

УДК 532.526

Воздействие волны Толлмина–Шлихтинга на осредненные параметры пограничного слоя*

Г.В. Петров

*Институт теоретической и прикладной механики
им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск*

E-mail: smorodsk@itam.nsc.ru

Дан вывод нелокальных уравнений для двух гармоник волны Толлмина–Шлихтинга и осредненных параметров несжимаемого пограничного слоя на пластине. Результаты расчетов показывают, что под воздействием волны трение на стенке увеличивается, и это увеличение становится существенным, когда отношение амплитуд второй и основной гармоник достигает 0,5.

Ключевые слова: пограничный слой, устойчивость, нелинейность, переход к турбулентности.

Волна Толлмина–Шлихтинга рассматривается как периодическое по времени нелинейное возмущение. В работе [1] анализ ограничен двумя гармониками без учета воздействия на осредненные характеристики пограничного слоя на пластине, в настоящей работе это взаимодействие учитывается.

Нестационарные двумерные уравнения Навье–Стокса в ортогональной (см., например, [2]) системе координат (ξ_1, ξ_2) представляются в виде:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad d_t v_i + h_k (v_i v_k - \tau_{ik}) - h_i (v_k^2 - \tau_{kk}) = -\partial_i p / \rho + \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_i,$$

$$\boldsymbol{\tau}_i = (\tau_{i1}, \tau_{i2}), \quad \tau_{ii} = 2\nu (\partial_i v_i + h_k v_k), \quad i = 1, 2, k \neq i, \quad \tau_{12} = \nu (\partial_1 v_2 + \partial_2 v_1 - h_2 v_1 - h_1 v_2),$$

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \sum (\partial_k + h_k) a_k, \quad d_t = \partial_t + \sum v_k \partial_k, \quad \partial_t = \partial / \partial t, \quad \partial_k = H_k^{-1} \partial / \partial \xi_k, \quad h_k = \partial_k \ln H_i,$$

где t — время, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ — скорость, p — давление, ρ — плотность, ν — кинематическая вязкость, H_k — коэффициенты Ламе.

Параметры течения задаются в виде сумм осредненных стационарных значений и возмущений: $v_1 = u + \hat{u}$, $v_2 = \hat{v}$, $\tau_{12} = \tau + \hat{\tau}$, $\tau_{ii} = \tau_i + \hat{\tau}_i$. Используется система

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 08-01-00038а).

координат, связанная с линиями тока осредненного течения (ξ, ψ) , где ξ — расстояние вдоль поверхности пластины, ψ — функция тока, тогда $H_1 = \exp \int h_2 H_2 d\psi$, $H_2 = 1/u$, $h_1 = -\partial_1 \ln u$, h_2 — кривизна линий тока. Используя масштабы длины — v/u_∞ , времени — v/u_∞^2 , скорости — u_∞ , давления — ρu_∞^2 , $\tau_{jk} - u_\infty^2$ получим уравнения для каждой гармоники возмущения:

$$\begin{aligned}(\partial_1 + h_1)\hat{u} + (\partial_2 + h_2)\hat{v} &= 0, \\(\partial_1 + h_1)\hat{\tau}_1 + (\partial_2 + 2h_2)\hat{\tau} - \partial_1 \hat{p} - \partial_1 \hat{u} - \hat{u} \partial_1 u - u \partial_1 \hat{u} - \hat{v} \partial_2 u - h_2 u \hat{v} + h_1 \hat{\tau}_2 &= \{A\}, \\(\partial_1 + 2h_1)\hat{\tau} + (\partial_2 + h_2)\hat{\tau}_2 - \partial_2 \hat{p} - \partial_1 \hat{v} - u \partial_1 \hat{v} - h_1 u \hat{v} + h_2(2u\hat{u} - \hat{\tau}_1) &= \{B\}, \\ \hat{\tau} = (\partial_2 - h_2)\hat{u} + (\partial_1 - h_1)\hat{v}, \quad \hat{\tau}_1 = 2(\partial_1 \hat{u} + h_2 \hat{v}), \quad \hat{\tau}_2 = 2(h_1 \hat{u} + \partial_2 \hat{v}),\end{aligned}$$

