

10. Тактаров Н. Г. Распад струи магнитной жидкости.— *Магнитн. гидродинамика*, 1975, № 2.
11. Баштовой В. Г., Краков М. С. Устойчивость течения тонкого слоя вязкой магнитной жидкости.— *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1977, № 5.
12. Баштовой В. Г., Краков М. С. Устойчивость осесимметричной струи намагничивающейся жидкости.— *ПМТФ*, 1978, № 4.
13. Архипенко В. И., Барков Ю. Д., Баштовой В. Г., Краков М. С. Устойчивость цилиндрической свободной поверхности намагничивающейся жидкости.— *ДАН БССР*, 1979, т. 23, № 4.
14. Архипенко В. И., Барков Ю. Д., Баштовой В. Г. Исследование формы капли намагничивающейся жидкости в однородном магнитном поле.— *Магнитн. гидродинамика*, 1978, № 3.
15. Барков Ю. Д., Баштовой В. Г. Экспериментальное исследование неустойчивости плоских слоев намагничивающейся жидкости.— *Магнитн. гидродинамика*, 1977, № 4.

УДК 538.4

К ТЕОРИИ ИНДУКЦИОННОГО МГД-ДВИЖИТЕЛЯ СО СВОБОДНЫМ ПОЛЕМ

В. И. Яковлев

(Новосибирск)

Опубликовано значительное количество работ [1—6] по магнитогидродинамическим движителям. Однако успехи, достигнутые за последние годы в создании и техническом использовании сверхпроводящих магнитных систем [7], стимулируют дальнейшие исследования по МГД-двигателям.

Данная работа посвящена исследованию энергетических характеристик так называемой индукционной МГД-системы со свободным полем [2]. Необходимость работы обусловлена тем, что в [2] энергетические характеристики рассматриваемого МГД-двигателя были получены без учета продольного краевого эффекта и поэтому сильно завышены. Впоследствии результаты [2] без критического анализа воспроизводились в других публикациях [3, 6], посвященных МГД-двигателям.

Проведенное в данной работе исследование показало, что учет конечности размеров источника электромагнитного поля приводит не только к количественным изменениям. При этом эффективность установки для заданной напряженности магнитного поля существенно ниже предсказаний [2], требуемые магнитные поля для достижения заданного значения КПД значительно выше. В работе предложен способ повышения эффективности рассматриваемого индукционного МГД-двигателя за счет «амплитудной модуляции», при которой энергетические характеристики двигателя (конечных размеров) могут быть в некоторой степени приближены к «идеальным» [2].

1. Рассматривается твердое тело конечных размеров, находящееся в безграничной проводящей жидкости с проводимостью σ , плотностью ρ , приводимое в движение электромагнитными силами; источник полей находится внутри тела. В качестве твердого тела рассматривается простейшая модель — плоская пластина конечной ширины $2a$ по оси x , бесконечно протяженная по оси z , движущаяся в своей плоскости по направлению отрицательной полуоси x . Предположение о бесконечности по оси z не имеет принципиального значения. Полученные результаты будут верны, если рассматриваемую длинную пластину свернуть в «кольцо»-цилиндр с высотой $2a$ и радиусом, существенно превышающим длину волны $2\pi/k_1$.

Источником электромагнитного поля в окружающей жидкости являются заданные в плоскости пластины поверхностные токи, имеющие z -направление, распределенные по ширине пластины:

$$(1.1) \quad i_z(x_1, t) = \text{Real } J_0 \cdot i_0(x_1) e^{i(k_1 x_1 - \omega_0 t)} (|x_1| \leq a)$$

(эти токи выступают в качестве индуктора). В (1.1) J_0 — максимальная плотность тока, функция $i_0(x_1)$ характеризует распределение амплитуды тока по ширине пластины, $|i_0(x_1)| \leq 1$. Через x_1, y_1 здесь и ниже обозначены размерные координаты, для соответствующих безразмерных величин использованы символы x, y без индексов. Задача заключается в определении распределения полей E, H , суммарной силы, действующей на пластину с токами (1.1) со стороны магнитного поля токов j в жидкости, потребной электрической мощности, а также приобретаемой пластиной скорости u_0 .

Ниже показано, что в достаточно широких пределах параметров справедливо предположение о малости параметра магнитогидродинамического взаимодействия

$$(1.2) \quad N = \frac{\sigma H^2 a}{\rho c u_0} \ll 1.$$

При этом задача упрощается. В частности, электромагнитные поля в жидкости определяются из уравнений

$$(1.3) \quad \operatorname{rot} H = (4\pi/c) j, \quad \operatorname{rot} E = -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}, \quad \operatorname{div} H = 0, \\ j = \sigma[E + (1/c) v \times H],$$

где v — известное поле скоростей, получающееся при обтекании данного тела без учета электромагнитных сил. В случае плоской пластины это поле скоростей может быть принято в виде $v = u_0 e_x$, не учитывая наличие пограничного слоя. Последнее справедливо, если пространство вблизи пластины, занятое полями E, H , существенно больше объема, занятого пограничным слоем, т. е. при

$$(1.4) \quad \lambda = 2\pi/k_1 \gg \delta,$$

где δ — толщина пограничного слоя.

