шается. Испытания системы на описанной модельной установке проведены при значениях пиковых давлений примерно 1500; 4000 и 8000 атм. Давление газа по окончании заклинивания составляли величины соответственно около 1250;2200 и 3700 атм. Проведено несколько десятков циклов для каждого давления, работа системы была безотказной. При работе на максимальном давлении на внутренней поверхности ствола возникали отпечатки — следы давления клиньев. Идентичность (визуальная) отпечатков свидетельствует о равномерности распределения напряжений.

На другой модели использовался поршень диаметром 50 мм, имеющий величины λ, γ и β, равные приблизительно 0,9; 0,87; 0,45 соответственно. Рабочее давление сжимаемого газа около 2000 атм. Максимальные радиальные напряжения в этом случае, согласно расчету, составляют около 1200 атм.

Следует отметить, что при проведении нескольких сотен циклов работы не было ни одного случая отказа системы или повреждения ее элементов.

Поступила 5 IV 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. **Von Karman** Institute for Fluid Dynamics. Education and Research. 1956—1976, 1976.
2. **Мещеряков А. А., Пинаков В. И.** Поршень установки адиабатического сжатия. Авторское свидетельство № 390315.— Бюллетень, открытия, изобретения, промышленные образцы, товарные знаки, 1973, № 30.
3. **Пономарев С. Д. и др.** Расчеты на прочность в машиностроении. Т. 2. М., Машгиз, 1958.

УДК 539.376

К РАСЧЕТУ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ МАТЕРИАЛА В ПРОЦЕССЕ ПОЛЗУЧЕСТИ

В. А. Заев, А. Ф. Никитенко

(*Новосибирск*)

При расчете элементов конструкций в большинстве случаев пренебрегают деформациями, накапливаемыми в третьей стадии ползучести [1, 2]. Однако, как следует из анализа экспериментальных данных [3], некоторые конструкционные материалы даже при незначительных деформациях порядка 1—2% обнаруживают резко выраженный третий участок ползучести.

Общепринятая при этом схема расчета напряженно-деформированного состояния и расчета на прочность элементов конструкций в условиях ползучести не учитывает того [1], что разрушению предшествует процесс накопления повреждений, который оказывает существенное влияние на скорость ползучести и приводит к перераспределению поля напряжений.

Ниже приведен расчет сосудов, нагруженных внутренним давлением, в котором отмеченные выше обстоятельства учитываются целиком. Определяется напряженно-деформированное состояние сосудов и нижняя граница времени разрушения. Отмечается, что по объему и сложности вычислительных процедур изложенный метод решения намного проще и эффективнее по сравнению с традиционными [1].

Пусть равномерно прогретый сосуд (сфера, цилиндр) нагружен постоянным во времени внутренним давлением p. Уравнения равновесия и граничные условия имеют вид [1, 2]

$$\partial\sigma_r/\partial r + k(\sigma_r - \sigma_\varphi)/r = 0, \quad a \leqslant r \leqslant b; \tag{1}$$

$$\sigma_r(a) = -p, \quad \sigma_r(b) = 0, \tag{2}$$

где a, b — внутренний и наружный радиусы соответственно. Для цилиндрического сосуда $k = 1$, для сферического $k = 2$, σ_r, σ_φ — главные компоненты тензора напряжений, являющиеся функциями времени и координаты r. Оставшееся главное напряжение σ_θ для сферического сосуда равно в случае центральной симметрии σ_φ [2], а σ_z для цилиндрического сосуда определяется из общепринятого допущения об отсутствии ползучести в осевом направлении [1, 2].

Компоненты тензора скорости деформаций ползучести связаны с компонентами вектора скорости перемещения известными соотношениями Коши [2], а уравнение сплошности скоростей деформаций ползучести имеет вид [2]

$$\partial\eta_\varphi/\partial r + (\eta_\varphi - \eta_r)/r = 0. \tag{3}$$

Систему уравнений, описывающую все три стадии ползучести материала и учитывающую процесс повреждаемости его во времени, запишем в вида [1, 4]

$$\eta_j = \frac{\partial\Phi_1/\partial\sigma_j}{\mu^m(1-\mu)^{\alpha/(\alpha+1)}}; \tag{4}$$

$$\mu = \left[1 - (\alpha+1)(m+1)\int_0^t \Phi_2 d\tau\right]^{1/(m+1)}, \tag{5}$$