и для осредненных параметров пограничного слоя:

$$\begin{aligned}(\partial_1 + h_1)\tau_1 + (\partial_2 + 2h_2)\tau - \partial_1 p - u \partial_1 u - h_1 \tau_2 &= \langle A \rangle, \\(\partial_1 + 2h_1)\tau + (\partial_2 + h_2)\tau_2 - \partial_2 p + h_2(u^2 - \tau_1) &= \langle B \rangle, \\ \tau = (\partial_2 - h_2)u, \quad \tau_1 = 2\partial_1 u, \quad \tau_2 = 2h_1 u = -\tau_1, \\ A = \hat{u}(\partial_1 \hat{u} + h_2 \hat{v}) + \hat{v}(\partial_2 \hat{u} - h_1 \hat{v}), \quad B = \hat{u}(\partial_1 \hat{v} - h_2 \hat{u}) + \hat{v}(\partial_2 \hat{v} + h_1 \hat{u}).\end{aligned}$$

Угловые скобки для A и B означают осреднение, фигурные — комбинационные нелинейные члены для данной гармоники.

Уравнения упрощаются с помощью асимптотических оценок по целым отрицательным степеням $R = \sqrt{\xi}$: $\partial_2, \tau, \hat{\tau}, \hat{\tau}_j = O(R^{-1})$, $h_1, \tau_j = O(R^{-2})$, ∂_1 для возмущений имеет порядок R^{-1} , а для пограничного слоя R^{-2} . Отбрасываются члены порядка R^{-2} , в частности, содержащие множителем кривизну линий тока h_2 . Получаемые уравнения:

$$\begin{aligned}\partial_1 \hat{u} + \partial_2 \hat{v} &= 0, \\ \partial_1 \hat{\tau}_1 + \partial_2 \hat{\tau} - \partial_1 \hat{p} - \partial_1 \hat{u} - \hat{u} \partial_1 u - u \partial_1 \hat{u} - \hat{v} \partial_2 u &= \{A\}, \\ \partial_1 \hat{\tau} + \partial_2 \hat{\tau}_2 - \partial_2 \hat{p} - \partial_1 \hat{v} - u \partial_1 \hat{v} - h_1 u \hat{v} &= \{B\}, \\ \hat{\tau} = \partial_2 \hat{u} + (\partial_1 - h_1)\hat{v}, \quad \hat{\tau}_1 = 2\partial_1 \hat{u}, \quad \hat{\tau}_2 = 2\partial_2 \hat{v}, \\ \partial_2 u = \tau, \quad \partial_2 p = -\langle B \rangle, \quad \partial_2 \tau = \partial_1 p + u \partial_1 u + \langle A \rangle, \\ A = \hat{v} \hat{\tau} + \hat{u} \partial_1 \hat{u} - \hat{v} \partial_1 \hat{v}, \quad B = \hat{u} \partial_1 \hat{v} - \hat{v} \partial_1 \hat{u}, \quad \partial_1 = \partial / \partial \xi,\end{aligned}$$

с учетом оценок для вязкого критического слоя имеют точность ниже, чем R^{-2} , но выше, чем R^{-1} .

