным сечением, в которых при полете появляются большие поперечные деформации и колебания. С увеличением размеров такие динамические тела становятся менее жесткими, влияние упругих и других колебаний на полет и управление полетом становится существенным. Взаимодействие деформации, угловых движений корпуса системы, внешних аэродинамических сил, внутренних гидродинамических возмущений от колеблющейся жидкости в баках системы может приводить к нежелательным явлениям, таким как автоколебания, потеря устойчивости и др., в результате чего летательная система не способна осуществить полет по заданной траектории. Для гашения отклонений от заданных угловых и других движений летательного объекта служит управление. Управление может гасить или, наоборот, при неудачно выбранном законе управления раскачивать жидкость в баках и увеличивать упругие колебания. Для предложенного управления процессом получены достаточные условия технической устойчивости заданной динамической системы на конечном и бесконечном интервалах времени. Применяется метод сравнения на основе оптимизации распределенных процессов в комбинации с прямым методом Ляпунова. Проведенное исследование опирается на результаты, содержащиеся в [9–18].

Формулировка управляемой краевой задачи системы. Пусть летательная система представляет собой удлиненное упругое тело, например тонкое тело вращения или тело вращения с крыльями и оперением малого удлинения, которое движется в вертикальной плоскости [9–11]. Условия полета требуют малости отклонений продольной оси летательной системы от заданного движения. Каждая точка продольной оси летательного тела должна двигаться по определенной траектории. Однако во время полета всегда имеются отклонения от заданного движения. Требуется управлять движением так, чтобы отклонение траектории от заданной, например прямолинейной, было мало, а точность полета — наибольшей. Скорость полета тела считается постоянной. Колебания оси летательной системы как балки переменного сечения под действием сил упругости, веса и аэродинамических сил описываются уравнениями [7, 9–11, 14–16]

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} = \varphi_2, \qquad \frac{\partial\varphi_2}{\partial t} = L(\varphi) + \frac{\alpha}{m}\,u, \qquad t \in T_1, \quad x \in D. \tag{1}$$

Здесь

$$L(\varphi) = -\frac{1}{m}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(EI\,\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\Big) - \frac{a_1}{m}\,\varphi_2 - \frac{b_1}{m}\,\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} - \frac{1}{m}\,\bar{Q};$$

$x = \tilde{x}/l$; $\varphi_1 = \tilde{\varphi}/l$; $\varphi_2 = (1/\sqrt{gl})(\partial\tilde{\varphi}/\partial\tau)$; $t = \sqrt{g/l}\,\tau$; $EI = \tilde{E}\tilde{I}/(Gl^2)$; $a_1 = \tilde{a}l\sqrt{gl}/G$; $b_1 = \tilde{b}l/G$; $m = \tilde{m}gl/G$; $0 < \mu \leqslant \mu_0 < 1$; $T_1 = [t_0, N\mu^{-1}]$; $D \equiv (0,1)$; $t_0 = \mathrm{const} \geqslant 0$; $N = \mathrm{const} > 0$; $T_1 \subset I_1 \equiv [t_0, +\infty)$; $u = u(x,t)$ — управление; $\alpha = \alpha(x)$ — заданная функция, учитывающая место приложения управляющих усилий (например, если управление приложено только на отрезке $[a,1]$ оси, то полагается $\alpha(x) \equiv 0$ при $x \in [0,a)$ и $\alpha(x) = 1$ при $x \in [a,1]$); G — вес; l — длина летательного тела; $\tilde{x}$ — координата текущего сечения; $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{x},\tau)$ — отклонение оси от равновесного состояния; φ_1 — безразмерное отклонение оси; $\tilde{E}\tilde{I}$ — жесткость при изгибе; $\tilde{m}$ — погонная масса; $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ — коэффициенты аэродинамических сил; g — ускорение свободного падения; $\bar{Q}$ — приращение поперечной нагрузки за счет искривления продольной оси системы; τ — время; t — безразмерное время. При горизонтальном полете $\bar{Q} \equiv 0$ [9, 10, 14]. Отметим, что изменение поперечных сил за счет силы тяжести при малых отклонениях от состояния равновесия представляет собой величину второго порядка малости [14]. При близком к вертикальному полете момент силы тяжести равен [11, 14]

$$M_g = \int\limits_0^{\tilde{x}} \tilde{m}g[\tilde{\varphi}(\tilde{x},\tau) - \tilde{\varphi}(\xi,\tau)]\,d\xi.$$

Отсюда для распределенной нагрузки находим

$$Q_0 = \frac{\partial^2 M_g}{\partial\tilde{x}^2} = \frac{\partial}{\partial\tilde{x}}\Big(q_0\,\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\tilde{x}}\Big), \qquad q_0 = q_0(\tilde{x}) = \int\limits_0^{\tilde{x}} g\tilde{m}(\xi)\,d\xi.$$

В безразмерных величинах при вертикальном полете имеем [13]

$$\bar{Q} = \frac{m}{\tilde{m}g}\,Q_0 = \frac{\partial}{\partial x}\Big(q\,\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\Big), \qquad q = \frac{q_0}{G} = \int\limits_0^{x} m\,dx. \tag{2}$$

Коэффициенты a_1, b_1 находятся из решений уравнений аэродинамики [12]. При полете со сверхзвуковой скоростью выполняется закон плоских сечений [7, 15], и определение аэродинамических сил упрощается [12, 13]. Давление потока при поперечном обтекании тонких тел определяется местным углом атаки

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{v_\infty}\,\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\tau} + \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\tilde{x}},$$

где v_∞ — скорость набегающего потока.

Пусть $c = c(\tilde{x})$ — размах тонкого крыла в сечении с координатой $\tilde{x}$. Нормальная составляющая аэродинамической силы в этом сечении имеет вид

$$n(\tilde{x},t) = -2\int\limits_{-c(\tilde{x})/2}^{c(\tilde{x})/2} (p - p_\infty)\,dx = \frac{2\chi p_\infty v_\infty c(\tilde{x})}{a_\infty}\,\tilde{\alpha},$$

где $\chi = c_p/c_V$; c_p, c_V — теплоемкости при постоянном давлении p и объеме V соответственно; p_∞, a_∞ — давление и скорость звука набегающего потока. Тогда коэффициенты $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ записываются в виде [9–11]

$$\tilde{a} = 2\chi p_\infty c(\tilde{x})/a_\infty, \qquad \tilde{b} = 2\chi p_\infty v_\infty c(\tilde{x})/a_\infty.$$

Для крыльев прямоугольной в плане формы $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ постоянны. Нормальная составляющая аэродинамических сил при обтекании удлиненных тел вращения равна [9–14, 16]

$$n(\tilde{x}, t) = \rho_\infty v_\infty^2 R \frac{dR}{d\tilde{x}} \tilde{\alpha},$$

где $R = R(\tilde{x})$ — радиус тела вращения; ρ_∞ — плотность набегающего потока. При этом

$$\tilde{a} = \rho_\infty v_\infty R \frac{dR}{d\tilde{x}}, \qquad \tilde{b} = \rho_\infty v_\infty^2 R \frac{dR}{d\tilde{x}}.$$

Если $R = R_0\sqrt{\tilde{x}}$, то коэффициенты $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ не зависят от $\tilde{x}$.

