Используя неравенство (19) и представление решения системы (18) в виде (10), убедимся в равномерной ограниченности интеграла (17). Тогда в качестве исходной минимизирующей последовательности можно взять равномерно сходящуюся последовательность $\{u_j^{(n)}\}$. Дальнейший ход доказательства совпадает с проведенным для плоского случая.

Поступила 12 II 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. **Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П.** О взаимофокусировке мощных световых пучков в средах с квадратичной нелинейностью.— ЖЭТФ, 1975, т. 68, вып. 3, с. 835—847.
2. **Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П.** О самозахвате световых пучков в параметрически связанные волноводы.— «Письма в ЖТФ», 1975, т. 1, вып. 16, с. 737—741.
3. **Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П.** Нелинейное взаимодействие дифрагирующих световых пучков в среде с квадратичной нелинейностью.— «Письма в ЖЭТФ», 1974, т. 20, вып. 11, с. 734—739.
4. **Nehary Z.** Characteristic values associated with a class of non-linear second-order differential equations.— «Acta Math.», 1961, vol. 10 S, p. 141.

УДК 533.932

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПРИ ДИФФУЗИИ НЕРАВНОВЕСНОЙ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

И. И. Литвинов

(*Москва*)

В элементарной кинетической теории газов и незамагниченной плазмы [1—3] двумя фундаментальными величинами являются длина свободного пробега частиц $\lambda = v\tau$ и плотность их хаотического потока $J_0 = nv/4$. С помощью этих параметров определяются все коэффициенты переноса и соответствующие им макроскопические потоки частиц, вязкого импульса и тепла [3]. Обе величины играют важную роль также и в теории пристеночных слоев (λ-слой Кнудсена [4]), в которых макроскопические уравнения теряют смысл. Сшивание потоков для внутренней и внешней плазмы с использованием этих параметров дает фиктивные граничные условия у стенки для упомянутых уравнений, решение которых вне λ-слоя совпадает с истинным решением. В частности, граничные условия при простой диффузии частиц на поглощающую стенку определяются приближенно [5—7] из условия равенства диффузионного J_D и хаотического J_0 потоков частиц на границе слоя

$$n_{\text{г}} = 2n_w = -2\lambda_D \nabla n, \; \lambda_D = (2/3)\lambda, \tag{1}$$

где n_w — плотность частиц на стенке.

Обоснование достаточной точности (1) путем прямого решения кинетического уравнения Больцмана во всей области перехода приводится в [7].

При наличии магнитного поля выражения для макроскопических потоков выводятся обычно формальным путем [3, 8], причем необходимые для вывода граничных условий понятия поперечной длины пробега $\lambda_\perp$ и хаотического потока $J_0^\perp$ до сих пор не установлены. Известно лишь [8, 9], что при сильной замагниченности ($\beta = |\omega|\tau \gg 1$, где $\omega = eB/mc$ — циклотронная частота) в качестве $\lambda_\perp$ выступает ларморовский радиус $r_\perp = v_\perp/|\omega|$.

Отсутствие ясности в этом вопросе привело к тому, что даже качественно правильные граничные условия для плазмы в магнитном поле неизвестны, хотя попытки в этом направлении предпринимались неоднократно [10—12]. В работе [10] в граничном условии типа (1) из [5, 6] была учтена зависимость коэффициента диффузии от поля B, тогда как зависимость потока $J_0^\perp$ от B отсутствовала. Аналогичное условие использовалось также и в недавней работе [11]. Применение потока J_0 вместо $J_0^\perp$ здесь явно непригодно. В работе [12] делается попытка учета влияния поля B также и на поток $J_0^\perp$ с использованием метода свободных пробегов [3]. В результате главное слагаемое приобрело вид

$$J_0^\perp = J_0/(1+\beta^2).$$

Однако этот результат ошибочен из-за неправильного выбора пределов интегрирования по скоростям c' и предшествующему времени t.

Для определения структурного вида параметров $\lambda_\perp$ и $J_0^\perp$ в магнитном поле используем аналогию поведения плазмы в обоих случаях диффузии и выясним физический смысл и область применения вновь введенных понятий. Как известно [1—3, 7], диффузионный поток в плазме без магнитного поля равен разности хаотических потоков J_0, приходящих с диффузионной длины пробега

$$J_D = J_0(-\lambda_D) - J_0(+\lambda_D) = -D\nabla n, \tag{2}$$

где коэффициент диффузии

$$D = \lambda v/3 = \lambda^2/3\tau. \tag{3}$$

При наличии магнитного поля коэффициент поперечной диффузии [3, 9]

$$D_\perp = D/(1+\beta^2). \tag{4}$$

Если теперь представить (4) по аналогии с (3) в виде $D_\perp = \lambda_\perp^2/3\tau$, то для искомой $\lambda_\perp$ находим

$$\lambda_\perp = \lambda/\sqrt{1+\beta^2}.$$

При $\beta \ll 1$ $\lambda_\perp$ переходит в λ, а при $\beta \gg 1$ имеем $\lambda_\perp = r_\perp$.