Преобразование $\partial_1 = R^{-1} \partial - u^{-1}(\partial f + 0,5 f/R) \partial_\eta$, $\partial_2 = R^{-1} \partial_\eta$, где $\partial = 0,5 \partial / \partial R$, $\partial_\eta = \partial / \partial \eta$, $f = \psi/R$, η — переменная подобия в случае невозмущенного погранич-

ного слоя, приводит уравнения для основной гармоники $\hat{a} = \text{Re}\left\{\tilde{a} \exp\left[i\left(\int \alpha d\xi - \omega t\right)\right]\right\}$

(Re — вещественная часть, ω — заданная угловая частота, α — вычисляемое комплексное волновое число) к виду:

$$\begin{aligned}\partial_\eta \tilde{u} - \dot{\tilde{u}} + g\dot{\tilde{v}} + (\partial - h)\tilde{v} &= 0, \quad \partial_\eta \tilde{v} - \dot{\tilde{v}} + g\dot{\tilde{u}} + (\partial + h)\tilde{u} = 0, \\ \partial_\eta \tilde{p} - \dot{\tilde{p}} + gu\dot{\tilde{v}} + 2i\alpha\dot{\tilde{u}} - i\alpha R\tilde{\tau} + u(\partial + h)\tilde{v} &= -\sigma_1 F_1, \\ \partial_\eta \tilde{\tau} - i\alpha R\tilde{p} - \theta\tilde{v} - iR(\alpha u - \omega)\tilde{u} - (2R\alpha^2 + g\theta)\tilde{u} - \tilde{u}\partial u - g(\dot{\tilde{p}} + u\dot{\tilde{u}}) - \partial\tilde{p} - u\partial\tilde{u} &= \sigma_1 G_1, \\ \dot{\tilde{u}} = R\tilde{\tau} - i\alpha R\tilde{v}, \quad \dot{\tilde{v}} = -i\alpha R\tilde{u}, \quad \dot{\tilde{p}} = iR(\alpha u - \omega)\tilde{v},\end{aligned}\quad (1)$$

где $\theta = R\tau$, $h = Rh_1 = -(\partial + g\partial_\eta)\ln u$, $g = -u^{-1}(0,5/R + \partial)f$, (на стенке $h_w = 0,25/R - 0,5\partial\ln\theta_w$, $g_w = 0$). Для второй гармоники величины $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p}, \tilde{\tau}, \omega, \alpha, \sigma_1, F_1, G_1$ меняются на $\tilde{u}_2, \tilde{v}_2, \tilde{p}_2, \tilde{\tau}_2, 2\omega, \alpha_2, \sigma_2, F_2, G_2$. Правые части уравнений определяются соотношениями:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 0,5 \exp\left\{i\int(\alpha_2 - 2\text{Re}\alpha)2RdR\right\}, \\ F_1 &= iR(\alpha_2 + \bar{\alpha})(\bar{\tilde{u}}\tilde{v}_2 - \tilde{u}_2\bar{\tilde{v}}) + \bar{\tilde{u}}(\partial\tilde{v}_2 + g\dot{\tilde{v}}_2) + \tilde{u}_2(\partial\bar{\tilde{v}} + g\bar{\dot{\tilde{v}}}) - \bar{\tilde{v}}(\partial\tilde{u}_2 + g\dot{\tilde{u}}_2) - \tilde{v}_2(\partial\bar{\tilde{u}} + g\bar{\dot{\tilde{u}}}), \\ G_1 &= R(\bar{\tilde{v}}\tilde{\tau}_2 + \tilde{v}_2\bar{\tilde{\tau}}) + iR(\alpha_2 - \bar{\alpha})(\bar{\tilde{u}}\tilde{u}_2 - \bar{\tilde{v}}\tilde{v}_2) + \bar{\tilde{u}}(\partial\tilde{u}_2 + g\dot{\tilde{u}}_2) + \\ &+ \tilde{u}_2(\partial\bar{\tilde{u}} + g\bar{\dot{\tilde{u}}}) - \bar{\tilde{v}}(\partial\tilde{v}_2 + g\dot{\tilde{v}}_2) - \tilde{v}_2(\partial\bar{\tilde{v}} + g\bar{\dot{\tilde{v}}}), \quad \sigma_2 = 0,5 \exp\left\{i\int(2\alpha - \alpha_2)2RdR\right\}, \\ F_2 &= \tilde{u}(\partial\tilde{v} + g\dot{\tilde{v}}) - \tilde{v}(\partial\tilde{u} + g\dot{\tilde{u}}), \\ G_2 &= R\tilde{v}\tilde{\tau} + i\alpha R(\tilde{u}^2 - \tilde{v}^2) + \tilde{u}(\partial\tilde{u} + g\dot{\tilde{u}}) - \tilde{v}(\partial\tilde{v} + g\dot{\tilde{v}}),\end{aligned}\quad (2)$$

где надстрочная черта означает комплексное сопряжение.