В дальнейшем будем рассматривать случай, когда $\bar{Q}$ определяется выражением (2), т. е. полет близок к вертикальному. Введем граничные условия для функции $\varphi_1 = \varphi_1(x, t)$. У передней кромки тела ($x = 0$) отсутствуют момент и сосредоточенная сила:

$$\Big(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2}\Big)_{x=0} = \Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(EI\,\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2}\Big)\Big]_{x=0} = 0. \tag{3}$$

У задней кромки ($x = 1$) отсутствует момент:

$$\Big(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2}\Big)_{x=1} = 0. \tag{4}$$

Управление движением летательной системы может производиться, кроме управления u, управляющей силой u_S, приложенной в точке $x = 1$, т. е.

$$\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(EI\,\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2}\Big)\Big]_{x=1} = u_S. \tag{5}$$

Пусть заданы начальные условия заданного процесса

$$\begin{gathered} \varphi_1(x,t)\big|_{t=t_0} = \omega_0(x), \qquad \varphi_2(x,t)\big|_{t=t_0} = v_0(x), \qquad t_0 \in T_1, \qquad x \in D, \\ \varphi_0(x) \equiv (\omega_0(x), v_0(x))^{\mathrm{T}}. \end{gathered} \tag{6}$$

Краевую задачу управления (1)–(6) исследуем в предположении, что при заданных функциях $\omega_0(x)$, $v_0(x)$, удовлетворяющих необходимым условиям согласования на границе системы, задача (1)–(6) имеет однозначное решение в классе непрерывных по t, x функций, имеющих непрерывные по t, x производные необходимых порядков [3–7, 15]. В качестве меры $\rho = \rho(\varphi)$, характеризующей отклонение функций $\varphi = (\varphi_1(x,t), \varphi_2(x,t))$ ($\varphi_2(x,t) = \partial\varphi_1(x,t)/\partial t$) от значения $\varphi = 0$ невозмущенного процесса, выберем [2–8]

$$\rho[\varphi] = \int\limits_0^1 \Big[\Big(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\Big)^2 + \varphi_1^2 + \varphi_2^2\Big]\,dx. \tag{7}$$

Пусть заранее заданы область возможных начальных состояний Ω_0 системы (1)–(6) в виде

$$\Omega_0 = \big\{\varphi\colon \quad \rho \leqslant \tilde{a}_1,\ \tilde{a}_1 > 0\big\}$$

и область допустимых текущих состояний $\Omega(t)$ системы (1)–(6) в форме

$$\Omega(t) = \big\{\varphi\colon \quad \rho \leqslant \eta(t),\ 0 < \eta(t) \leqslant \tilde{\eta},\ \tilde{\eta} = \mathrm{const} > 0\big\},$$

где $\tilde{a}_1$ — заданное число; $\eta(t)$ — функция, ограниченная в области $T_1 \subset I_1$. При этом справедливы условия

$$\tilde{a}_1 \leqslant \eta(t_0), \qquad \Omega_0 \subset \Omega(t_0), \qquad t_0 \in T_1.$$

Оптимальное управление, минимизирующее функционал

$$J_0 = \int\limits_0^T W\,d\tau + W_0 \qquad (T = N\mu^{-1}),$$

$$W = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \sum_{i=1}^2 w_{ii}(x,\xi)\varphi_i(x,t)\varphi_i(\xi,t)\,dx\,d\xi + \int\limits_0^1 \omega(x)u^2\,dx + \omega_S u_S^2,$$

$$W_0 = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \sum_{i=1}^2 \omega_{ii}(x,\xi)\varphi_i(x,T)\varphi_i(\xi,T)\,dx\,d\xi,$$

определяется на основе метода динамического программирования [9–11]. Здесь $w_{11} = w_{11}(x,\xi)$, $w_{22} = w_{22}(x,\xi)$, $\omega = \omega(x)$, $\omega_{11} = \omega_{11}(x,\xi)$, $\omega_{22} = \omega_{22}(x,\xi)$ — заданные весовые функции; $\omega(1) = \omega_S$.

Для отыскания оптимального функционала V_0 основного уравнения динамического программирования

$$V_0 = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \sum_{i,j=1}^2 v_{ij}(x,\xi,t)\varphi_i(x,t)\varphi_j(\xi,t)\,dx\,d\xi$$

имеем соотношение [11, 14]

$$K = \frac{dV_0}{dt} + W = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \Big\{\Big[\frac{\partial v_{11}}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(EI\,\frac{\partial^2(v_{21}/m)}{\partial x^2}\Big) - \frac{\partial}{\partial x}\Big(q\,\frac{\partial(v_{21}/m)}{\partial x}\Big) + \frac{\partial(b_1 v_{21}/m)}{\partial x} -$$

$$- \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\Big(EI\,\frac{\partial^2(v_{12}/m)}{\partial \xi^2}\Big) - \frac{\partial}{\partial \xi}\Big(q\,\frac{\partial(v_{12}/m)}{\partial \xi}\Big) + \frac{\partial(b_1 v_{12}/m)}{\partial \xi} + \omega_{11}\Big]\varphi_1(x,t)\varphi_1(\xi,t) +$$

$$+ \Big[\frac{\partial v_{12}}{\partial t} + v_{11}(x,\xi,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(EI\,\frac{\partial^2(v_{22}/m)}{\partial x^2}\Big) - \frac{\partial}{\partial x}\Big(q\,\frac{\partial(v_{22}/m)}{\partial x}\Big) +$$

$$+ \frac{\partial(b_1 v_{22}/m)}{\partial x} - \frac{a_1(\xi)}{m(\xi)}\,v_{12}(x,\xi,t)\Big]\varphi_1(x,t)\varphi_2(\xi,t) +$$

$$+ \Big[\frac{\partial v_{21}}{\partial t} + v_{11}(x,\xi,t) - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\Big(EI\,\frac{\partial^2(v_{22}/m)}{\partial \xi^2}\Big) - \frac{\partial}{\partial \xi}\Big(q\,\frac{\partial(v_{22}/m)}{\partial \xi}\Big) +$$

$$+ \frac{\partial(b_1 v_{22}/m)}{\partial \xi} - \frac{a_1(x)}{m(x)}\,v_{21}(x,\xi,t)\Big]\varphi_2(x,t)\varphi_1(\xi,t) +$$

$$+ \Big[\frac{\partial v_{22}}{\partial t} + v_{12}(x,\xi,t) + v_{21}(x,\xi,t) - v_{22}(x,\xi,t)\Big(\frac{a_1(x)}{m(x)} + \frac{a_1(\xi)}{m(\xi)}\Big) + w_{22}\Big]\varphi_2(x,t)\varphi_2(\xi,t)\Big\}\,dx\,d\xi -$$

$$- \int\limits_0^1 \Big\{\Big[EI(\xi)\,\frac{\partial^2(v_{12}/m)}{\partial \xi^2} + \frac{v_{12}(x,\xi,t)q(\xi)}{m(\xi)}\Big]\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} +$$

$$+\Big[-\frac{\partial}{\partial\xi}\Big(EI\,\frac{\partial^2(v_{12}/m)}{\partial\xi^2}\Big)+\frac{b_1(\xi)}{m(\xi)}\,v_{12}(x,\xi,t)-q(\xi)\,\frac{\partial(v_{12}/m)}{\partial\xi}\Big]\varphi_1(\xi,t)\Big\}_{\xi=0}^{\xi=1}\varphi_1(x,t)\,dx-$$

$$-\int\limits_0^1\Big\{\Big[EI(\xi)\,\frac{\partial^2(v_{22}/m)}{\partial\xi^2}+\frac{v_{22}(x,\xi,t)q(\xi)}{m(\xi)}\Big]\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi}+$$