2. Поля E, H , удовлетворяющие уравнениям (1.3), ищутся через вектор-потенциал

$$(2.1) \quad A = J_0 (2a/c) A(x, y) e^{-i\omega_0 t} e_z,$$

причем в безразмерных переменных x, y , введенных при помощи масштаба длины $2a$, безразмерная комплексная функция $A(x, y)$ удовлетворяет следующим уравнению и граничным условиям:

$$(2.2) \quad \Delta A(x, y) + \left[ik_0 A(x, y) - s \frac{\partial A(x, y)}{\partial x} \right] \operatorname{Re}_m = 0;$$

$$(2.3) \quad \frac{\partial A}{\partial y} \Big|_{y=0} = -2\pi i_1(x) e^{ik_0 x}, \quad i_1(x) = \begin{cases} i_0(x) & \text{при } |x| \leq 1/2, \\ 0 & \text{при } |x| > 1/2; \end{cases}$$

$$(2.4) \quad A|_{y=\infty} = 0.$$

Входящие в (2.2) безразмерные магнитное число Рейнольдса Re_m и скольжение s

$$(2.5) \quad \operatorname{Re}_m = 4\pi\sigma v_\Phi^0 2a/c^2, \quad s = u_0/v_\Phi^0$$

определены через фазовую скорость бегущей волны

$$(2.6) \quad v_\Phi^0 = \omega_0/k_1$$

и скорость жидкости u_0 (v_Φ^0 и u_0 определяются в системе пластины). В последующем понадобится также магнитное число Рейнольдса, определенное

по скорости жидкости u_0

$$(2.7) \quad \text{Re}_m^0 = 4\pi\sigma u_0 2a/c^2 = \text{Re}_m s.$$

Параметр

$$(2.8) \quad k_0 = k_1 2a = n\pi, \quad n = 2a/(\lambda/2)$$

характеризует число полувольт $\lambda/2$ тока (1.1), укладываемых на ширине пластины. Граничные условия (2.3), (2.4) написаны для верхнего полупространства $y \geq 0$. Рассмотрением области $y \geq 0$ ограничиваемся из-за симметрии $A(x, y)$ относительно плоскости $y = 0$.

Решение задачи (2.2)–(2.4) строится при помощи фурье-преобразования. Представив

$$\begin{aligned} i_1(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} I(k) e^{ikx} dk, \quad I(k) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} i_1(x) e^{-ikx} dx = \\ &= (1/2\pi) \int_{-1/2}^{1/2} i_0(x) e^{-ikx} dx, \end{aligned}$$

решение можно получить в виде

$$(2.9) \quad A(x, y) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I(k - k_0) e^{ikx} e^{-\sqrt{k^2 - i\text{Re}_m(k_0 - ks)}y}}{\sqrt{k^2 - i\text{Re}_m(k_0 - ks)}} dk,$$

где $I(k)$ — спектральная плотность ступенчатой функции $i_1(x)$ (2.3); $I(k - k_0)$ — спектральная плотность функции $i_1(x) e^{ik_0 x}$; под $\sqrt{k^2 - i\text{Re}_m(k_0 - ks)}$ понимается значение корня с положительной вещественной частью.

Следует заметить, что никаких ограничений на величину магнитного числа Рейнольдса в (2.9) не использовано.

Из (2.1), (2.9) видно, что электромагнитное поле в жидкости представляет собой суперпозицию бегущих по направлению x полей с фиксированной частотой ω_0 и фазовыми скоростями, меняющимися от $-\infty$ до ∞ , так как волне, отвечающей безразмерному волновому числу k , соответствует фазовая скорость

$$(2.10) \quad v_\phi = (k_0/k) v_\phi^0,$$

где v_ϕ^0 , k_0 определены в (2.6), (2.8).

3. Вычислим интегральные величины (силу тяги, действующую на пластину, и потребную электрическую мощность), отнесенные к единице длины пластины по оси z . Сила, действующая на пластину с токами (1.1) со стороны магнитного поля, имеет только x -компоненту, которая вычисляется в виде

$$F_x = -(1/c) \int_{-a}^a i_z(x_1, t) H_y(x_1, 0, t) dx_1$$

или после перехода к комплексным величинам и усреднения по времени

$$\begin{aligned} \langle F_x \rangle &= \frac{2aJ_0^2}{2c^2} \text{Real} \int_{-\infty}^{\infty} i_1(x) e^{ik_0 x} \frac{\partial A^*}{\partial x} \Big|_{y=0} dx = \\ &= -2a \frac{J_0^2 (2\pi)^2}{2c^2} \text{Real} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ik}{\sqrt{k^2 - i\text{Re}_m(k_0 - ks)}} |I(k - k_0)|^2 dk. \end{aligned}$$

Вычисляя реальную часть подынтегрального выражения, результат можно привести к виду

$$(3.1) \quad \langle F_x \rangle = -a (H_0^2/4\pi^2) F_1(k_0, \text{Re}_m, s),$$

$$F_1 = 4\pi^{\frac{1}{2}} \left[\int_{-\infty}^{k_0/s} k \Phi(k) |I(k - k_0)|^2 dk - \int_{k_0/s}^{\infty} k \Phi(k) |I(k - k_0)|^2 dk \right],$$

где под $\Phi(k)$ понимается положительно определенная при всех k функция

$$(3.2) \quad \Phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{k^4 + \text{Re}_m^2(k_0 - ks)^2 - k^2}}{\sqrt{k^4 + \text{Re}_m^2(k_0 - ks)^2}}.$$

Потребная электрическая мощность Q , представляющая собой сумму мощностей, идущих на совершение механической работы над жидкостью и на ее джоулев нагрев, вычисляется как поток вектора Пойнтинга $\mathbf{S}$ через поверхность (в рассматриваемой плоской задаче через контур), охватывающую пластину, т. е.

$$Q = 2 \int_{-a}^a S_y|_{y=0} dx_1, \quad S_y = (c/4\pi) E_z H_x, \quad \langle S_y \rangle = \frac{\omega_0}{8\pi} \frac{J_0^2 a}{c^2} \times$$

$$\times \text{Real} \left[iA(x, 0) \frac{\partial A^*}{\partial y} \Big|_{y=0} \right].$$