Найдем, какими должны быть хаотические потоки $J_0^\perp$, чтобы по аналогии с (2) их разность на длине $\pm(2/3)\lambda_\perp$ давала правильное значение поперечного диффузионного потока. В результате находим

$$J_0^\perp = J_0/\sqrt{1+\beta^2}. \tag{5}$$

При $\beta \ll 1$, как и следовало ожидать, поток $J_0^\perp$ совпадает с хаотическим потоком частиц J_0. При $\beta \gg 1$ имеем $J_0^\perp = J_0/\beta$. Покажем, что в последнем случае поток $J_0^\perp$ представляет собой хаотический поток ведущих центров.

Хаотический поток частиц в плазме при любом β всегда равен J_0. Но при $\beta \gg 1$ вклад в диффузию дают лишь те частицы, которые испытывают столкновения и, следовательно, смещения ведущих центров. Для нахождения потоков таких частиц целесообразно перейти к описанию диффузии в пространстве координат ведущих центров, при котором циклический поток частиц исключается автоматически. В этом случае поперечный поток ведущих центров частиц сорта α на частицах β имеет вид [9]

(6) $$J_{\alpha\beta} = n_\alpha \langle \Delta X_{\alpha\beta} \rangle - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left[n_\alpha \langle \Delta X_{\alpha\beta}^2 \rangle\right],$$

в котором моменты $\langle \Delta X_{\alpha\beta}^k \rangle$ равны

(7) $$\langle \Delta X_{\alpha\beta}^k \rangle = \frac{1}{\omega_\alpha^k}\int f_\alpha d\mathbf{v}_\alpha \int n_\beta f_\beta d\mathbf{v}_\beta \int\limits_\Omega \Delta v_{\alpha y}^k u \sigma_{\alpha\beta}(u, \vartheta)\, d\Omega,$$

где $u = |\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta|$ — относительная скорость; $\sigma_{\alpha\beta}$ — дифференциальное сечение рассеяния.

При отсутствии внешней силы и градиента плотности оба слагаемых в (6) обращаются в нуль. При этом хаотические скачки ведущих центров в одну сторону $\Delta X_{\alpha\beta} = \Delta v_{\alpha y}/\omega_\alpha$, где $\Delta v_{\alpha y}$ — изменение y-компоненты скорости при столкновении, в точности компенсируются скачками в другую сторону. Найдем этот хаотический поток ведущих центров, учитывая в выражении (7) смещения только одного знака. Поскольку интеграл по столкновениям в моменте $\langle \Delta X_{\alpha\beta} \rangle$ равен

$$\int\limits_\Omega \Delta v_{\alpha y} u \sigma_{\alpha\beta}(u, \vartheta)\, d\Omega = -\frac{\mu}{m_\alpha} u_y u \sigma_1(u),$$

где μ — приведенная масса; σ_1 — сечение передачи импульса, из (7) замечаем, что для определения указанного потока достаточно в $\langle \Delta X_{\alpha\beta} \rangle$ провести усреднение по полусфере $u_y > 0$ в пространстве $\mathbf{u}$. Переход в $\langle \Delta X_{\alpha\beta} \rangle$ к переменным центра инерции $\mathbf{u}$ и $\mathbf{V}_0$ [9] и интегрирование по $\mathbf{V}_0$ и полупространству $\mathbf{u}$ дает для хаотического потока ведущих центров частиц α выражеиие

(8) $$J_{\alpha 0}^\perp = J_\alpha^0 \frac{\nu_{\alpha\beta}}{|\omega_\alpha|},$$

в котором усредненная частота столкновений имеет вид

$$\nu_{\alpha\beta} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}}\frac{\mu n_\beta}{m_\alpha}\left(\frac{\mu}{2T_{\alpha\beta}}\right)^{5/2}\int\limits_0^\infty u^5 \sigma_1(u) \exp\left(-\frac{\mu u^2}{2T_{\alpha\beta}}\right) du,$$

где $T_{\alpha\beta} = (m_\alpha T_\beta + m_\beta T_\alpha)/(m_\alpha + m_\beta)$ — приведенная температура.