$$+\Big[-\frac{\partial}{\partial\xi}\Big(EI\,\frac{\partial^2(v_{22}/m)}{\partial\xi^2}\Big)+\frac{b_1(\xi)}{m(\xi)}\,v_{22}(x,\xi,t)-q(\xi)\,\frac{\partial(v_{22}/m)}{\partial\xi}\Big]\varphi_1(\xi,t)\Big\}_{\xi=0}^{\xi=1}\varphi_2(x,t)\,dx-$$

$$-\int\limits_0^1\Big\{\Big[EI(x)\,\frac{\partial^2(v_{21}/m)}{\partial x^2}+\frac{v_{21}(x,\xi,t)q(x)}{m(x)}\Big]\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+$$

$$+\Big[-\frac{\partial}{\partial x}\Big(EI\,\frac{\partial^2(v_{21}/m)}{\partial x^2}\Big)+\frac{b_1(x)}{m(x)}\,v_{21}(x,\xi,t)-q(x)\,\frac{\partial(v_{12}/m)}{\partial x}\Big]\varphi_1(x,t)\Big\}_{x=0}^{x=1}\varphi_1(\xi,t)\,d\xi-$$

$$-\int\limits_0^1\Big\{\Big[EI(x)\,\frac{\partial^2(v_{22}/m)}{\partial x^2}+\frac{v_{22}(x,\xi,t)q(x)}{m(x)}\Big]\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+$$

$$+\Big[-\frac{\partial}{\partial x}\Big(EI\,\frac{\partial^2(v_{22}/m)}{\partial x^2}\Big)+\frac{b_1(x)}{m(x)}\,v_{22}(x,\xi,t)-q(x)\,\frac{\partial(v_{22}/m)}{\partial x}\Big]\varphi_1(x,t)\Big\}_{x=0}^{x=1}\varphi_2(\xi,t)\,d\xi+$$

$$+\int\limits_0^1\omega(x)u^2(x,t)\,dx+\int\limits_0^1\frac{\alpha(x)u(x,t)}{m(x)}\Big\{\int\limits_0^1[v_{12}(\xi,x,t)+v_{21}(x,\xi,t)]\varphi_1(\xi,t)\,d\xi+$$

$$+\int\limits_0^1[v_{22}(x,\xi,t)+v_{22}(\xi,x,t)]\varphi_2(\xi,t)\,d\xi\Big\}\,dx.$$

Функции $v_{ij}=v_{ij}(x,\xi,t)$ должны удовлетворять конечным условиям

$$v_{ij}(x,\xi,T)=0,\quad i\neq j,\qquad v_{ii}(x,\xi,T)=\omega_{ii}(x,\xi),\quad i=1,2 \tag{8}$$

и граничным условиям

$$\Big[EI(\xi)\,\frac{\partial^2(v_{12}/m)}{\partial\xi^2}+\frac{q(\xi)v_{12}(x,\xi,t)}{m(\xi)}\Big]_{\xi=0,\ \xi=1}=0,$$

$$\Big[-\frac{\partial}{\partial\xi}\Big(EI\,\frac{\partial^2(v_{12}/m)}{\partial\xi^2}\Big)-q(\xi)\,\frac{\partial(v_{12}/m)}{\partial\xi}+\frac{b_1(\xi)v_{12}(x,\xi,t)}{m(\xi)}\Big]_{\xi=0,\ \xi=1}=0,$$

$$\Big[EI(x)\frac{\partial^2(v_{21}/m)}{\partial x^2}+\frac{q(x)v_{12}(x,\xi,t)}{m(x)}\Big]_{x=0,\ x=1}=0,$$

$$\Big[-\frac{\partial}{\partial x}\Big(EI\,\frac{\partial^2(v_{21}/m)}{\partial x^2}\Big)-q(x)\,\frac{\partial(v_{21}/m)}{\partial x}+\frac{b_1(x)v_{21}(x,\xi,t)}{m(x)}\Big]_{x=0,\ x=1}=0, \tag{9}$$

$$\Big[EI(\xi)\,\frac{\partial^2(v_{22}/m)}{\partial\xi^2}+\frac{q(\xi)v_{22}(x,\xi,t)}{m(\xi)}\Big]_{\xi=0,\ \xi=1}=0,$$

$$\Big[-\frac{\partial}{\partial\xi}\Big(EI\,\frac{\partial^2(v_{22}/m)}{\partial\xi^2}\Big)-q(\xi)\,\frac{\partial(v_{22}/m)}{\partial\xi}+\frac{b_1(\xi)v_{22}(x,\xi,t)}{m(\xi)}\Big]_{\xi=0,\ \xi=1}=0,$$

$$
\Big[EI(x)\,\frac{\partial^2(v_{22}/m)}{\partial x^2}+\frac{q(x)v_{22}(x,\xi,t)}{m(x)}\Big]_{x=0,\ x=1}=0,
$$

$$
\Big[-\frac{\partial}{\partial x}\Big(EI\,\frac{\partial^2(v_{22}/m)}{\partial x^2}\Big)-q(x)\,\frac{\partial(v_{22}/m)}{\partial x}+\frac{b_1(x)v_{22}(x,\xi,t)}{m(x)}\Big]_{x=0,\ x=1}=0.
$$

Из условия $\min\limits_u(K)$ получаем оптимальное управление

$$
u=-\frac{\alpha(x)}{2\omega(x)m(x)}\int\limits_0^1\sum_{i=1}^2[v_{i2}(\xi,x,t)+v_{2i}(x,\xi,t)]\varphi_i(\xi,t)\,d\xi; \tag{10}
$$

$$
u_S=-\frac{1}{2\omega_S m(1)}\int\limits_0^1\sum_{i=1}^2[v_{i2}(\xi,1,t)+v_{2i}(1,\xi,t)]\varphi_i(\xi,t)\,d\xi. \tag{11}
$$

Здесь множители при функциях $\varphi_1(\xi,t)$, $\varphi_2(\xi,t)$ являются коэффициентами усиления обратной связи, которые представляют собой функции координат точек оси летательного аппарата. Смещения разных точек оси вносят разный вклад в величину управления в зависимости от того, где расположена точка оси [11].

Выражения (10), (11) являются уравнениями регулятора, замыкающими систему (1)–(6), и представляют собой линейный оператор на множестве форм смещений оси от прямолинейной и их скоростей. Для реализации (10), (11) требуется измерить значения $\varphi_1(\xi,t)$, $\varphi_2(\xi,t)$ в каждой точке оси и в каждый момент времени. Для измеренных значений $\varphi_1(\xi,t)$, $\varphi_2(\xi,t)$ в дискретных точках $\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_S$ по правилу трапеции из (10), (11) получим [9–11]

$$
\begin{gathered}
u=-\frac{\alpha(x)}{2\omega(x)m(x)S}\sum_{j=0}^S\sum_{i=1}^2 d_j[v_{i2}(\xi_j,x,t)+v_{2i}(x,\xi_j,t)]\varphi_i(\xi_j,t),\\
u_S=-\frac{1}{2\omega_S m(1)S}\sum_{j=0}^S\sum_{i=1}^2 d_j[v_{i2}(\xi_j,1,t)+v_{2i}(1,\xi_j,t)]\varphi_i(\xi_j,t),\\
d_0=d_S=1/2,\qquad d_j=1,\qquad j\ne 0,S.
\end{gathered} \tag{12}
$$

Управляющие усилия пропорциональны отклонениям $\varphi_1(\xi_j,t)$ и $\varphi_2(\xi_j,t)$, $j=0,1,2,\dots,S$.