Так как $S_y|_{y=0} = 0$ при $|x_1| > a$, то пределы интегрирования в Q можно заменить на $[-\infty, \infty]$; подставляя решение (2.9) в выражение $\langle S_y \rangle$, искомую величину приведем к виду

$$(3.3) \quad \langle Q \rangle = (\omega_0/8\pi^2) (2a)^2 H_0^2 Q_1(k_0, \text{Re}_m, s),$$

$$Q_1 = 4\pi^{\frac{1}{2}} \left[\int_{-\infty}^{k_0/s} \Phi(k) |I(k - k_0)|^2 dk - \int_{k_0/s}^{\infty} \Phi(k) |I(k - k_0)|^2 dk \right].$$

В (3.1), (3.3) под H_0 понимается величина

$$H_0 = 2\pi J_0/c,$$

имеющая смысл максимального значения напряженности магнитного поля. КПД рассматриваемой модели определяется в виде

$$\eta = - \frac{\langle F_x \rangle u_0}{\langle Q \rangle} = \frac{s}{k_0} \frac{F_1}{Q_1}.$$

Из (3.1), (3.3) видно, что различные участки спектра $I(k - k_0)$ функции $i_1(x)e^{ik_0x}$ вносят различный вклад в величины $\langle F_x \rangle$, $\langle Q \rangle$. С этой точки зрения весь спектр можно разбить на три участка:

- I ($k < 0$) — вклад в F_1 отрицателен, в Q_1 положителен;
- II ($0 < k < k_0/s$) — вклад в F_1 положителен, в Q_1 положителен;
- III ($k > k_0/s$) — вклад в F_1 отрицателен, в Q_1 отрицателен.

Отсюда следует, что бегущие магнитные поля только на участке II работают в режиме двигателя. Участок III соответствует генераторному режиму — здесь жидкость тормозится полем и совершает работу над полем и часть этой работы за вычетом джоулева нагрева передается в электрическую систему. Участок I соответствует нагревателю — здесь джоулев

нагрев превышает работу, совершаемую жидкостью против электромагнитного поля. Следовательно, в тепло переводится не только срабатываемая часть кинетической энергии жидкости, но и электрическая энергия.

Указанные особенности имеют физическое объяснение, заключающееся в том, что на участке II спектра фазовая скорость составляющих волн, согласно (2.10), (2.5), превышает скорость жидкости u_0 , т. е. $v_{\Phi s}^0 = u_0 < v_{\Phi} < \infty$, в то время как на участке III $0 < v_{\Phi} < u_0$. На участке I волны бегут в направлении, противоположном течению жидкости.

4. Определение величины H_0 , необходимой для обеспечения скорости u_0 , производится из уравнения движения пластины $\langle F_x \rangle + T_x = 0$, $T_x = c_f 4\pi u_0^2/2$ — сила сопротивления трения. Отсюда с учетом (3.1) следует

$$(4.1) \quad H_0 = 2\pi \sqrt{2\rho c_f / F_1} u_0.$$

Предполагаем, что коэффициент сопротивления пластины, приводимой в движение рассматриваемым электромагнитным способом, равен известному коэффициенту сопротивления [8] гладкой пластины

$$c_f = 0,455/(\lg \text{Re})^{2,58} - 1700/\text{Re},$$

найденному без учета влияния электромагнитных полей и пригодному в широком диапазоне чисел Рейнольдса до $\text{Re} \sim 10^9$. Вследствие того что в (4.1) c_f входит в виде множителя $\sqrt{c_f}$, ошибка, допускаемая сделанным предположением, не очень велика, и для оценок H_0 этой ошибкой можно пренебречь.

Так как c_f зависит от Re , причем

$$\text{Re} = u_0 2a/\nu = \text{Re}_m^0 \nu_m/\nu, \quad \nu_m/\nu = c^2/4\pi\sigma\nu$$

(для морской воды $\sigma = 5 \cdot 10^{10}$ 1/с, $\nu = 10^{-2}$ см²/с, $\nu_m/\nu = 1,43 \cdot 10^{11}$), соотношение (4.1) можно представить в виде

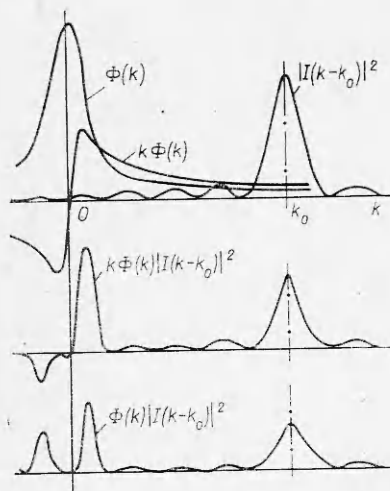
$$(4.2) \quad H_0 = \text{Re}_m^0 2\pi \sqrt{2c_f(\text{Re})/F_1(k_0, \text{Re}_m, s)} \cdot \nu_m \sqrt{\rho}/2a.$$

Из (1.2), (4.1) для параметра МГД-взаимодействия имеем

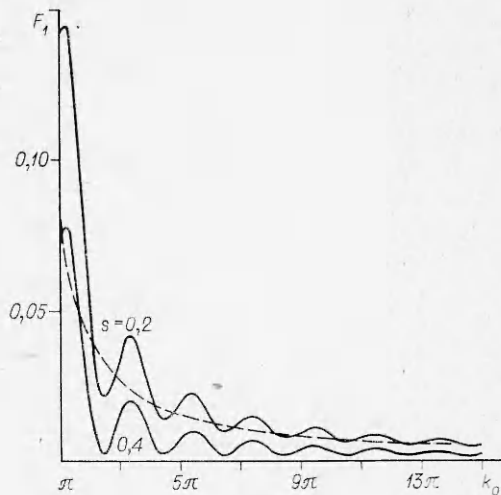
$$N = \text{Re}_m^0 2\pi c_f / F_1.$$

При изменении Re от 10^7 до $3 \cdot 10^9$ (при этом $7 \cdot 10^{-5} < \text{Re}_m^0 < 2,1 \cdot 10^{-2}$) коэффициент сопротивления c_f изменяется в пределах $(3 - 1)10^{-3}$. Отсюда видно, что имеются достаточно широкие возможности для справедливости условия (1.2). Хотя следует сразу заметить, что для рассматриваемого ниже примера с большими значениями $2a$, u_0 (следовательно, и Re_m^0) выгодные с точки зрения КПД режимы приводят к значениям F_1 , при которых $N \sim 0,25$. При меньших Re_m^0 выполнение условия (1.2) облегчается.