где $j = r, \varphi, z$ для цилиндра; $j = r, \varphi, \theta$ для сферы. Здесь Φ_1, Φ_2 — однородные относительно напряжений функции степени $(n+1)$ и $(g+1)$ вида $\Phi_1 = B_1 S_2^{(n+1)/2}$, $\Phi_2 = B_2 S_2^{(g+1)/2}$, S_2 — второй инвариант девиатора тензора напряжений ($S_2 = (^1/_6)[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$). Функция μ связана с параметром повреждаемости ω соотношением

$$\omega = (1-\mu)^{1/(\alpha+1)}, \tag{6}$$

получаемым интегрированием кинетического уравнения [1, 4]

$$d\omega/dt = \Phi_2/\omega^\alpha(1 - \omega^{\alpha+1})^m, \quad \omega(r, 0) = 0, \quad \omega(r_*, t_*) = 1,$$

где B_1, B_2, m, n, g, α — характеристики материала; t_* — время начала распространения фронта разрушения [1, 2], определяемое из (6) с использованием (5)

$$(\alpha+1)(m+1)\int_0^{t_*} \Phi_2 d\tau = 1. \tag{7}$$

Время t_*, при котором впервые в некоторой точке r_* тела $\omega = 1$, будем называть нижней границей времени разрушения тела (элемента конструкции).

Система уравнений (1) — (7) позволяет рассчитать напряженно-деформированное состояние сосудов,нагруженных внутренним давлением, на любой момент времени и определить нижнюю границу времени разрушения.

Решение поставленной задачи ищем в виде

$$\sigma_j(r, t) = \sigma_j^0(r) f(r, t) + C(r, t); \tag{8}$$

$$v_j(r, t) = v_j^0(r) F(t), \tag{9}$$

где v_j — компоненты вектора скорости перемещения; σ_j^0, v_j^0, $f(r, t)$, $C(r, t)$, $F(t)$ — функции, подлежащие определению. Нуль вверху при соответствующей функции означает, что последняя зависит только от координаты r.

Из (9) имеем

(10) $$\eta_j(r, t) = \eta_j^0 F(t).$$

Функцию $f(r, t)$ выбираем из условия, чтобы при подстановке (8), (10) в уравнения связи (4) можно было бы в последних разделить переменные. Полагая, например, с точностью до произвольной функции времени

(11) $$f = [\mu^m (1 - \mu)^{\alpha'(\alpha+1)}/X(t)]^{1/n},$$

получаем

$$\frac{\eta_j^0}{\partial\Phi_1^0/\partial\sigma_j^0} = \frac{1}{F(t)\,X(t)} = \mathrm{const}.$$

Принимая константу равной единице, убеждаемся, что

(12) $$F(t)X(t) = 1,$$

а компоненты η_j^0, σ_j^0 удовлетворяют уравнениям установившейся ползучести [1, 2]. Решение задачи установившейся ползучести для рассматриваемых сосудов, нагруженных тем же самым постоянным во времени внутренним давлением, считаем в дальнейшем известным [2].

Учитывая вышесказанное, можно видеть, что поле скоростей перемещений (9) тождественно удовлетворяет соотношениям Коши и нулевым граничным условиям. Уравнение сплошности скоростей деформаций ползучести (3) также удовлетворяется.

Подставляя компоненты тензора напряжений (8) в уравнение равновесия (1) и граничные условия (2), убеждаемся, что они удовлетворяются, если при этом функция $C(r, t)$ на любой момент времени удовлетворяет дифференциальному уравнению

(13) $$\frac{\partial C}{\partial r} + \sigma_r^0 \frac{\partial f}{\partial r} = 0$$

с граничным условием

(14) $$C(a, t) = -p[1 - f(a, t)], \quad C(b, t) = 0.$$

Причина возникновения для дифференциального уравнения (13) двух граничных условий (14) вполне очевидна. Учитывая, что главный вектор напряжений σ_z равен силе внутреннего давления на донышко трубы (или главный вектор напряжений σ_θ равен силе внутреннего давления на поверхность полусферы), можно показать с учетом (8), что второе граничное условие для уравнения (13) тождественно удовлетворяется.