Регулятор (10), (11) обладает коэффициентом усиления, переменным по оси x и по времени. Уравнения (10), (11) не только являются оптимальными уравнениями регулятора, но и определяют структуру регулятора. Из этих уравнений следует закон формирования управляющего воздействия по распределенным значениям отклонений $\varphi_1(x,t)$ и их скоростей $\varphi_2(x,t)$ в заданный момент времени.

Если закон распределения управления вдоль оси летательного аппарата задан, а требуется определить оптимальную зависимость от времени, то (10) следует заменить на уравнение вида [9–11]

$$
u=-\frac{1}{2\omega_0}\int\limits_0^1\sum_{i=1}^2\varphi_i(\xi,t)\int\limits_0^1\frac{\alpha(x)}{m}[v_{i2}(\xi,x,t)+v_{2i}(x,\xi,t)]\,dx\,d\xi,\qquad \omega_0=\int\limits_0^1\omega(x)\,dx>0. \tag{13}
$$

Согласно (1) закон распределения управляющих усилий вдоль оси имеет вид $\alpha(x)u(t)/m(x)$. Если $\alpha=0$ при $x\in[0,a)$ и $\alpha/m=1$ при $x\in[a,1)$, то управление $u(t)$ равномерно распределено по части $x\in[a,1]$ оси летательного аппарата. Вне этой части оси управляющее усилие отсутствует.

Симметричные функции $v_{ij} = v_{ij}(x,\xi,t)$, входящие в управления (10), (12), (13), как следует из условия $K = 0$, должны удовлетворять системе нелинейных интегро-дифференциальных уравнений [9–11, 14] при конечных и граничных условиях (8), (9)

$$\frac{\partial v_{11}}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(EI\,\frac{\partial^2(v_{21}/m)}{\partial x^2}\Big) - \frac{\partial}{\partial x}\Big(q\,\frac{\partial(v_{21}/m)}{\partial x}\Big) + \frac{\partial(b_1 v_{21}/m)}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\Big(EI\,\frac{\partial^2(v_{12}/m)}{\partial \xi^2}\Big) - \\ - \frac{\partial}{\partial \xi}\Big(q\,\frac{\partial(b_1 v_{12}/m)}{\partial \xi}\Big) + \frac{\partial(b_1 v_{12}/m)}{\partial \xi} + w_{11} - R_{11} - \bar R_{11} = 0,$$

$$\frac{\partial v_{12}}{\partial t} + v_{11} - \frac{a_1(\xi)}{m(\xi)}\,v_{12} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(EI\,\frac{\partial^2(v_{22}/m)}{\partial x^2}\Big) - \frac{\partial}{\partial x}\Big(q\,\frac{\partial(v_{22}/m)}{\partial x}\Big) + \frac{\partial(b_1 v_{22}/m)}{\partial x} - R_{12} - \bar R_{12} = 0, \tag{14}$$

$$\frac{\partial v_{21}}{\partial t} + v_{11} - \frac{a_1(x)}{m(x)}\,v_{21} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\Big(EI\,\frac{\partial^2(v_{22}/m)}{\partial \xi^2}\Big) - \frac{\partial}{\partial \xi}\Big(q\,\frac{\partial(v_{22}/m)}{\partial \xi}\Big) + \frac{\partial(b_1 v_{22}/m)}{\partial \xi} - R_{21} - \bar R_{21} = 0,$$

$$\frac{\partial v_{22}}{\partial t} + v_{12} + v_{21} - \Big[\frac{a_1(x)}{m(x)} + \frac{a_1(\xi)}{m(\xi)}\Big]v_{22} + w_{22} - R_{22} - \bar R_{22} = 0.$$

Здесь R_{ij} в случае управления (10) имеет вид

$$R_{ij} = \frac{1}{4}\int\limits_0^1 \frac{\alpha^2(\eta) r_{ij}(t,\xi,\eta,x,y)}{\omega(\eta)m^2(\eta)}\,d\eta,$$

а в случае управления (13)

$$R_{ij} = \frac{1}{4\omega_0^2}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \frac{\alpha(y)\alpha(\eta)}{m(y)m(\eta)}\,r_{ij}(t,\xi,\eta,x,y)\,dy\,d\eta, \qquad \bar R_{ij} = -\frac{1}{4\omega_S m^2(1)}\,r_{ij}(t,\xi,1,x,1),$$

$$r_{11}(t,\xi,\eta,x,y) = [v_{12}(\xi,\eta,t) + v_{21}(\eta,\xi,t)][v_{12}(x,y,t) + v_{21}(y,x,t)],$$
$$r_{21}(t,\xi,\eta,x,y) = [v_{12}(\xi,\eta,t) + v_{21}(\eta,\xi,t)][v_{22}(x,y,t) + v_{22}(y,x,t)],$$
$$r_{12}(t,\xi,\eta,x,y) = [v_{22}(\xi,\eta,t) + v_{22}(\eta,\xi,t)][v_{12}(x,y,t) + v_{21}(y,x,t)],$$
$$r_{22}(t,\xi,\eta,x,y) = [v_{22}(\xi,\eta,t) + v_{22}(\eta,\xi,t)][v_{22}(x,y,t) + v_{22}(y,x,t)].$$

Отыскание точного решения для системы уравнений (14) проблематично в силу ее нелинейности и переменности коэффициентов. Поэтому для решения задачи о технической устойчивости исходного процесса (1)–(6) при (10), (11) применим метод сравнения [1–8, 17, 18]. Полагаем, что процессу (1)–(6), (10), (11) поставлен в соответствие функционал Ляпунова $V[\varphi,t]$, который уточняется ниже.

Рассматриваемый управляемый процесс будем считать технически устойчивым согласно следующим определениям.

Определение 1. Управляемый динамический процесс, описываемый краевой задачей (1)–(6), (10), (11), называется технически устойчивым на заданном ограниченном временном промежутке $T_1 \subset I_1$ по заданным мере $\rho[\varphi]$ и функционалу Ляпунова $V[\varphi,t]$, если при допустимых непрерывных управлениях u вида (10), (11) вдоль возмущенных решений $\varphi(x,t)$ краевой задачи (1)–(6), (10), (11) для положительно-определенного относительно меры $\rho[\varphi]$ функционала $V[\varphi,t]$ выполняется условие

$$V[\varphi(x,t),t] \leqslant A(t) \qquad \forall t\in T_1, \quad \forall x\in D,$$

если в начальный момент времени t_0 справедливо неравенство

$$V[\varphi_0(x), t_0] \leqslant b, \qquad t_0 \in T_1 \quad \forall x \in D, \tag{15}$$

где значение $V[\varphi_0(x), t_0]$ определено на начальных данных (6), а заранее выбранная постоянная $b > 0$ и ограниченная функция $A(t)$, заданная на интервале времени $T_1 \subset I_1$, удовлетворяют условиям $A(t) \leqslant \eta(t)$, $A(t_0) \geqslant b$, $0 < A(t) \leqslant \bar{A}$, $\bar{A} = \mathrm{const} > 0$, $0 < \eta(t) \leqslant \tilde{\eta}$, $\tilde{\eta} = \mathrm{const} > 0$, $t_0 \in T_1$, $t \in T_1$.