5. Для получения качественных представлений о зависимости F_1 , Q_1 от k_0 при фиксированных Re_m , s необходимо исследовать поведение подынтегральных функций в (3.1), (3.3). На фиг. 1 схематически представлены функции $\Phi(k)$ (3.2), $k\Phi(k)$, $|I(k - k_0)|^2$, а также $k\Phi(k)|I(k - k_0)|^2$, $\Phi(k)|I(k - k_0)|^2$ при фиксированном значении k_0 . Максимального значения по модулю функция $k\Phi(k)$ достигает при $k_{1,2} = (\sqrt{3}/6) [-\text{Re}_m s \pm \sqrt{\text{Re}_m^2 s^2 + 4\sqrt{3}\text{Re}_m k_0}]$; при условии $\text{Re}_m s \ll 1$, справедливом почти для всех возможных приложений с использованием морской воды, $k_{1,2} = \pm (1/\sqrt{3}) \sqrt{\text{Re}_m k_0}$, причем максимальное значение $|k\Phi(k)|$ при этом равно $\sqrt{2}/4$. При $k^2 \gg \text{Re}_m |k_0 - ks|$ функции $\Phi(k)$, $k\Phi(k)$ упрощаются; здесь $\Phi(k) = \text{Re}_m |k_0 - ks|/2|k|^3$, и при $k = k_0$ $\Phi(k)$, $k\Phi(k)$



Фиг. 1

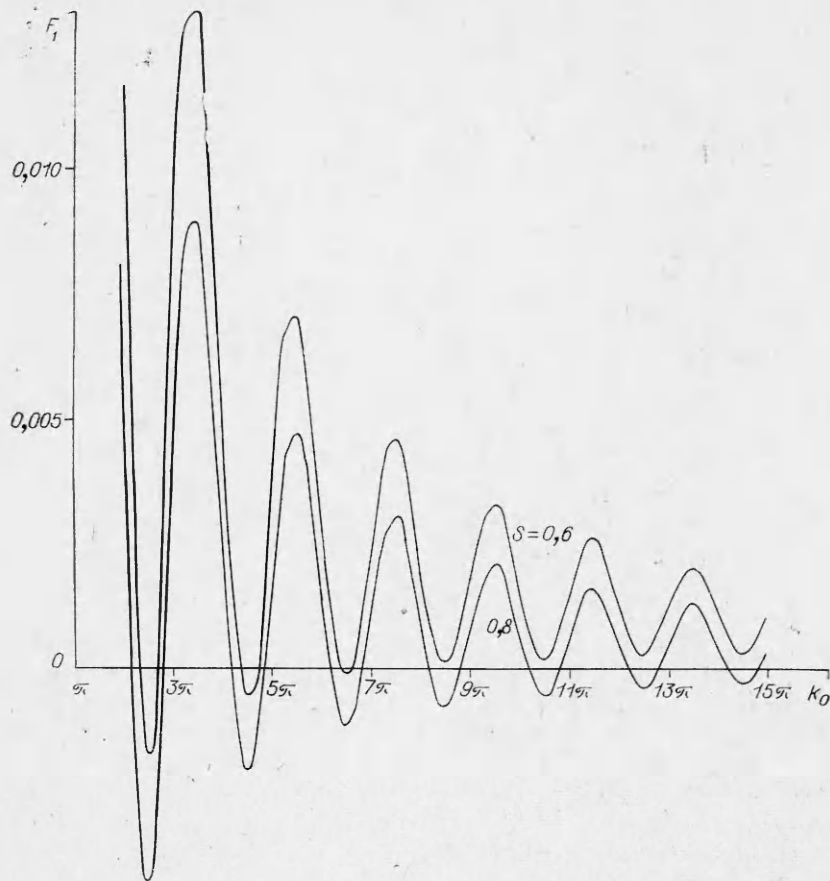


Фиг. 2

принимают значения $\text{Re}_m(1-s)/2k_0^2$, $\text{Re}_m(1-s)/2k_0$ соответственно. Важное значение в поведении интегралов F_1 , Q_1 играет функция $|I(k-k_0)|^2$. Независимо от конкретного вида ступенчатой функции $i_1(x)e^{ik_0x}$ в мощности спектра имеется главный максимум в точке $k=k_0$ с шириной $\Delta k \sim \sim 2\pi$, определяемой соотношением неопределенности. Кроме главного максимума, имеются побочные максимумы, интенсивность которых падает по мере удаления от главного максимума, причем закон убывания побочных максимумов чрезвычайно важен, так как именно это определяет поведение подынтегральных функций в районе начала координат. Как видно из фиг. 1, основной вклад в интегралы F_1 , Q_1 вносят два участка оси k : $|k-k_0| \leq \Delta k$ и $|k| \leq \sqrt{\text{Re}_m k_0}$. На первом из участков (назовем правым) подынтегральные функции имеют максимумы $I^2(0) \text{Re}_m(1-s)/2k_0$ и $I^2(0) \text{Re}_m(1-s)/2k_0^2$, монотонно зависящие от k_0 ; максимумы подынтегральных функций на левом участке, представляющие собой усиленные множителями $k\Phi(k)$ и $\Phi(k)$ побочные максимумы функции $|I(k-k_0)|^2$, немонотонно зависят от k_0 (в зависимости от k_0 положение их перемещается вдоль k в районе $k=0$ и значения рассматриваемых максимумов меняются из-за быстрого изменения множителей $k\Phi(k)$ и $\Phi(k)$). На фиг. 1 функции $k\Phi(k)|I(k-k_0)|^2$, $\Phi(k)|I(k-k_0)|^2$ приведены для такого значения k_0 , при котором положение одного из побочных максимумов совпадает с положением максимума функции $k\Phi(k)$.

