величинах функционала (1.7) и координат конца стержня перестают изменяться. Приближения с погрешностью в величинах функционала энергии и координат конца стержня порядка 10 % достигались за 7—8 итераций.

В вычислениях с $\varepsilon = 0{,}1$ функционал (1.7) монотонно уменьшался при всех итерациях с самого начала, в вычислениях с $\varepsilon = 10^8$; 0,5 монотонное уменьшение функционала (1.7) наступало лишь после ряда итераций.

В таблице приведены значения функционала (1.7) и (в скобках) координат конца $\bar{s} = 1$ стержня, соответствующие вычислениям равновесных форм 4—6 при $N = 40, 80, 120$. Эти значения практически совпадают. Число итераций, требуемых для получения равновесных форм, также практически не зависит от числа элементов N.

Работа выполнена при содействии фонда Д. Сороса. Авторы выражают признательность фонду за материальную поддержку их работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Попов Е.П.** Теория и расчет гибких упругих стержней. — М.: Наука, 1986.
2. **Wang C.Y.** Buckling and postbuckling of a long-hanging elastic column due to a bottom load // Trans. ASME. J. Appl. Mech. — 1983. — V. 50, N 2.
3. **Астрахарчик С.В.** Метод решения задач большого изгиба тонких упругих стержней и пластин // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики. — 1977. — Вып. 75.
4. **Годунов С.К., Рябенький В.С.** Разностные схемы. — М.: Наука, 1977.
5. **Самарский А.А., Николаев Е.С.** Методы решения сеточных уравнений. — М.: Наука, 1978.
6. **Черноусько Ф.П., Баничук Н.В.** Вариационные задачи механики и управления. — М.: Наука, 1973.

г. Новосибирск *Поступила 13/V 1993 г.*

УДК 624.07:534.1

В.В. Нестеренко, А.М. Червяков

ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ В ТЕОРИИ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕЙ И БАЛОК

Предложено уравнение параболического типа, описывающее поперечные колебания балки и учитывающее упругую энергию сдвиговых деформаций. Поправки к частотам классической теории Бернулли — Эйлера, которые дает новое уравнение, в точности совпадают с аналогичными поправками в модели балки Тимошенко. В предложенном подходе нет дополнительной нефизической моды колебаний, предсказываемой моделью Тимошенко.

При расчете поперечных колебаний стержней и балок рабочим инструментом является до сих пор классическая теория Бернулли — Эйлера [1]. Можно отметить лишь два обобщения этой теории. Учет инерции вращения отдельных элементов балки в процессе колебаний выполнен Рэлеем [2]. Существенным продвижением вперед была модель Тимошенко, предложенная в начале нашего века [3]. В ее рамках учитываются не только изгибные, но и сдвиговые деформации балки при поперечных колебаниях. Все попытки получить новые приближения в данной задаче, исходя из точных уравнений трехмерной теории упругости, приводят к чрезвычайно громоздким и сложным построениям (см., например, [4]).

Утвердилось мнение, что успех теории Тимошенко обусловлен тем, что предложенная им модель является гиперболической аппроксимацией точных уравнений теории упругости [4]. Однако мы хотим показать, что поправки к частотам, которые дает теория Тимошенко, можно получить, оставаясь в рамках параболической аппроксимации, т.е. работая с параболическим уравнением, описывающим поперечные колебания балки. Изложим основные моменты теории Тимошенко [1, 3, 4]. Пусть $y_1(t, x)$ и $y_2(t, x)$ — поперечные смещения балки, вызванные изгибной и сдвиговой деформациями соответственно. Модель Тимошенко задается следующей лагранжевой функцией:

$$L = T - V; \tag{1}$$

$$T = \frac{\rho F}{2}\int_0^l (\dot{y}_1 + \dot{y}_2)^2 dx + \frac{\rho I}{2}\int_0^l (\dot{y}_1')^2 dx; \tag{2}$$

$$V = \frac{EI}{2}\int_0^l (y_1'')^2 dx + \frac{kFG}{2}\int_0^l (y_2')^2 dx. \tag{3}$$

Здесь E — модуль упругости материала балки; G — модуль сдвига; ρ — объемная плотность; I — момент инерции поперечного сечения балки относительно оси, проходящей через центр тяжести этого сечения и перпендикулярной плоскости колебаний; F — площадь поперечного сечения балки; l — ее длина; k — коэффициент сдвига; точка означает дифференцирование по времени t; штрих — по x.