Определение 2. Если условия определения 1 выполняются на любом интервале времени $T_1 \subseteq I_1$, то управляемый динамический процесс (1)–(6), (10), (11) называется технически устойчивым по заданным мере $\rho[\varphi]$ и функционалу Ляпунова $V[\varphi, t]$ на бесконечном интервале времени I_1.

Определение 3. Если при выполнении условий определения 2 дополнительно вдоль решений краевой задачи (1)–(6), (10), (11) справедливо условие

$$\lim_{t \to +\infty} V[\varphi(x,t), t] = 0,$$

то исходный управляемый динамический процесс (1)–(6), (10), (11) называется технически асимптотически устойчивым по заданным мере $\rho[\varphi]$ и функционалу Ляпунова $V[\varphi, t]$.

Определение 4. Управляемый динамический процесс с переменной структурой (1)–(6), (10), (11) называется технически неустойчивым по мере $\rho[\varphi]$ и заданному функционалу Ляпунова $V[t, \varphi]$ в области T_1 или I_1 при заданных постоянной b, функциях $A(t)$, $\eta(t)$, если при выполнении условия (15), определенного на начальных данных (6), для решений $\varphi(x,t)$ краевой задачи (1)–(6), (10), (11) при допустимых управлениях u (10), (11) найдется значение $t_1 \in T_1$ или $t_1 \in I_1$ ($t_1 > t_0$) такое, что выполняется неравенство

$$V[\varphi(x, t_1), t_1] > \tilde{\eta}, \qquad \tilde{\eta} = \mathrm{const} > 0.$$

Из определений 1–4 следует, что формулируемые условия технической устойчивости характеризуются не только тем, что заданный управляемый процесс с распределенными параметрами рассматривается на заранее заданном ограниченном интервале времени, но и тем, что ограничения на начальные состояния исходного процесса не зависят от условий мажорирования последующих состояний регулируемого процесса на заданном промежутке времени. Необязательность условия отрицательной определенности или неположительности полной производной функционала Ляпунова на состояниях исходного процесса в отличие от устойчивости по Ляпунову расширяет область значений параметров исходного процесса [1, 3–8].

Условия технической устойчивости динамических состояний упругого летательного аппарата на заданном интервале времени. Для изучения свойств технической устойчивости рассматриваемого процесса зададим функционал [7]

$$V[\varphi, t] = \int\limits_0^1 \Big[\Big(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2}\Big)^2 - P\Big(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}\Big)^2\Big]\, dx,$$
$$P = \bar{Q}_1 + a_1^0 + b_1^0, \qquad \bar{Q}_1 = \sup_x(\bar{Q}), \qquad a_1^0 = \sup_x(a_1), \qquad b_1^0 = \sup_x(b_1). \tag{16}$$

Ставится следующая задача: при заданном оптимальном управлении u (10), u_S (11), удовлетворяющем соотношениям (8), (9) и уравнениям (14), определить условия, обеспечивающие выполнение свойства

$$\varphi(x,t) \in \Omega(t), \qquad t \in T_1, \quad x \in D$$

относительно меры $\rho = \rho[\varphi]$ (7) для решений $\varphi(x,t)$ задачи (1)–(6), (10), (11) при заданных начальных значениях

$$\varphi_0(x) \in \Omega_0, \qquad t_0 \in T_1 \quad \forall x \in D.$$

Для функционала V (16) имеем оценку снизу

$$3V[\varphi,t] \geqslant \pi^2 \int\limits_0^1 dx\Big(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\Big)^2 - P\int\limits_0^1 dx\Big(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\Big)^2 + 2\int\limits_0^1 dx\Big(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\Big)^2 - \frac{2}{\pi^2}\,P\int\limits_0^1 dx\Big(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\Big)^2 +$$

$$+ (1-P)\int\limits_0^1 dx\Big(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\Big)^2 \geqslant (1-P)\Big[\sup_x(\varphi_1)^2 + \sup\Big(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\Big)\Big] + \int\limits_0^1 dx\Big(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\Big)^2 -$$

$$- \frac{1}{\pi^2}\,P\int\limits_0^1 dx\Big(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\Big)^2 + (1-P)\int\limits_0^1 dx\Big(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\Big)^2 \leqslant$$

$$\leqslant (1-P)\Bigg[\sup(\varphi_1)^2 + \sup_x\Big(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\Big)^2 + \int\limits_0^1 dx\Big(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\Big)^2 + \int\limits_0^1 dx\Big(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\Big)^2\Bigg] \geqslant (1-P)\rho(\varphi).$$

Следовательно,

$$V[\varphi,t] \geqslant (1/3)(1-P)\rho(\varphi). \tag{17}$$

Согласно (17) функционал $V[\varphi,t]$ (16) положительно определен при условии $0 < 1-P \leqslant 1$.

Для исследуемых динамических процессов имеет смысл рассматривать случай

$$0 < 1-P < 1. \tag{18}$$

Величина $\mu = 1-P$ является малым положительным параметром: $\mu \in (0,1)$. Условие (18) справедливо при выполнении неравенства [9–11]

$$l(\tilde{Q} + \tilde{a}\sqrt{gl} + \tilde{b}) < G \qquad \forall x \in D. \tag{19}$$

С помощью параметра μ, определенного согласно (17)–(19), зададим конечный промежуток времени T_1, на котором в соответствии с (1) рассмотрим динамическое поведение системы: $T_1 = [t_0, N\mu^{-1}]$, где $t_0 \geqslant 0$; $N = \text{const} > 0$ — величина, характеризующая надежность системы.

Пусть заданы функции $A(t)$, $\eta(t)$ вида

$$A(t) = \frac{M}{2}\exp\Big(-\frac{1}{\mu+t}\Big)\Big[\exp\Big(\frac{2}{\mu+t_0}\Big) - \exp\Big(\frac{2}{\mu+t}\Big)\Big] + y_0\exp\Big(-\frac{1}{\mu+t}\Big)\exp\Big(\frac{1}{\mu+t_0}\Big),$$

$$\eta(t) = \exp\Big(-\frac{1}{\mu+t}\Big)\Big\{\frac{\tilde{M}}{2}\Big[\exp\Big(\frac{2}{\mu+t_0}\Big) - \exp\Big(\frac{2}{\mu+t}\Big)\Big] + b\exp\Big(\frac{1}{\mu+t_0}\Big)\Big\} \leqslant \tilde{\eta}, \tag{20}$$

$$M, \tilde{M}, \tilde{\eta} = \text{const} > 0, \qquad M \leqslant \tilde{M}$$

при условиях

$$0 < y_0 \leqslant b, \qquad b = \text{const} > 0, \qquad y_0 = \text{const} > 0. \tag{21}$$

Определим с помощью функционала V (16) множество [1, 2, 8]

$$C_{y_0} = \big\{\varphi\colon \quad V[\varphi,t] \leqslant y_0 \quad \forall t \in T_1,\ \forall x \in D\big\},$$