Переходим к определению функций $\mu(r, t)$ и $X(t)$, через которые, согласно (11), выражается $f(r, t)$. Используя теорему энергии [2], имеем

(15) $$\int_s T_j^0 v_j ds = \int_V \sigma_j^0 f(r, t)\,\eta_j^0 F(t)\,dV.$$

С другой стороны, учитывая, что $v_j(r, t) = v_j^0 F(t)$, v_j^0 совместны с η_j^0, а постоянные во времени внешние нагрузки T_j^0 находятся в равновесии с σ_j^0, получаем

(16) $$\int_s T_j^0 v_j ds = F(t) \int_V \sigma_j^0 \eta_j^0 dV.$$

Из сопоставления (15), (16) имеем

(17) $$\int_V f(r, t)\,\sigma_j^0 \eta_j^0 dV = \int_V \sigma_j^0 \eta_j^0 dV.$$

Учитывая, что $\sigma_j^0\eta_j^0 = (n+1)\,\Phi_1^0$, и применяя к первому интегралу в (17) теорему о среднем

(18) $$\int\limits_V f(r,\,t)\,\Phi_1^0 dV = f(\bar{r}(t),\,t)\int\limits_V \Phi_1^0 dV,$$

окончательно получаем, что на любой момент времени должно выполняться равенство

$$f(\bar{r}(t),\,t) = 1,\ 0 \leqslant t \leqslant t_*,$$

которое позволяет совместно с (11) определить функцию времени $X(t)$

(19) $$X(t) = \bar{\mu}^m\,(1-\bar{\mu})^{\alpha/(\alpha+1)},\quad \bar{\mu} = \mu(\bar{r}(t),\,t).$$

Подставляя (8) в (5), получаем после простейших преобразований с учетом (11)

(20) $$\int\limits_1^{\mu} z^l\,(1-z)^{-\rho}dz = -\left[(m+1)\,t_*^0\right]^{-1}\int\limits_0^t X^{-(g+1)/n}d\tau,$$

а из (17) с учетом (11) имеем

(21) $$\int\limits_V \left[\mu^m\,(1-\mu)^{\alpha/(\alpha+1)}\right]^{1/n}\Phi_1^0 dV = X^{1/n}\int\limits_V \Phi_1^0 dV.$$

Здесь

$$l = \frac{m\,(n-g-1)}{n};\quad \rho = \frac{\alpha}{\alpha+1}\,\frac{g+1}{n};\quad t_*^0 = \left[(\alpha+1)\,(m+1)\,\Phi_2^0\right]^{-1}.$$

При интегрировании в (20) необходимо учитывать, что $1 \geqslant \mu(r,\,t) > 0$ при $0 \leqslant t < t_*$, $\mu(r_*,\,t_*) = 1$, $X(0) = 1$, $X(t_*) > 0$. Это накладывает на характеристики материала некоторые ограничения, которые не являются, вообще говоря, слишком жесткими.

Из изложенного следует, что сформулированную выше задачу (1) — (7) теории ползучести с одновременным учетом повреждаемости материала можно свести к задаче установившейся ползучести. Чтобы получить искомое решение σ_j, η_j, следует известное решение установившейся ползучести σ_j^0, η_j^0 умножить соответственно на функции $f(r,\,t)$ и $F(t)$. Гидростатическая составляющая находится из решения дифференциального уравнения (13) и граничного условия (14).

Для определения же функций $f(r,\,t)$ и $F(t)$, выражающихся, согласно (11), (12), через $\mu(r,\,t)$ и $\bar{\mu}(t)$, требуется одним из известных численных методов решить систему уравнений (20), (21).

Подставляя (8) в (7), находим нижнюю границу времени разрушения, после которого из точки $r = r_*$, как наиболее напряженной,начнется распространение фронта разрушения

(22) $$\int\limits_0^{t_*} [f\,(r_*,\,t)]^{g+1}d\tau = t_*^0\,(r_*).$$

Так как функция $f(r,\,t)$ связана с параметром повреждаемости $\omega(r,\,t)$, то из (8) следует, что последний оказывает существенное влияние на поле напряжений, способствуя перераспределению его с момента приложения нагрузки вплоть до начала разрушения. Очевидно, что $f(r,\,0) = 1$, $C(r,\,0) = 0$ и, следовательно, поле напряжений (8) при $t = 0$ совпадает с установившимся распределением σ_j^0.