Функция Лагранжа (1)—(3) приводит к уравнениям движения для $y = y_1 + y_2$ и $\psi = y' - y_2'$:

$$\ddot{y} - k\frac{G}{\rho}(y'' - \psi') = 0,\ \psi'' - \frac{\rho}{E}\ddot{\psi} + k\frac{GF}{EI}(y' - \psi) = 0, \tag{4}$$

а также граничным условиям, которые в случае шарнирно опертой балки имеют вид

$$\begin{gathered} y(t, 0) = y(t, l) = 0,\ y''(t, 0) = y''(t, 0) = 0, \\ \psi'(t, 0) = \psi'(t, l) = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Подставим в уравнения (4) соответствующую граничным условиям (5) нормальную форму колебаний балки

$$\begin{gathered} y(t, x) = A_n \sin(\omega_n t + \varepsilon_n)\sin(\lambda_n x), \\ \psi(t, x) = B_n \sin(\omega_n t + \varepsilon_n)\cos(\lambda_n x),\ \lambda_n = n\pi/l. \end{gathered} \tag{6}$$

В результате получаем частотное уравнение

$$a^2\lambda_n^4 - \omega^2 - \left(1 + \frac{E}{kG}\right)r^2\lambda_n^2\omega^2 + r^2\frac{\rho}{kG}\omega^4 = 0, \tag{7}$$

где $a^2 = IE/F\rho$; r — радиус инерции поперечного сечения балки: $r^2 = I/F$. Помимо этого, возникает связь между амплитудами колебаний A_n и B_n:

$$\frac{B_n}{A_n} = \lambda_n\left[1 - \frac{E}{kG}\frac{\omega_n^2}{\Omega_n^2} r^2\lambda_n^2\right]. \tag{8}$$

Здесь Ω_n — частоты колебаний балки в классической теории Бернулли — Эйлера [1], к которым приводит учет только первых двух членов в уравнении (7):

$$\Omega_n = a\lambda_n^2. \tag{9}$$

Частотное уравнение (7) определяет две серии частот, из которых только низкочастотная мода колебаний непрерывно переходит в частоты Бернулли — Эйлера (9) при обращении в нуль малого параметра в теории Тимошенко $r^2\lambda_n^2$ [5]. Сам Тимошенко [1, 3] рассматривал только основную низкочастотную моду колебаний, решая уравнение (7) методом итераций с учетом малости параметра $r^2\lambda_n^2$ [1, 3]. При этом последний член в уравнении (7), порождаемый кинетической энергией чисто сдвиговых деформаций, отбрасывался как величина более высокого порядка малости по $r^2\lambda_n^2$ [6]. Влияние сдвига на изгибные колебания учитывалось слагаемым в (7), пропорциональным E/kG. В результате получалась следующая формула для частот [1]:

$$\omega_n \simeq a\lambda_n^2\left[1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{E}{kG}\right)r^2\lambda_n^2\right]. \tag{10}$$

Как выяснено в [5], вторая высокочастотная мода колебаний в теории Тимошенко играет вспомогательную роль. Колебания с такими частотами практически не возбуждаются, но их учет в частотном уравнении улучшает частоты основной моды колебаний.

Ниже показано, что такие же поправки к частотам, как и в (10), можно найти с помощью параболического уравнения, описывающего поперечные колебания балки Тимошенко, в котором нет нефизического удвоения частот. Основная идея предлагаемого подхода состоит в том, чтобы попытаться убрать из уравнений (1)—(3) переменную y_2, описывающую сдвиговую деформацию, но при этом все-таки учесть влияние таких деформаций на изгибные колебания.

В первом слагаемом в формуле (2), определяющей кинетическую энергию балки, основной вклад дает изгибная переменная $\dot{y}_1$, а $\dot{y}_2$ является лишь поправкой к ней. Действительно, используя явные решения, например, для шарнирно опертой балки (6) и соотношения между амплитудами (8), получаем

$$\frac{\dot{y}_2}{\dot{y}_1} = \frac{r^2\lambda_n^2 \dfrac{E}{kG}\left(\dfrac{\omega_n}{\Omega_n}\right)^2}{1 - r^2\lambda_n^2 \dfrac{E}{kG}\left(\dfrac{\omega_n}{\Omega_n}\right)^2}. \tag{11}$$

Для достаточно длинных балок (h/l мало, h — высота балки) $\omega_n^2/\Omega_n^2 \sim 1$ (см., например, [5]). В результате формула (11) дает

$$\frac{\dot{y}_2}{\dot{y}_1} \simeq r^2\lambda_n^2 \ll 1. \tag{12}$$

Следует отметить, что эта оценка имеет место только для колебаний основной моды в теории Тимошенко. Таким образом, переменную y_2 в формуле (1) можно опустить.