которое по предположению удовлетворяет условию

$$\Omega_0 \subset C_{y_0} \quad \text{при} \quad t = t_0. \tag{22}$$

Вычислим полную производную по t от функционала V (16) вдоль решений краевой задачи (1)–(6) при управлении (10), (11):

$$\frac{dV[\varphi(x,t),t]}{dt} = \frac{m(1)+EI(1)}{EI(1)m^2(1)}\,\varphi_2(t,1)\,\frac{1}{\omega_S}\int\limits_0^1 \sum_{i=1}^{2}[v_{i2}(\xi,1,t)+v_{2i}(\xi,1,t)]\varphi_i(\xi,t)\,d\xi + {}$$
$$+ 2\int\limits_0^1 dx\Big[\Big(\frac{1}{m}\,\frac{\partial}{\partial x}\Big(EI(x)\,\frac{\partial^2\varphi_1(x,t)}{\partial x^2}\Big) - P\,\frac{\partial\varphi_1(x,t)}{\partial x}\Big)\frac{\partial\varphi_2(x,t)}{\partial x} + {}$$
$$+ \Big(\frac{\partial^4\varphi_1(x,t)}{\partial x^4} - \frac{a_1(x)}{m(x)}\,\varphi_2(x,t) - \frac{b_1(x)}{m(x)}\,\frac{\partial\varphi_1(x,t)}{\partial x} - \frac{1}{m(x)}\,\bar{Q}(x)\Big)\varphi_2(x,t) - {}$$
$$- \frac{\alpha^2(x)}{2\omega(x)m^2(x)}\,\varphi_2(x,t)\int\limits_0^1 \sum_{i=1}^{2}[v_{i2}(\xi,x,t)+v_{2i}(x,\xi,t)]\varphi_i(\xi,t)\,d\xi\Big]. \tag{23}$$

Рассмотрим систему (1)–(6), (10), (11) в заданной области

$$\bar{\Omega} = \Big\{t, x, \varphi_i, \frac{\partial\varphi_i}{\partial t}, \frac{\partial^k\varphi_1}{\partial x^k}, \frac{\partial^i\varphi_2}{\partial x^i}, m(x), \bar{Q}(x), P, a_1, b_1, \omega, v_{ij}, EI(x), \frac{\partial(EI)}{\partial x}:$$
$$t \in T_1,\ x \in D, |\varphi_i| \leqslant n_i,\ \Big|\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}\Big| \leqslant l_i,\ \Big|\frac{\partial^k\varphi_1}{\partial x^k}\Big| \leqslant c_k,\ \Big|\frac{\partial^i\varphi_2}{\partial x^i}\Big| \leqslant \gamma_i,\ m_{\min} \leqslant m(x) \leqslant m_{\max},$$
$$0 \leqslant \bar{Q}(x) \leqslant \bar{Q}_{\max},\ 0 \leqslant P < 1,\ a_{1\,\min} \leqslant a_1 \leqslant a_{1\,\max},\ b_{1\,\min} \leqslant b_1 \leqslant b_{1\,\max},$$
$$0 < \omega_{\min} \leqslant \omega \leqslant \omega_{\max},\ |v_{ij}| \leqslant \theta_{ij},\ 0 < EI \leqslant K_1 \equiv \max_x(EI),\ \Big|\frac{\partial(EI)}{\partial x}\Big| \leqslant K_2;$$
$$c_k, \gamma_i, m_{\min}, m_{\max}, b_{1\,\min}, b_{1\,\max}, \bar{Q}_{\max}, \omega_{\min}, \omega_{\max}, K_1, K_2 = \text{const} > 0,$$
$$i = 1, 2,\ j = 1, 2,\ k = 1, \dots, 4\Big\}.$$

Выражение, стоящее в правой части равенства (23), обозначим через $M(t)$. Рассмотрим функцию

$$\bar{\Phi}(t) = M(t) - (\mu/(3(\mu+t)^2))\rho(\varphi(x,t)). \tag{24}$$

Пусть функция $\bar{\Phi}(t)$ (24) удовлетворяет условию

$$|\bar{\Phi}(t)| \leqslant \Phi(t) \equiv M\exp(1/(\mu+t))/(\mu+t)^2, \tag{25}$$

где $M = \text{const} > 0$ — заданная величина. В частности, $|M(t)| \leqslant M$,

$$M \equiv \frac{m(1)+EI(1)}{EI(1)m^2(1)}\,n_2\,\frac{1}{\omega_S}\sum_{i=1}^{2}[\theta_{i2}+\theta_{2i}]n_i + 2\Big[\Big(\frac{1}{m_{\min}}\,K_2c_2 + \frac{1}{m_{\min}}\,K_1c_3 + c_1\Big)\gamma_1 + {}$$
$$+ \Big(c_4 + \frac{a_{1\,\max}}{m_{\min}}\,n_2 + \frac{b_{1\,\max}}{m_{\min}}\,c_1 + \frac{\bar{Q}_{\max}}{m_{\min}}\Big)n_2 + \frac{1}{2\omega_{\min}m_{\min}^2}\,c_2\sum_{i=1}^{2}[\theta_{i2}+\theta_{2i}]n_i\Big] \leqslant \tilde{M}.$$

В области T_1 существует интеграл $\sigma(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(\tau)\,d\tau$. Рассмотрим функцию $z(t) = V[\varphi(x,t),t] - \sigma(t)$ вдоль решений задачи (1)–(6), (10), (11). При указанных выше условиях оценки для dV/dt вдоль решений этой задачи приводят к неравенству [7, 15, 17, 18]

$$\frac{dz(t)}{dt} \leqslant \frac{\mu}{(\mu+t)^2}\,[z(t)+\sigma(t)]. \tag{26}$$

Из (26) следует задача Коши сравнения вида [2–8, 17]

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{(\mu+t)^2}\,[y+\sigma(t)], \qquad t \in T_1; \tag{27}$$

$$y(t_0) = y_0 \geqslant V_0 \equiv V[\varphi_0(x),t_0], \qquad t_0 \in T_1 \quad \forall x \in D. \tag{28}$$

При указанных выше условиях задача (27), (28) в области T_1 имеет непрерывное решение

$$y(t) = \frac{M}{2}\,\exp\Big(-\frac{1}{\mu+t}\Big)\Big[\exp\Big(\frac{2}{\mu+t_0}\Big) - \exp\Big(\frac{2}{\mu+t}\Big)\Big] + \\ + y_0 \exp\Big(\frac{1}{\mu+t_0}\Big)\exp\Big(-\frac{1}{\mu+t}\Big) - \sigma(t). \tag{29}$$

Используя (29) и соответствующую теорему о дифференциальных неравенствах [17, 18], находим

$$z(t) < y(t), \qquad t \in T_1. \tag{30}$$

Из (30) вдоль решения задачи (1)–(6), (10), (11) при условиях (18), (19) имеем

$$V(t) \leqslant y(t) + \sigma(t), \qquad t \in T_1. \tag{31}$$

Из (29), (31) получаем неравенства

$$V(t) \leqslant A(t) \leqslant \eta(t), \qquad A(t) \equiv \bar{y}(t) + \sigma(t). \tag{32}$$

При $t \in T_1$ имеем

$$\begin{gathered} A(t) \leqslant \frac{M}{2}\,\exp\Big(-\frac{1}{\mu+N\mu^{-1}}\Big)\Big[\exp\Big(\frac{2}{\mu+t_0}\Big) - \exp\Big(\frac{2}{\mu+N\mu^{-1}}\Big)\Big] + \\ + y_0 \exp\Big(-\frac{1}{\mu+N\mu^{-1}}\Big)\exp\Big(\frac{1}{\mu+t_0}\Big), \\ \eta(t) \leqslant \exp\Big(-\frac{1}{\mu+N\mu^{-1}}\Big)\Big\{\frac{M}{2}\Big[\exp\Big(\frac{2}{\mu+t_0}\Big) - \exp\Big(\frac{2}{\mu+N\mu^{-1}}\Big)\Big] + b\exp\Big(\frac{1}{\mu+t_0}\Big)\Big\} \leqslant \tilde{\eta}, \\ A(t_0) \equiv b, \qquad V_0 \leqslant b \end{gathered} \tag{33}$$

вдоль решения задачи (1)–(6), (10), (11) при условиях (18), (19).