Следовательно, зависимости $F_1(k_0)$, $Q_1(k_0)$ при фиксированных Re_m , s имеют немонотонный характер до некоторых критических значений k_0 . Характер осцилляций и величина критических значений k_0 определяются функцией $|I(k-k_0)|^2$, точнее, законом убывания ее побочных максимумов.

Результаты вычислений для случая постоянной амплитуды тока по ширине пластины, т. е. при $i_0(x) \equiv 1$, $I(k) = (1/2\pi) \frac{\sin k/2}{k/2}$, приведены на фиг. 2—4. Здесь для k_0 , изменяющихся в пределах от π до 15π , представлены зависимости $F_1(k_0)$ (фиг. 2, 3) и $Q_1(k_0)$ (фиг. 4) для различных значений s при $\text{Re}_m^0 = 0,02$. (Значению $\text{Re}_m^0 = 0,02$ соответствует тело с длиной $2a = 200 \text{ м} = 2 \cdot 10^4 \text{ см}$, движущееся со скоростью $u_0 = 1,43 \times$

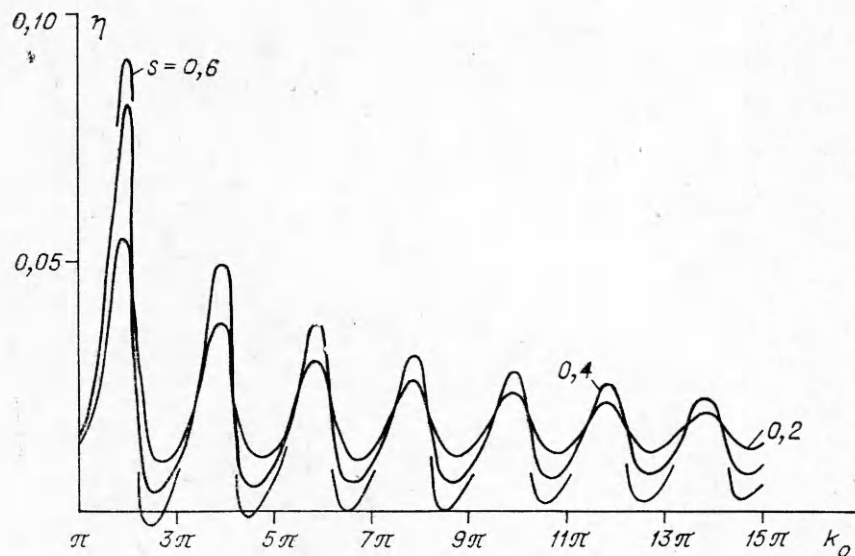


Ф и г. 3

$\times 10^3$ см/с ≈ 50 км/ч в морской воде с проводимостью $\sigma = 5 \cdot 10^{10}$ 1/с; эти параметры совпадают или близки рассмотренным в [2].) На фиг. 4 зависимость $\eta(k_0)$ приведена полностью лишь для $s = 0,2; 0,4$, для $s = 0,6$ нанесены участки кривых, выходящие за пределы первых двух. При $s = 0,8$ все локальные максимумы $\eta(k_0)$ имеют значения, меньшие изображенных на графиках, поэтому эта зависимость на фиг. 4 не представлена.

В связи с приведенными зависимостями следует обратить внимание на два момента: во-первых, КПД, не достигающий величины 0,1 ни при каких значениях k_0, s , весьма далек от предсказаний теории [2], не учитывающей конечность размеров источника электромагнитного поля; во-вторых, F_1 и η не только осциллируют относительно средних положений при увеличении k_0 , но при больших s переходят и в область отрицательных значений. Хотя $v_{\Phi}^0 > u_0$, на пластину вместо силы тяги может действовать тормозящая сила со стороны магнитного поля (на некоторых интервалах k_0). Этот непривычный результат обязан своим происхождением участку III спектра $I(k - k_0)$.

Из фиг. 2—4 видно, что осциллирующий характер зависимостей $F_1(k_0), \eta(k_0)$ имеет тенденцию к сохранению и за пределами $k_0 = 15\pi$. На первый взгляд кажется, что это обстоятельство противоречит «здоровому смыслу». Действительно, интуитивно представляется, что если на ширине пластины $2a$ помещается «много» длин волн, т. е. $k_0 \gg \pi$,



Ф и г. 4

и если $i_0(x) \equiv 1$ (амплитуда тока постоянна по ширине пластины), то рассматриваемая пластина конечной ширины в некотором смысле слабо отличается от бесконечной пластины. А именно представляется, что величины $\langle F_x \rangle$, $\langle Q \rangle$, η совпадают с аналогичными величинами, вычисленными для участка с шириной $2a$, мысленно вырезанного из бесконечной пластины с током $i_z(x_1, t) = J_0 e^{i(\omega_1 t - \omega_0 t)} (|x_1| \leq \infty)$. Безразмерные величины, относящиеся к рассматриваемому участку, обозначим через F_∞ , Q_∞ , η_∞ , причем можно показать, что

$$(5.1) \quad F_\infty = 2\pi \operatorname{Re}_m (1-s)/2k_0, \quad Q_\infty = 2\pi \operatorname{Re}_m (1-s)/2k_0^2, \quad \eta_\infty = s.$$

Входящие сюда параметры Re_m , s , k_0 имеют прежний смысл (2.5)–(2.7). На фиг. 2 для значения $s = 0,2$ зависимость $F_\infty(k_0)$ показана штриховой линией. Видно, что даже в районе $k_0 = 15\pi$ соответствующая величина F_1 еще заметно отличается от F_∞ . Что касается η , то в пределах $\pi \leq k_0 \leq 15\pi$ она вообще весьма далека от величины $\eta_\infty = s$.