Уравнения для осредненного течения в координатах (R, η) принимают вид

$$\partial_\eta p = P, \quad \partial_\eta f = u, \quad \partial_\eta u = \theta, \quad \partial_\eta \theta = R(\partial p + gP + u\partial u + gu\theta + Q). \quad (3)$$

Вклад основной гармоники в P и Q составляет:

$$\begin{aligned}P &= -\sigma \text{Re}\left\{\bar{\tilde{u}}\left[(i\alpha R + \partial)\tilde{v} + g\dot{\tilde{v}}\right] - \bar{\tilde{v}}\left[(i\alpha R + \partial)\tilde{u}\right] + g\dot{\tilde{u}}\right\}, \\ Q &= \sigma \text{Re}\left\{R\bar{\tilde{v}}\tilde{\tau} + \bar{\tilde{u}}\left[(i\alpha R + \partial)\tilde{u} + g\dot{\tilde{u}}\right] - \bar{\tilde{v}}\left[(i\alpha R + \partial)\tilde{v} + g\dot{\tilde{v}}\right]\right\}, \\ \sigma &= 0,5 \exp\left\{-4\int\text{Im}\alpha R dR\right\}.\end{aligned}\quad (4)$$

Такие же формулы с учетом приведенных выше замен определяют вклад второй гармоники.

Аппроксимация $\partial\bar{a} = 0,5\Delta\bar{a}/\Delta R$ преобразует (1–4) в систему обыкновенных дифференциальных уравнений. На каждом шаге маршевой схемы осуществляется итерационный цикл, внутри которого уравнения для каждой гармоники и для пограничного слоя интегрируются по очереди. Для этого правые части уравнений (1)

и функции P , Q в (3) вычисляются с помощью результатов предыдущей итерации. Метод расчета гармоник описан в [1].

Ограничиваясь в настоящей работе малыми отклонениями \tilde{a} от решения уравнения Блазиуса $\partial_\eta \theta_0 = -f_0 \theta_0 / 2$, уравнения (3) представим в линеаризованном виде:

$$\begin{aligned} \partial_\eta \tilde{p} &= P, \quad \partial_\eta \tilde{f} = \tilde{u}, \quad \partial_\eta \tilde{u} = \tilde{\theta}, \\ \partial_\eta \tilde{\theta} &= -(\theta_0 \tilde{f} + f_0 \tilde{\theta}) / 2 + R(\partial \tilde{p} - \theta_0 \partial \tilde{f} + u_0 \partial \tilde{u} + gP + Q). \end{aligned} \quad (5)$$

Давление определяется численным интегрированием от границы η_e пограничного слоя, где $\tilde{p} = 0$, к стенке. Решение системы остальных уравнений (5) представляем в виде суммы ее частного решения и общего решения соответствующих однородных уравнений:

$$\partial_\eta \tilde{f} = \tilde{u}, \quad \partial_\eta \tilde{u} = \tilde{\theta}, \quad \partial_\eta \tilde{\theta} = -[\theta_0 \tilde{f} + f_0 \tilde{\theta} + R(\theta_0 \tilde{f} - u_0 \tilde{u}) / \Delta R] / 2. \quad (6)$$

Вне пограничного слоя, где $u_0 = 1$, $\theta_0 = 0$, $f_0 = \eta - c_0$, последние два уравнения в (6) приводятся к уравнению

$$\partial_\eta^2 \tilde{u} = -[(\eta - c_0) \partial_\eta \tilde{u} - R \tilde{u} / \Delta R] / 2. \quad (7)$$