Ограничиваясь случаем разупрочняющегося в процессе ползучести материала, т. е. когда $\alpha = 0$, определим μ и $\bar{\mu}$ из системы уравнений (20), (21) следующим образом. Обозначая

$$\int_0^t \bar{\mu}^{-(m+1)\varkappa} d\tau = u, \quad u(0) = 0, \quad \frac{du}{dt} = 1 \text{ при } t = 0,$$

$$\beta = m/(n + m(n - g - 1)), \; \nu = (n + m(n - g - 1))/n(m + 1),$$

$$\varkappa = m(g + 1)/n(m + 1), \; \gamma = m/n(m + 1)$$

и подставляя $\mu(r, t)$ из (20) в (21), получаем

$$\int_V \Phi_1^0 \left(1 - \frac{\nu}{t_*^0} u\right)^\beta dV = (du/dt)^{-\gamma/\varkappa} \int_V \Phi_1^0 dV. \tag{23}$$

Решение уравнения (23) ищем в виде ряда по степеням t:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} b_k t^k, \quad b_1 = 1.$$

Тогда для $\mu(r, t)$ и $\bar{\mu}(t)$ имеем

$$\mu^{m/n} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k t^k; \tag{24}$$

$$\bar{\mu}^{m/n} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} D_k t^k, \tag{25}$$

где

$$B_k = \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \frac{A_\beta^i}{i!} b_k^{(i)}; \quad b_k^{(i)} = \sum_{n=1}^{k-1} b_n^{(1)} b_{k-n}^{(i-1)};$$

$$b_k^{(i)} = 0 \text{ при } k < i, \quad i > 1; \quad b_k^{(1)} = (m + 1) \Phi_2^0 \nu b_k;$$

$$D_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{A_{(-\gamma/\varkappa)}^i}{i!} d_k^{(i)}; \quad d_k^{(i)} = \sum_{n=1}^{k-1} d_n^{(1)} d_{k-n}^{(i-1)},$$

$$d_k^{(i)} = 0 \text{ при } k < i, \quad i > 1; \quad d_k^{(1)} = (k + 1) b_{k+1};$$

A_m^n — число размещений из m элементов по n. После стандартных операций получаем формулу, из которой определяем коэффициенты разложения B_k и D_k:

$$D_k \int_V \Phi_1^0 dV = \int_V \Phi_1^0 B_k dV.$$

Выпишем несколько первых коэффициентов

$$D_1 = -\beta\nu/\bar{t}_*^0, \quad B_1 = -\beta\nu/t_*^0,$$

$$D_2 = \frac{(\beta\nu)^2}{2!} \left[-\frac{\varkappa}{\gamma} + \frac{(\beta - 1)\lambda_1}{\beta}\right] \frac{1}{(\bar{t}_*^0)^2},$$

$$B_2 = \frac{(\beta\nu)^2}{2!} \left[-\frac{\varkappa}{\gamma} \frac{t_*^0}{\bar{t}_*^0} + \frac{\beta - 1}{\beta}\right] \frac{1}{(t_*^0)^2},$$

где

$$\lambda_1 = \int\limits_V \Phi_1^0 \Phi_2^{02} dV \int\limits_V \Phi_1^0 dV \Big/ \Big(\int\limits_V \Phi_1^0 \Phi_2^0 dV \Big)^2,$$

а $\bar{t}_*^0$ определяется из выражения

$$\bar{t}_*^0 = \left[(m+1)\Phi_2^0(\bar{r})\right]^{-1} = \left[(m+1)\overline{\Phi}_2^0\right]^{-1},$$

причем

(26) $$\overline{\Phi}_2^0 = \int\limits_V \Phi_1^0 \Phi_2^0 dV \Big/ \int\limits_V \Phi_1^0 dV.$$

Непосредственные расчеты показывают, что вполне хорошее приближение при определении напряженно-деформированного состояния можно получить, если суммы бесконечных рядов (24), (25) аппроксимировать выражениями

(27) $$\bar{\mu}^{m/n} = \left\{1 + \frac{\bar{t}_*^0}{t_*^0}\left[\left(1 - \frac{t}{\bar{t}_*^0}\right)^{\nu} - 1\right]\right\}^{\beta};$$

(28) $$\bar{\mu}^{m/n} = \left(1 - \frac{t}{\bar{t}_*^0}\right)^{\nu}.$$

На фиг. 1 сплошными линиями представлены эпюры распределения напряжений в толстостенной трубе на различные моменты времени. Расчет проводился по зависимостям (8) с использованием соотношений (27), (28). Характеристики материала имели значения: $\lambda = b/a = 2$, $n = g = 4$, $m = 3$, $B_1 = B_2 = 9{,}4 \cdot 10^{-9}$, $\sigma_r(a) = -12$ кг/мм^2. Здесь же в качестве сравнения штриховыми линиями представлены эпюры распределения напряжений, полученные при непосредственном расчете с помощью ЭВМ. При этом интервал времени от нуля до t разбивался на промежутки Δt и расчет проводился стандартным способом [1].