Таким образом, если на пластине укладывается порядка 15 полуволн, такая пластина еще далека от «бесконечной». Интересно выяснить, при каких k_0 зависимости $F_1(k_0)$, $Q_1(k_0)$ из (3.1), (3.3) выходят на свои асимптотические значения (5.1)? Для ответа обратимся к подынтегральным функциям F_1 , Q_1 , показанным на фиг. 1. Заметим, что выход на асимптотические значения происходит тогда, когда вклад левых пиков подынтегральных функций $k\Phi(k)|I(k-k_0)|^2$ и $\Phi(k)|I(k-k_0)|^2$ в интегралы становится мал по сравнению с вкладом правых пиков. Посмотрим, к какому условию приводит это обстоятельство применительно к F_1 .

Вклад окрестности точки $k = 0$ в интеграл F_1 может быть мал в двух случаях: во-первых, если величина максимума подынтегральной функции в этой области существенно меньше соответствующего максимума в точке $k = k_0$, т. е. если $1/k_0^2 \ll \operatorname{Re}_m \times (1-s)/2k_0$, или

$$(5.2) \quad |(1-s) \operatorname{Re}_m k_0|^{-1} \ll 1,$$

во-вторых, если на отрезке $|k| \sim \sqrt{\operatorname{Re}_m k_0}$ укладывается значительное

число побочных максимумов функции $|I(k - k_0)|^2$, т. е. $\sqrt{\text{Re}_m k_0} \gg 2\pi$, или

$$(5.3) \quad 2\pi/(\text{Re}_m k_0) \ll 1$$

(при этом вклад окрестности $k = 0$ в интеграл F_1 исчезает из-за нечетности функции $k\Phi(k)$ в этой окрестности). Так как представляющие интерес значения параметра s не выходят за пределы $0,3 \leq s \leq 0,8$, то условия (5.2), (5.3) практически совпадают. Что касается интеграла Q_1 , здесь выполнения условия (5.3) недостаточно для выхода Q_1 на асимптотическое поведение. При (5.3) вклад окрестности $k = 0$ в интеграл Q_1 не исчезает, он только перестает осциллировать в зависимости от k_0 . Необходимое условие выводится аналогично (5.2) и принимает вид $4/(\sqrt{2 \text{Re}_m k_0 k_0^2}) \ll \text{Re}_m \times (1 - s)/2k_0^2$ или

$$(5.4) \quad 4[\sqrt{\text{Re}_m k_0} \text{Re}_m (1 - s)]^{-1} \ll 1.$$

Это более сильное условие, чем (5.2) или (5.3), поскольку, как уже отмечалось, почти для всех возможных приложений $\text{Re}_m^0 \ll 1$. Например, для рассмотренного выше случая с $\text{Re}_m^0 = 0,02$ при $s = 0,5$ условие (5.4) сводится к требованию $k_0 \gg 2 \cdot 10^6$. Следовательно, представляющие практический интерес значения КПД $\eta \sim s$ достигаются при очень больших k_0 , для которых величина F_1 , совпадающая с F_∞ из (5.1), мала. Это приводит к нереально большим значениям потребного поля H_0 , определяемым по (4.1) или (4.2), вследствие чего они здесь не приводятся. Таким образом, из проделанного анализа видно, что для $\text{Re}_m \ll 1$ малым параметром, определяющим асимптотическое поведение величин F_1 , Q_1 , η при больших k_0 , является параметр

$$(5.5) \quad \varepsilon = (\sqrt{\text{Re}_m k_0} \text{Re}_m)^{-1},$$

причем

$$F_1 = F_\infty [1 + O(\varepsilon^2 \text{Re}_m^2)], \quad Q_1 = Q_\infty [1 + O(\varepsilon)], \quad \eta = \eta_\infty [1 - O(\varepsilon)]$$

(параметр $1-s$ здесь считается конечным).

Необходимо сделать одно замечание. Фактически при приближении к условию (5.4) данное рассмотрение перестает быть справедливым, так как при этом все электромагнитные поля будут утолщены внутри пограничного слоя и предположение (1.4) нарушено. Но ясно одно — требуется очень большое число волн, чтобы выйти на режим «бесконечной пластины», дающий КПД $\eta = s$. Следовательно, при $k_0 \sim \pi$ невозможно пользоваться результатами, полученными из рассмотрения бесконечно протяженного периодического источника для тела конечных размеров, как это сделано в [2].

6. Интерес представляет вопрос о возможности управления энергетическими величинами F_1, η при помощи «амплитудной модуляции». Термин «амплитудная модуляция» здесь используется для обозначения того, что распределение амплитуды тока (1.1) по ширине пластины отлично от равномерного, т. е. $i_0(x) \neq 1$.