Сравнивая (8) и (5), убеждаемся, что при $\beta_\alpha \gg 1$ поток $J_{\alpha 0}^\perp$ действительно представляет собой хаотический поток ведущих центров.

Введенные выше обобщенные параметры $\lambda_\perp$ и $J_0^\perp$ являются внутренними и при макроскопическом описании выпадают. Однако во всех случаях проявления дискретной структуры среды они должны учитываться. При этом обеспечивается единый подход к анализу явлений в плазме и на ее границах при произвольных β.

Например, обобщением на случай магнитного поля слоя Кнудсена является слой с толщиной $\lambda_\perp$. При этом граничное условие для плотности при диффузии заряженных частиц на поглощающую стенку получается автоматически заменой λ, J_0 и J_D на $\lambda_\perp$, $J_0^\perp$ и $J_D^\perp$, откуда сразу находим

(9) $$n_r = 2n_w = -(4/3)\lambda_\perp \nabla_\perp n.$$

Соотношение (9) полностью аналогично (1) и в отличие от [10—12] дает качественно правильную структурную зависимость от параметра замагниченности β.

Аналогичное обобщение граничных условий можно получить и для других уравнений неравновесной плазмы в магнитном поле, необходимых для последовательного численного описания сильноточных электрических разрядов [13], а также МГД-ускорителей и генераторов плазмы.

Другой важной областью применения параметров $\lambda_{\perp}$ и $J_0^{\perp}$ является вывод и обоснование применимости макроскопических уравнений. Так, условие применимости последних — условие малости градиентов для поперечного направления в отсутствие эффекта «перемешивания» может быть записано не раздельно для малых и больших β, как в [8], а в более компактном виде

$$\lambda_{\perp} \ll L_{\perp}. \tag{10}$$

С ростом поля B условие (10) автоматически переходит в условие дрейфового описания движения заряженных частиц [14].

В заключение отметим, что с помощью параметров $\lambda_{\perp}$, $J_0^{\perp}$ и некоторых их обобщений удается получить компактные структурные выражения также и для других потоков и соответствующих им коэффициентов переноса в произвольном магнитном поле, в том числе и для вязких слагаемых, которые обычно не имеют столь прозрачного вида. Эти выражения могут быть затем уточнены поправочными коэффициентами порядка единицы, вытекающими из точного кинетического решения для конкретного закона взаимодействия частиц.

Поступила 24 II 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. **Блох Е.** Кинетическая теория газов. М.— Л., ГТТИ, 1932.
2. **Эйнштейн А., Смолуховский М.** Броуновское движение. М.— Л., ОНТИ, 1936.
3. **Чепмен С., Каулинг Т.** Математическая теория неоднородных газов. М., ИЛ, 1960.
4. **Коган М. Н.** Динамика разреженного газа. М., «Наука», 1967.
5. **Фабрикант В. А.** Возбуждение атомов в газовом разряде.— «Докл. АН СССР», 1939, т. 23, № 3, с. 224.
6. **Грановский В. Л.** Диффузия ионов в разряде и начальная скорость деионизации газа.— «Докл. АН СССР», 1939, т. 23, № 9, с. 880.
7. **Литвинов И. И.** Распределение диффундирующих частиц вблизи поглощающей стенки.— ПМТФ, 1971, № 2, с. 21.
8. **Брагинский С. И.** Явления переноса в плазме.— В кн.: Вопросы теории плазмы. Т. 1. М., Госатомиздат, 1963.
9. **Голант В. Е.** Диффузия заряженных частиц плазмы в магнитном поле.— «Усп. физ. наук», 1963, т. 79, № 3, с. 377.
10. **Конюков М. В.** К теории положительного столба в продольном магнитном поле.— ЖЭТФ, 1957, т. 33, № 2 (8), с. 408.
11. **Бакшт Ф. Г., Мойжес Б. Я., Рыбаков А. Б.** Критический режим работы плазменного ускорителя.— ЖТФ, 1973, т. 43, № 12, с. 2568.
12. **Васильева И. А.** Краевое условие для концентрации плазмы в магнитном поле.— «Радиотехн. и электроника», 1960, т. 5, № 12, с. 2015.
13. **Литвинов И. И., Люмкис Е. Д., Филиппов С. С.** Неравновесность и перегревная неустойчивость в импульсном ксеноновом разряде.— В кн.: IV Всесоюз. конф. по физике низкотемпературной плазмы. Аннотации докладов. Т. 2. Киев, Ин-т физики АН УССР, 1975.
14. **Сивухин Д. В.** Дрейфовая теория движения заряженной частицы в электромагнитных полях.— В кн.: Вопросы теории плазмы. Т. 1. М., Госатомиздат, 1963.