Подставляя (27), (28) в (22), получаем для времени начала распространения фронта разрушения выражение

(29) $$t_* = \bar{t}_*^0\left[1 - \left(1 - t_*^0(a)/\bar{t}_*^0\right)^{1/\nu}\right].$$

В частности, t_*, вычисленное из выражения (29), составило 473 ч, а при непосредственном расчете $t_* = 488$ ч. Отсюда и из сопоставления эпюр распределения напряжений, представленных на фиг. 1, видно, что изложенный метод расчета напряженно-деформированного состояния сосудов высокого давления и определения нижней границы времени разрушения дает вполне хорошее приближение к действительности. Очевидно, что по объему и сложности вычислительных процедур он намного проще и эффективнее по сравнению с традиционными [1, 2].

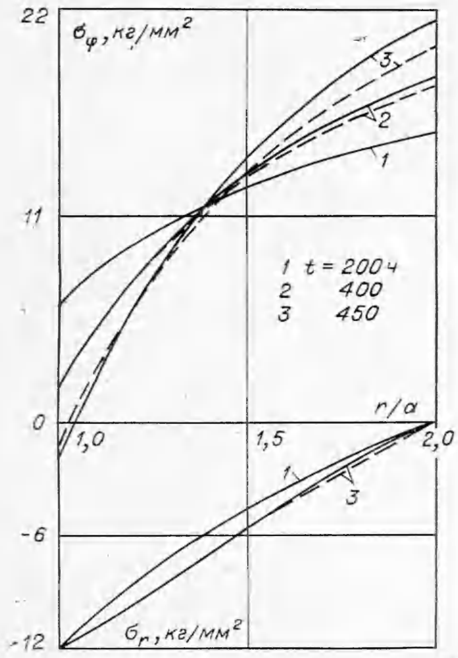
В частном случае, когда характеристики материала связаны соотношением ($\beta = 1$)

$$m = n/(2 - (n - g)) \text{ при } 1 < n - g < 2,$$
$$m = n/2 \text{ при } n = g,$$

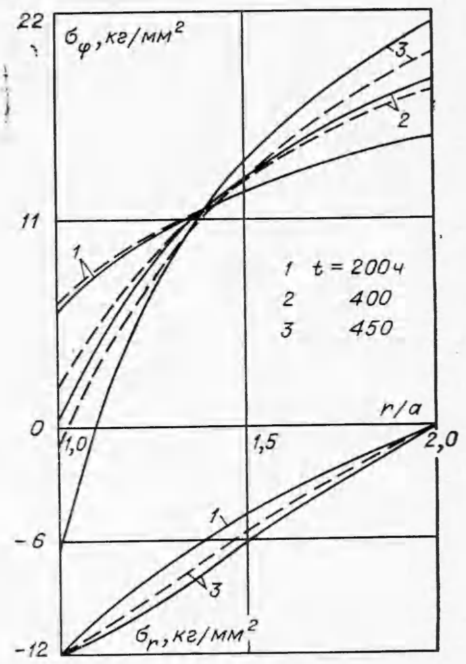
система уравнений (20), (21) имеет простое решение:

(30) $$\mu^{m/n} = 1 + \frac{\bar{t}_*^0}{t_*^0}\left[\left(1 - \frac{t}{\bar{t}_*^0}\right)^{\nu} - 1\right];$$

(31) $$\bar{\mu}^{m/n} = (1 - t/\bar{t}_*^0)^{\nu}.$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Этот же результат можно получить непосредственно из (24), (25). Нижняя граница времени разрушения определяется из выражения (29) с заменой ν на γ ($\nu = \gamma$ при $\beta = 1$).

Оказывается, что в случае $\beta \neq 1$ вполне удовлетворительное приближение при расчете напряженно-деформированного состояния можно получить, если суммы бесконечных рядов (24), (25) аппроксимировать выражениями (30), (31). На фиг. 2 сплошными линиями представлены соответствующие эпюры распределения напряжений на различные моменты времени, подсчитанные по соотношениям (8) с использованием (30), (31) (штриховая линия — то же, что и на фиг. 1). Нижняя граница времени разрушения, определенная из (29), где ν заменено на γ, составила 461 ч.