Второе слагаемое в формуле (3) представляет собой упругую энергию сдвиговых деформаций. Переменную y_2', входящую сюда, можно выразить через y_1. Действительно, согласно закону Гука, для сдвиговых деформаций находим

$$y_2' = \frac{Q}{kGF},$$

где Q — перерезывающая сила, которая возникает при поперечных колебаниях балки. Из элементарной теории балки имеем [1]

$$Q = -EI\frac{d^3y_1}{dx^3}.$$

Следовательно,

$$y_2' = -\frac{EI}{kFG}y'''_1. \tag{13}$$

Чтобы определить правильную функцию Лагранжа для изгибных колебаний, надо подставить (13) в (3) и изменить знак у второго слагаемого на противоположный. Тем самым будет учтен тот факт, что часть энергии изгибных колебаний уходит в энергию сдвиговых деформаций.

Окончательно получаем лагранжеву функцию в нашей модели

$$L_1 = \frac{\rho F}{2} \int_0^l \dot{y}^2 dx + \frac{\rho I}{2} \int_0^l \dot{y}'^2 dx - \frac{EI}{2} \int_0^l y''^2 dx + \frac{E^2 I^2}{2kFG} \int_0^l y'''^2 dx. \tag{14}$$

Для упрощения формул индекс 1 у изгибной переменной $y(t, x)$ опущен.

Варьируя (14), имеем новое параболическое уравнение, описывающее поперечные колебания балки, которое учитывает влияние сдвиговых деформаций на изгибные колебания:

$$\ddot{y} + a^2 y_x^{(4)} - r^2 \ddot{y}'' + a^2 r^2 \frac{E}{kG} y_x^{(6)} = 0 \tag{15}$$

($y_x^{(n)} \equiv \partial^n y / \partial x^n$). Для шарнирно опертой балки варьирование (14) надо проводить при следующих условиях на ее концах:

$$y(t, 0) = y(t, l) = 0, \; y''(t, 0) = y''(t, l) = 0. \tag{16}$$

Подставляя в (15) нормальную форму колебаний, диктуемую граничными условиями (16), находим частотное уравнение

$$\omega_n^2 (1 + r^2 \lambda_n^2) - a^2 \lambda_n^4 \left(1 - \frac{E}{kG} r^2 \lambda_n^2\right) = 0, \tag{17}$$

решая которое с той же точностью, с какой были получены поправки к частотам в модели Тимошенко, приходим к формуле (10)

$$\omega_n = a\lambda_n^2 \sqrt{\frac{1 - \frac{E}{kG} r^2 \lambda_n^2}{1 + r^2 \lambda_n^2}} \simeq a\lambda_n^2 \left[1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{E}{kG}\right) r^2 \lambda_n^2\right].$$

Таким образом, предложенное нами уравнение (15) дает такие же поправки к частотам Бернулли — Эйлера, как и модель Тимошенко. С помощью явного решения для $y(t, x)$ из (6) и частотного уравнения (17) легко убедиться в том, что энергия в предложенной модели, соответствующая функции Лагранжа (14), положительно определена:

$$E_n = \frac{1}{4} A_n^2 EI \lambda_n^4 \left(1 - \frac{E}{kG} r^2 \lambda_n^2\right).$$

Для прямоугольной балки $E/kG = 3{,}2$ (см., например, [1]). В области применимости рассматриваемой теории ($r^2 \lambda_n^2 \ll 1$) E_n — положительная величина.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У.** Колебания в инженерном деле. — М.: Машиностроение, 1985.
2. **Рэлей Д.В.** Теория звука. — М.: ГТТИ, 1955. — Т. 1.
3. **Timoshenko S.** On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars // Phil. Mag. — 1921. — V. 41. — P. 744; On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section // Ibid. — 1922. — V. 43. — P. 125.
4. **Григолюк Э.И., Селезов И.Т.** Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. — М.: ВИНИТИ, 1973.
5. **Нестеренко В.В.** К теории поперечных колебаний балки Тимошенко // ПММ. — 1993. — Т. 57, вып. 4.
6. **Филин А.П.** Прикладная механика твердого деформируемого тела. — М.: Наука, 1981. — Т. 3.

г. Дубна
Московской области

Поступила 5/IV 1993 г.