Из неравенств (32), (33) получаем [2, 18]

$$C_{A(t)} \subset \Omega(t), \qquad C_{A(t)} = \big\{\varphi\colon\quad V[\varphi,t] \leqslant A(t) \quad \forall t \in T_1,\ \forall x \in D\big\}. \tag{34}$$

Из соотношения (34) и условия (22) с учетом (18), (19), (21), (28) следует, что исходный процесс (1)–(6) при $\varphi_0 \in \Omega_0$, управлении (10), (11) и условиях (8), (9), (14) технически устойчив по заданным мере ρ (7) и функционалу Ляпунова V (16) на ограниченном интервале времени T_1 [1–8].

При $t \to +\infty$ и условии (20) справедлива оценка $A(t) \leqslant \eta(t)$. Оценка

$$A(t) \leqslant A, \qquad A \equiv (M/2)[\exp(2/(\mu + t_0)) - 1] + y_0 \exp(1/(\mu + t_0))$$

справедлива при любых $T_1 \subseteq I_1$, что следует из (32) при $t \to +\infty$. Таким образом, процесс (1)–(6), (10), (11) при $\varphi_0 \in \Omega_0$ технически устойчив на бесконечном интервале времени I_1 по заданным мере ρ и функционалу Ляпунова V. При заданной функции $\Phi(t)$ вида (25) условие асимптотической технической устойчивости исходного процесса не выполняется [1, 3–8, 18].

Указанные условия технической устойчивости исходного управляемого процесса (1)–(6), (10), (11) нарушаются, если параметры Q_0, $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ удовлетворяют неравенству $P \geqslant 1$, которое согласно (16), (18), (19) равносильно неравенству [1, 3–8]

$$(l/G)(Q_0 + \tilde{a}\sqrt{gl} + \tilde{b}) \geqslant 1 \qquad \forall x \in D, \tag{35}$$

так как в этом случае условие положительной определенности (17) для функционала (16) не выполняется. Исходная система (1)–(6) при $\varphi_0 \in \Omega_0$, управлении (10), (11) и условиях (8), (9), (14) будет технически неустойчивой в T_1 или I_1 по мере ρ и функционалу Ляпунова V, если в этих областях функция $A(t)$ удовлетворяет условию

$$A(t) \to +\infty \qquad \text{при} \quad t \in T_1 \quad \text{или} \quad t \in I_1. \tag{36}$$

В частности, условие (36) выполняется при $t_0 = 0$ и произвольных значениях $t \geqslant 0$, когда $\mu \to 0$, что, как следует из условий (18), (19), соответствует резкому увеличению параметров, характеризующий исходный управляемый процесс (1)–(6), (10), (11), например резкому увеличению приращения поперечной нагрузки Q_0 за счет искривления продольной оси системы в вертикальном полете. В последнем случае критическое значение Q_0^{cr} приращения поперечной нагрузки за счет искривления продольной оси системы определяется с помощью неравенства (35):

$$Q_0^{cr} = G/l - \tilde{a}\sqrt{gl} - \tilde{b}. \tag{37}$$

Из (37) следует явная зависимость приращения поперечной нагрузки на вертикально движущуюся систему от других основных параметров.

Пусть при указанных выше свойствах (16)–(29) справедливо условие

$$\theta^{-1} A(t) \leqslant \eta(t), \qquad \theta = (1 - P)/3. \tag{38}$$

В частности, свойство (38) имеет место при предположении, что выполнены неравенства

$$\theta^{-1} z_0 \leqslant b, \qquad \theta^{-1} M \leqslant \tilde{M}. \tag{39}$$

Тогда вдоль решения задачи (1)–(6), (10), (11) относительно меры ρ (7) получаем оценку

$$\rho[\varphi(x,t)] \leqslant \eta(t), \qquad t \in T_1 \subseteq I_1. \tag{40}$$

Следовательно, при принятых предположениях (7), (15)–(34) и дополнительных условиях (38), (39) исходный процесс (1)–(6), (10), (11) $\forall t \in T_1 \subseteq I_1$ и при выполнении свойства (40) является технически устойчивым по заданной мере ρ (7) на конечном или бесконечном интервалах времени [1, 3–8, 17].

Условия асимптотической технической устойчивости упругой летательной системы. При управлении u (10), u_S (11) и условиях (8), (9), (14) рассмотрим функции

$$\Phi_1(t, \varphi(x,t), u_S) = \frac{m(1) + EI(1)}{EI(1)m^2(1)}\, \varphi_2(1,t)\, \frac{1}{\omega_S} \int\limits_0^1 \sum_{i=1}^{2} [v_{i2}(\xi,1,t) + v_{2i}(1,\xi,t)]\varphi_i(\xi,t)\, d\xi +$$

$$+ 2\int\limits_0^1 dx\Big[\Big(\frac{1}{m}\,\frac{\partial}{\partial x}\Big(EI(x)\,\frac{\partial^2\varphi_1(x,t)}{\partial x^2}\Big)\Big)\frac{\partial\varphi_2(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial^4\varphi_1(x,t)}{\partial x^4}\,\varphi_2(x,t)\Big]; \quad (41)$$

$$\Phi_2(t,\varphi(x,t),u) = -2\int\limits_0^1 dx\Big[P\,\frac{\partial\varphi_1(t,x)}{\partial x}\,\frac{\partial\varphi_2(t,x)}{\partial x} + \frac{a_1(x)}{m(x)}\,\varphi_2^2(t,x) +$$

$$+ \frac{b_1(x)}{m(x)}\,\frac{\partial\varphi_1(t,x)}{\partial x}\,\varphi_2(t,x) + \frac{1}{m(x)}\,\bar{Q}(x)\varphi_2(x,t) +$$

$$+ \frac{\alpha^2(x)}{2\omega(x)m^2(x)}\,\varphi_2(x,t)\int\limits_0^1\sum_{i=1}^{2}[v_{i2}(\xi,x,t)+v_{2i}(x,\xi,t)]\varphi_i(\xi,t)\,d\xi\Big],$$

предполагая их существование в области I_1. Пусть для функций $\Phi_1(t,\varphi(x,t),u_S)$, $\Phi_2(t,\varphi(x,t),u)$ при справедливости свойств (8), (9), (14) на решении исходной задачи (1)–(6), (10), (11) выполняются условия

$$\Phi_2(t,\varphi(x,t),u) \leqslant -V[\varphi(x,t),t], \qquad t\in T_1\subseteq I_1; \quad (42)$$

$$|\Phi_1(t,\varphi(x,t),u_S)| \leqslant Mm_1(t), \qquad t\in T_1\subseteq I_1, \quad (43)$$

где $m_1(t)$ — ограниченная функция, для которой существуют интегралы

$$\sigma(t) = M\int\limits_{t_0}^{t} m_1(\tau)\,d\tau,\quad t\in T_1\subseteq I_1,\qquad \sigma_1(t) = \int\limits_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\tau}m_1(\tau)\,d\tau,\quad t\in T_1\subseteq I_1. \quad (44)$$