Отметим, что в работе [5] на основе исследования распространения фронта разрушения в произвольном теле с использованием простого закона накопления повреждаемостей (что эквивалентно частному случаю $\beta = 1$) получена нижняя оценка времени разрушения $t_* \geqslant \bar{t}_*^{\nu}$, которая вполне согласуется с выражением (29).

Из соотношений (8), (11), (19), (30), (31) видно, что в случае $\beta = 1$ эпюра распределения интенсивности напряжений на любой момент времени $0 < t \leqslant t_*$ пересекается с аналогичной эпюрой установившейся ползучести в точке с координатой $r = \bar{r}$, т. е. в процессе ползучести интенсивность напряжений в этой точке не перераспределяется, а остается равной своему начальному значению

$$S_2(\bar{r}, t) = S_2^0(\bar{r}), \quad S_2(r, 0) = S_2^0(r).$$

Координата этой точки определяется из (26) и не зависит от времени. В частности, для сферы

$$(32) \qquad \frac{\bar{r}}{b} = \left[\left(\frac{3g+n+6}{n+3}\right)\left(\frac{\lambda^{(n+3)/n}-1}{\lambda^{(3g+n+6)/n}-1}\right)\right]^{n/(3g+3)} \quad (1 < n - g < 2);$$

для цилиндра

$$\frac{\bar{r}}{b} = \left[\frac{(g+2)(\lambda^{2/n}-1)}{\lambda^{(2g+4)/n}-1}\right]^{n/(2g+2)} (1 < n-g < 2). \tag{33}$$

Видно, что координаты (32), (33) незначительно отличаются от соответствующих координат пересечения эпюр упругого распределения с установившимся, а при $n \to \infty$ в точности совпадают с координатами пересечения упругого распределения интенсивности напряжений с распределением идеально пластическим. Этот результат совместно с (30), (31) дает возможность без привлечения ЭВМ (или с минимальным ее использованием) даже в случае $\beta \neq 1$ рассчитать по соотношениям (8), (9) напряженно-деформированное состояние сосудов высокого давления в качестве ориентировочной оценки при проектировании. Нижняя оценка времени разрушения определяется из (29) или из выражения $t_* \geqslant \bar{t}_*^0$, предложенного в работе [5]. Для случая $\beta = 1$ соотношения (8), (9) совместно с (30), (31) и (29) дают точное решение.

Поступила 19 VI 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. **Работнов Ю. Н.** Ползучесть элементов конструкций. М., Наука, 1966.
2. **Качанов Л. М.** Теория ползучести. М., Физматгиз, 1960.
3. **Работнов Ю. Н.** О разрушении вследствие ползучести.— ПМТФ, 1963, № 2.
4. **Соснин О. В.** О варианте теории ползучести с энергетическими параметрами упрочнения.— В кн.: Механика деформируемых тел и конструкций. М., Машиностроение, 1975.
5. **Leckie F. A., Hayhurst D. R.** Creep rupture of structures.— Proc. Royal Soc. Lond. 1974, A 340.

УДК 539.1

О ПРИНЦИПЕ СЕН-ВЕНАНА ДЛЯ СИЛЬНО АНИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ СРЕД

Ю. А. Боган

(*Новосибирск*)

Наличие сильной анизотропии у современных композиционных материалов (как следствие, в обобщенном законе Гука для осредненных напряжений присутствуют большие параметры) приводит к тому, что предельные модели [1] характеризуются явлением «распространения» напряженного состояния.

В связи с этим возникает вопрос, в какой мере принцип Сен-Венана остается справедливым для сред с нерастяжимыми волокнами? Как показано ниже, для сред с нерастяжимыми волокнами при определенных условиях имеет место экспоненциальность убывания потенциальной энергии деформации при удалении от области приложения самоуравновешенной нагрузки [2], однако отсюда, вообще говоря, нельзя сделать вывода об экспоненциальности затуханий при удалении от нагруженного участка.

Таким образом, при применении принципа Сен-Венана к средам с нерастяжимыми волокнами его необходимо формулировать в ослабленной, интегральной форме без локальных оценок напряженного состояния конструкции.

1. Не привязываясь к какой-либо конкретной модели линейно-упругого композиционного материала, соотношения обобщенного закона Гука возьмем в виде

$$\sigma_\xi = A_{11}\varepsilon_\xi + A_{12}\varepsilon_\eta, \quad \sigma_\eta = A_{12}\varepsilon_\xi + A_{22}\varepsilon_\eta, \quad \tau_{\xi\eta} = G\gamma_{\xi\eta}, \tag{1.1}$$