Формально для получения асимптотики при $\eta \rightarrow \infty$ последним членом в (7) можно пренебречь, в результате получим интеграл $\partial_\eta \tilde{u} = \exp\{-\frac{1}{4}(\eta - c_0)^2\}$, которым можно воспользоваться для постановки условия на границе пограничного слоя. Однако потребуется слишком большое значение η_e из-за большого параметра $b = R / (2\Delta R)$. Действительно, из сопоставления этого интеграла с затухающим при $\eta \rightarrow \infty$ решением $\tilde{u} = \exp(-\sqrt{b}\eta)$ уравнения (7) с отброшенным первым членом правой части следует, что необходимо выполнение соотношения $\eta_e \gg \sqrt{b}$, тогда как оптимальные для расчета гармоник значения соразмерны. Поэтому будем использовать асимптотику $\tilde{u} = C_1 \exp(-\zeta^2 / 4)$, где $\zeta = f_0 + \sqrt{2R / \Delta R}$, $\tilde{\theta} = -C_1 (\zeta / 2) \exp(-\zeta^2 / 4)$, интеграл от \tilde{u} берется с помощью асимптотического разложения: $\tilde{f} = C_1 \varphi \exp(-\zeta^2 / 4)$, $\varphi = -2 / \zeta + 4 / \zeta^3 - 24 / \zeta^5$. Решение $U = (\tilde{f}, \tilde{u}, \tilde{\theta})$ уравнений (6) суммируется $U = C_1 U_1 + C_2 U_2 + U_3$ из решений уравнений (7) с условиями на границе пограничного слоя: $U_1 = (\varphi, 1, -\zeta / 2)$, $U_2 = (1, 0, 0)$ и уравнений (6) с условием $U_3 = (0, 0, 0)$. Численное интегрирование от внешней границы к стенке производится для трех векторов одновременно с использованием ортогонализаций относительно U_1 . Коэффициенты C_1, C_2 определяются условиями на стенке: $\tilde{f} = \tilde{u} = 0$.

Результаты представлены максимальными по сечениям $R = \text{const}$ значениями A амплитуд пульсаций скорости \tilde{u} и производными от средней скорости

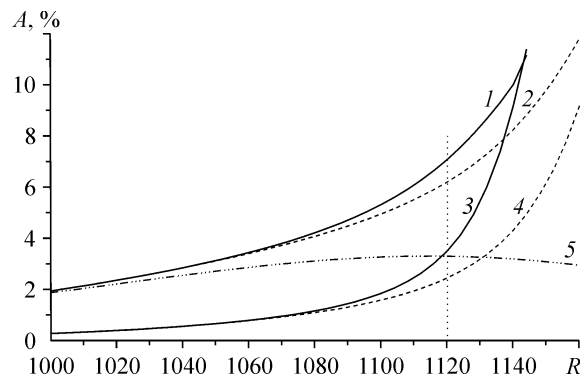


Рис. 1. Зависимость амплитуд гармоник от R при $\omega = 5,6 \cdot 10^{-5}$, $A_0 = 0,05$ %.

Основная гармоника (1, 2), вторая гармоника (3, 4), без учета влияния на стационарные параметры пограничного слоя (2, 4), линейная теория (5).

$\theta = \partial u / \partial \eta$. Координаты (R, η) асимптотически равны $(\sqrt{u_\infty x / \nu}, y \sqrt{u_\infty / (\nu x)})$, где (x, y) — декартовы координаты.

Приведенные на рис. 1–3 данные получены для угловой частоты $\omega = 5,6 \cdot 10^{-5}$ и амплитуды, заданной в точке начала нарастания по линейной теории (начальной амплитуды), $A_0 = 0,05$ %. В отличие от линейной теории, в соответствии с которой возмущения всегда затухают при достаточно больших R (кривая 5 на рис. 1), нелинейная волна при данной A_0 не затухает, а когда амплитуда второй гармоники сравнивается с амплитудой основной гармоники (см. кривые 1 и 3), счет теряет устойчивость и прекращается.