В качестве функций $A(t)$, $\eta(t)$ при условиях (44) выберем

$$A(t) = \mathrm{e}^{-(t-t_0)}\Big[y_0 + M\mathrm{e}^{-t_0}\int\limits_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\tau}m_1(\tau)\,d\tau\Big],$$

$$\eta(t) = \mathrm{e}^{-(t-t_0)}\Big[\tilde{M}\mathrm{e}^{-t_0}\int\limits_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\tau}m_1(\tau)\,d\tau + b\Big],\quad M\leqslant\tilde{M}. \quad (45)$$

Используя вдоль решений задачи (1)–(6), (10), (11) неравенство вида

$$\frac{dV(t)}{dt} \leqslant -V(t) + Mm_1(t), \qquad t\in T_1\subseteq I_1,$$

рассмотрим систему сравнения

$$\frac{dy}{dt} = -[y+\sigma(t)], \qquad t\in T_1\subseteq I_1; \quad (46)$$

$$y(t_0) = y_0 \geqslant V_0 \equiv V[\varphi_0(x),t_0], \qquad 0<y_0\leqslant b,\quad t\in T_1\subseteq I_1\quad \forall x\in D. \quad (47)$$

Решение для (46), (47) имеет вид

$$\bar{y}(t) = \mathrm{e}^{-(t-t_0)}\Big[y_0 + M\mathrm{e}^{-t_0}\int\limits_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\tau}m_1(\tau)\,d\tau\Big] - \sigma(t).$$

При выполнении (44), (45) вдоль решений системы (1)–(6), (10), (11) получим

$$V(t) \leqslant A(t) \leqslant \eta(t), \qquad A(t) \equiv \bar{y}(t) + \sigma(t). \tag{48}$$

Если функция $A(t)$ (45) ограничена при $t \to +\infty$, то процесс (1)–(6), (10), (11) технически устойчив на неограниченном временном интервале I_1 относительно меры ρ и функционала Ляпунова V. Если для функций $\sigma(t)$, $\sigma_1(t)$ (44) имеем $\lim\limits_{t\to+\infty} A(t) = 0$, то процесс (1)–(6), (10), (11) асимптотически технически устойчив по заданным мере ρ и функционалу Ляпунова V.

Рассмотрим различные случаи поведения функции $m_1(t)$ при $t \to \infty$. Пусть в (42), (43)

$$m_1(t) = \mathrm{e}^{-nt} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty, \quad n \geqslant 2 \tag{49}$$

(n — натуральное число). Тогда для (1)–(6), (10), (11) используем в (48) функции $A(t)$, $\eta(t)$ вида

$$\begin{gathered} A(t) = \mathrm{e}^{-(t-t_0)}\Big[y_0 + M\mathrm{e}^{-t_0}\,\frac{1}{n-1}\Big(\mathrm{e}^{-(n-1)t_0} - \mathrm{e}^{-(n-1)t}\Big)\Big], \\ \eta(t) = \mathrm{e}^{-(t-t_0)}\Big(b + \tilde{M}\,\frac{1}{n-1}\,\mathrm{e}^{-nt_0}\Big) \leqslant \tilde{\eta}, \quad M \leqslant \tilde{M}. \end{gathered} \tag{50}$$

Если $m_1(t) = \exp(1/(\mu + t) - t)/(\mu + t)^2 \to 0$ при $t \to +\infty$, $\mu \in (0, 1)$, то в (48) для $A(t)$, $\eta(t)$ используем функции

$$\begin{gathered} A(t) = \mathrm{e}^{-(t-t_0)}\Big\{y_0 + M\mathrm{e}^{-t_0}\Big[\exp\Big(\frac{1}{\mu + t_0}\Big) - \exp\Big(\frac{1}{\mu + t}\Big)\Big]\Big\}, \\ \eta(t) = \mathrm{e}^{-(t-t_0)}\Big[b + \tilde{M}\exp\Big(\frac{1}{\mu + t_0} - t_0\Big)\Big] \leqslant \tilde{\eta}, \quad M \leqslant \tilde{M}. \end{gathered} \tag{51}$$

Согласно определению 3 соотношения (48)–(51) обеспечивают асимптотическую техническую устойчивость нестационарного нелинейного упругого управляемого процесса (1)–(6), (10), (11) по заданным мере ρ и функционалу Ляпунова V. Легко убедиться, что в случае справедливости соотношений (42)–(44) оценка (40) относительно меры ρ (7) также справедлива при условиях (38), (39) на решении исходного процесса.

Если функции $\Phi_1(t, \varphi(x,t), u_S)$, $\Phi_2(t, \varphi(x,t), u)$ удовлетворяют условию

$$\Phi_1(t, \varphi(x,t), u_S) \leqslant -\Phi_2(t, \varphi(x,t), u) \qquad \forall t \in I_1, \tag{52}$$

то согласно (23) управляемый динамический процесс (1)–(6), (10), (11) устойчив по Ляпунову. Следовательно, сформулированные выше достаточные условия технической устойчивости исходного управляемого процесса (1)–(6), (10), (11) на неограниченном интервале времени включают, согласно (41), (42), (52), условия устойчивости заданного процесса в смысле Ляпунова относительно меры ρ (7).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Абгарян К. А.** Устойчивость движения на конечном интервале времени. М.: ВИНИТИ, 1976. С. 43–127. (Итоги науки и техники. Сер. Общая механика; Т. 3).
2. **Байрамов Ф. Д.** Обеспечение технической устойчивости управляемых систем // Проблемы аналитической механики, устойчивости и управления движением. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1991. С. 134–144.
3. **Матвийчук К. С.** О методе сравнения для дифференциальных уравнений, близких к гиперболическим // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20, № 11. С. 2009–2011.

4. **Матвийчук К. С.** Техническая устойчивость параметрически возбуждаемых распределенных процессов // Прикл. математика и механика. 1986. Т. 50, вып. 2. С. 210–218.
5. **Матвийчук К. С.** О технической устойчивости движения панели в газовом потоке // ПМТФ. 1988. № 6. С. 93–99.
6. **Матвийчук К. С.** Техническая теория параметрически возбуждаемых панелей в газовом потоке // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1990. № 4. С. 122–131.
7. **Матвийчук К. С.** Техническая устойчивость динамических состояний протяженного стержня с переменным сечением, продольно движущегося в жидкости // ПМТФ. 1992. № 5. С. 97–105.
8. **Matviychuk K. S.** On technical stability of forced automatic control systems with variable structure // J. Appl. Mech. 2001. V. 37, N 3. P. 312–324.
9. **Сиразетдинов Т. К.** Об оптимальном управлении летательными аппаратами // Автоматика и телемеханика. 1966. № 7. С. 29–36.
10. **Сиразетдинов Т. К.** К задаче синтеза оптимального управления летательными аппаратами // Изв. вузов. Авиац. техника. 1967. № 4. С. 30–40.
11. **Сиразетдинов Т. К.** Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1977.
12. **Липман Г. В., Рошко А.** Элементы газовой динамики. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
13. **Черный Г. Г.** Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959.
14. **Колесников К. С.** Жидкостная ракета как объект регулирования. М.: Машиностроение, 1969.
15. **Вознюк А. В., Коломиец В. Г.** Применение асимптотических методов нелинейной механики для исследования одночастотных колебаний стержней переменного сечения // Мат. физика. 1969. Вып. 6. С. 66–72.
16. **Луковский И. А.** Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость. Киев: Наук. думка, 1990.
17. **Матросов В. М., Анапольский Л. Ю., Васильев С. Н.** Метод сравнения в математической теории систем. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1980.
18. **Szarski J.** Differential inequalities. Warszawa: PWN-Polush Scientific Publ., 1967.

Поступила в редакцию 27/XI 2001 г.