Выше замечено, что поведение функций $F_1(k_0)$, $Q_1(k_0)$ при фиксированных Re_m, s зависит от функции $|I(k - k_0)|^2$. Понятно, что если взять $i_0(x)$ такой, чтобы убывание побочных максимумов функции $|I(k - k_0)|^2$ происходило быстрее, чем для $i_0(x) \equiv 1$, то вклад окрестности точки $k = 0$ в интегралы F_1, Q_1 снижается. Так как этот вклад особенно велик для величины Q_1 (из-за большой величины множителя $\Phi(k)$ в интеграле Q), то указанное обстоятельство должно привести к увеличению η .

Рассмотрим пример

$$(6.1) \quad i_0(x) = \cos \pi x \quad (|x| \leq 1/2), \quad I(k) = \cos(k/2)/(\pi^2 - k^2),$$

для которого закон убывания побочных максимумов $|I(k)|^2$ при больших k есть $1/k^4$. При этом, если $1/k_0^4 \ll \text{Re}_m(1-s)/k_0$, окрестность точки $k_0 = 0$ перестает влиять на F_1 и зависимость $F_1(k_0)$ выходит на асимптотическое значение $(1/4\pi)\text{Re}_m(1-s)/2k_0$, множителем $1/2$ отличающееся от выражения F_∞ (5.1), т. е.

$$F_1 = (\text{Re}_m(1-s)/8\pi k_0) [1 + O(\varepsilon^3 \text{Re}_m^2)],$$

где ε определяется согласно (5.5). При $(\sqrt{2\text{Re}_m k_0 k_0^4})^{-1} \ll \text{Re}_m(1-s)/2k_0^2$ Q_1 перестает зависеть от окрестности $k = 0$ и величина η выходит на асимптотическое значение s , т. е.

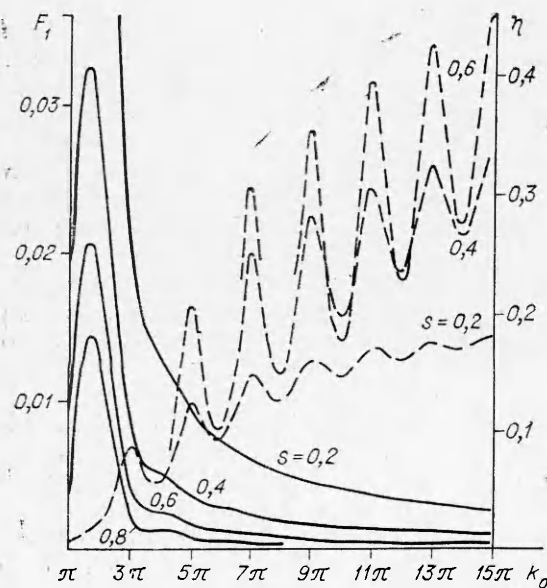
$$\eta = s [1 - O(\varepsilon^{5/2} \text{Re}_m)].$$

Результаты вычислений для рассматриваемого примера (6.1) приведены на фиг. 5 (для рассмотренного выше значения $\text{Re}_m^0 = 0,02$). Здесь сплошные линии изображают F_1 , штриховые — η . Видно, что колебательный характер зависимости $F_1(k_0)$ уже при $k_0 > 3\pi$ проявляется слабо. Что же касается η , то эта величина, хотя и сохраняет колебательный характер в пределах $k_0 \leq 15\pi$, имеет явную тенденцию к росту при увеличении k_0 . При $s = 0,2$ η приближается к асимптотическому значению 0,2 уже при $k_0 = 15\pi$, при больших s асимптотические значения s достигаются, как видно из фиг. 5, при $k_0 > 15\pi$. (Для значения $s = 0,8$ функция $\eta(k_0)$ на график не нанесена, так как максимумы η при данном s и $k_0 < 15\pi$ лежат ниже максимумов η , соответствующих $s = 0,6$.) Необходимо подчеркнуть, что использование «амплитудной модуляции», как показывает сравнение результатов фиг. 2 и 5, позволяет значительно повысить значение η при рассматриваемых значениях параметра k_0 . Важно именно то, что относительно большие значения η достигаются при небольших k_0 ,

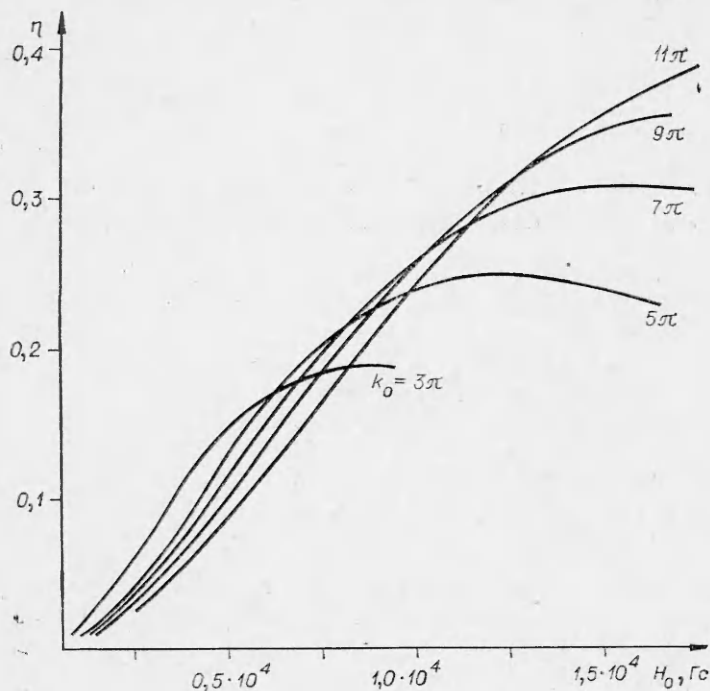
при которых безразмерная сила F_1 еще не очень мала и, следовательно, потребные величины H_0 можно рассматривать как реальные.