Воздействие волны на осредненные характеристики пограничного слоя демонстрируют кривая роста параметра трения на стенке θ_w (см. рис. 2) и сопоставленные на рис. 3 профили θ для возмущенного и невозмущенного (пунктирная линия) пограничного слоя в сечении $R = 1120$. Данное сечение представлено пунктирными вертикалями на рис. 1, 2 и соответствует отношению амплитуд второй и основной гармоник 0,5. На рис. 1 показано также обратное влияние деформации осредненного поля течения на амплитуды гармоник.

Значения R , при которых $A_2/A = 0,5$ и воздействие изменения осредненных параметров течения на амплитуды гармоник становится существенным, приведены на рис. 4 для ряда частот в зависимости от начальной амплитуды. Огибающая

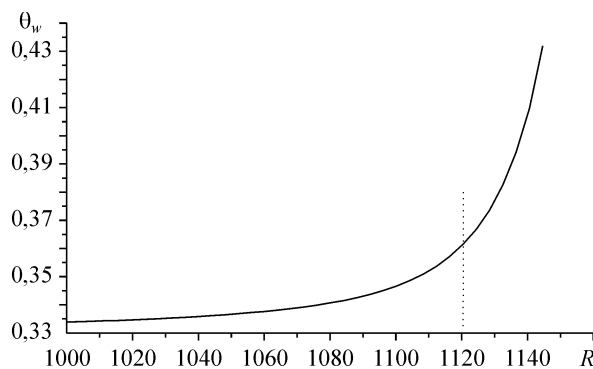


Рис. 2. Изменение $\theta = \partial u / \partial \eta$ вдоль поверхности пластины при $\omega = 5,6 \cdot 10^{-5}$, $A_0 = 0,05$ %.

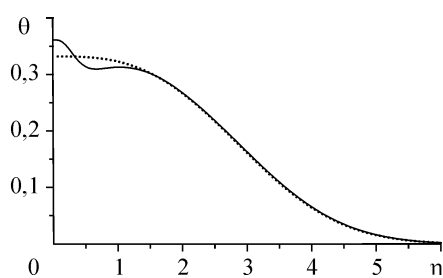


Рис. 3. Профиль $\theta = \frac{du}{d\eta}$ в сечении $R = 1120$ ($A_2/A = 0,5$) при $\omega = 5,6 \cdot 10^{-5}$, $A_0 = 0,05\%$.

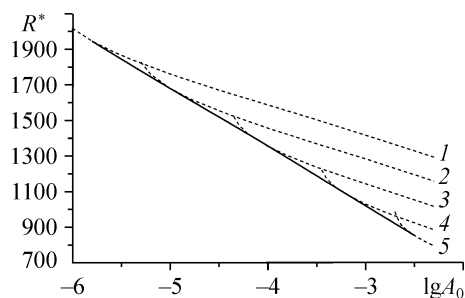


Рис. 4. Зависимость критических значений R от начальной амплитуды для $\omega \cdot 10^5 = 2,4$ (1), 3 (2), 4 (3), 5,6 (4), 8 (5).

этого семейства (сплошная линия) определяет наряду с $R^*(A_0)$ также и критические частоты $\omega^*(A_0)$. Амплитуда основной гармоники при $R = R^*$ составляет 7–8 %.

Резкое увеличение трения на стенке является признаком начала перехода пограничного слоя в турбулентное состояние, в данном случае оно предваряется быстрым и необратимым отклонением формы волны Толлмина–Шлихтинга от синусоиды.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петров Г. В. Гармоники волн Толлмина–Шлихтинга в сжимаемом пограничном слое // Теплофизика и аэромеханика. 2008. Т. 15, № 4. С. 599–602.
2. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1963. 727 с.

Статья поступила в редакцию 10 марта 2009 г.