На фиг. 6 приведена зависимость КПД от величины H_0 при фиксированных значениях k_0 , обеспечивающих локальные максимумы $\eta(k_0)$. Здесь по оси абсцисс отложены значения H_0 , подсчитанные по формуле (4.2) для размера $2a = 200$ м, $\text{Re}_m^0 = 0,02$.

Видно, что если на пластине укладывается три полуволны тока, т. е. $k_0 = 3\pi$, то независимо от H_0 КПД не может быть больше 19%; при $k_0 = 5\pi$ η не превышает 25%; каждому допустимому значению H_0 соответствует свое значение k_0 , обеспечивающее



Ф и г. 5



Ф и г. 6

максимальный КПД; увеличение допустимого H_0 требует перехода на большее число полувольт и обеспечивает более высокие значения η . На фиг. 6 максимальное значение k_0 взято 11π ; значения 13π , 15π и выше обнаруживают превосходство по η при значениях H_0 , выходящих за принятые на фиг. 6 пределы, поэтому соответствующие кривые здесь не нанесены (принятому здесь максимальному значению $H_0 = 1,75 \cdot 10^4$ Гс отвечает значение параметра $N = 0,24$). Для примера можно заметить, что при $k_0 = 15\pi$, как видно из фиг. 5, достигается значение $\eta \simeq 45\%$, при этом $H_0 \simeq 22 \cdot 10^3$ Гс.

Здесь преимущества использования «амплитудной модуляции» показаны на примере (6.1). Очевидно, если взять «импульс» с еще более узким спектром (например, гауссова кривая e^{-ax^2} обладает минимальной шириной спектра [9]), то эти преимущества должны быть еще более ярко выражены.

Поступила 28 VI 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Кирко И. М. Жидкий металл в магнитном поле. М.—Л., Энергия, 1964.
2. Phillips O. M. The prospects for magnetohydrodynamic ship propulsion.— J. Ship Research, 1962, vol. 5, N 4.
3. Васильев Л. Г., Хожанов А. И. Магнитная гидродинамика в судовой технике. Л., Судостроение, 1967.
4. Азовцев А. А., Васильев Б. С., Лейкин В. С. Перспективы применения МГД-двигателей для подводных транспортных судов.— В сб.: Судостроение за рубежом, 1968, № 1614.
5. Меркулов В. И. Движение сферы в проводящей жидкости под действием скрещенных электрического и магнитного полей.— Магнитн. гидродинамика, 1973, № 1.
6. Башкагов В. А., Орлов П. П., Федосов М. И. Гидрореактивные пропульсивные установки. Л., Судостроение, 1977.

7. Ред. Фонер С., Шварц Б. Сверхпроводящие машины и устройства. М., Мир, 1977.
 8. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., Наука, 1969.
 9. Харкевич А. А. Спектры и анализ. М., Физматгиз, 1962.

УДК 533.95

АВТОМОДЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ИОНИЗОВАННОГО ГАЗА, ВЫТАЛКИВАЕМОГО МАГНИТНЫМ ПОРШНЕМ

В. В. Белошицкий, В. С. Комельков, Г. Ю. Петрущенко
(Москва)

Движение газа в пламенных ускорителях и сильнотоковых разрядах при условии скин-эффекта можно представить как выталкивание его магнитным поршнем под действием заданного тока, протекающего по поверхности. Такая модель была впервые предложена в работе [1] для объяснения пинч-эффекта. На начальной стадии закон нарастания тока достаточно хорошо аппроксимируется линейной функцией времени, а магнитное давление — квадратичной: $p = Ct^n$, где $n = 2$; $C = \text{const}$. При обычных условиях эксперимента магнитное давление много больше начального давления газа, и последним можно пренебречь. В этом случае движение газа является автомодельным. Аналогичная задача для заданного закона изменения скорости поршня рассматривалась ранее [2, 3].

Газ будем считать идеальным одноатомным, а процесс — адиабатическим. Определяющими параметрами в задаче будут координата r , время t , плотность невозмущенного газа ρ_1 , константа C , определяющая закон изменения давления на поршне (начальная скорость $v_1 = 0$ и начальное давление $p_1 = 0$). Из этих параметров можно образовать лишь одну безразмерную переменную

$$\lambda = \sqrt{\frac{C}{\rho_1}} \frac{t^{n/2+1}}{r} = \sqrt{\frac{C}{\rho_1}} \frac{t^{m+1}}{r}, \quad m = \frac{n}{2}.$$

Вводим для скорости, плотности и давления безразмерные функции V , R , P следующим образом:

$$v = \frac{r}{t} V(\lambda), \quad \rho = \rho_1 R(\lambda), \quad p = \frac{\rho_1 r^2}{t^2} P(\lambda), \quad z = \frac{\gamma P}{R},$$

тогда система гидродинамических уравнений приводится к виду [4]

$$(1) \quad \frac{dz}{dV} = z \frac{[2(V-1) + v(\gamma-1)V](V-m-1) -}{(V-m-1)[V(V-1)(V-m-1) -} \\ - (\gamma-1)V(V-1)(V-m-1) - \left[2(V-1) - 2m\frac{\gamma-1}{\gamma}\right]z} \\ - (2m/\gamma + vV)z];$$

$$(2) \quad \frac{d \ln \lambda}{dV} = \frac{(V-m-1)^2 - z}{V(V-1)(V-m-1) - (2m/\gamma + vV)z};$$

$$(3) \quad \frac{d \ln R}{d \ln \lambda} (V-m-1) = \frac{V(V-1)(V-m-1) - (2m/\gamma + vV)z}{z - (V-m-1)^2} + vV,$$

где γ — отношение удельных теплоемкостей; $v = 1, 2, 3$ соответственно для плоской, цилиндрической и сферической симметрии.