

УДК 539.375

## Асимптотика поля напряжений у вершины усталостной трещины в среде с поврежденностью: вычислительный эксперимент и аналитическое решение\*

Л.В. Степанова, С.А. Игонин

Самарский государственный университет, ул. Акад. Павлова, 1, Самара, 443011  
E-mails: stepanovlv@samsu.ru (Степанова Л.В.), sergeyigonin@yandex.ru (Игонин С.А.)

**Степанова Л.В., Игонин С.А.** Асимптотика поля напряжений у вершины усталостной трещины в среде с поврежденностью: вычислительный эксперимент и аналитическое решение // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд.-ние. — Новосибирск, 2015. — Т. 18, № 2. — С. 201–217.

В статье приводится асимптотический анализ полей напряжений, деформаций и сплошности в окрестности вершины трещины в условиях ее усталостного роста в поврежденной среде в связанной постановке задачи, когда параметр сплошности инкорпорируется в определяющие уравнения материала, базирующиеся на законе Гука для изотропного линейно упругого материала. Построено асимптотическое решение задачи, основанное на методе разложения по собственным функциям. Показано, что задача определения механических полей у вершины усталостной трещины сводится к нелинейной задаче на собственные значения, аналитическое решение которой получено в работе. Показано, что метод искусственного малого параметра позволяет найти точное решение нелинейных задач на собственные значения в замкнутой форме.

DOI: 10.15372/SJNM20150208

**Ключевые слова:** усталостный рост трещины, циклическое нагружение, асимптотический анализ, нелинейная задача на собственные значения, аналитическое решение.

**Stepanova L.V., Igonin S.A.** Asymptotics of the near crack-tip stress field of a fatigue growing crack in damaged materials: numerical experiment and analytical solution // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2015. — Vol. 18, № 2. — P. 201–217.

In this paper, the asymptotic analysis of the near fatigue growing crack-tip fields in a damaged material is done. The integrity parameter describing the damage accumulation process in the vicinity of a crack tip is incorporated into the constitutive law of the isotropic linear elastic material. The asymptotic solution based on the eigenfunction expansion method is obtained. It is shown that the problem is reduced to the nonlinear eigenvalue problem. The analytical solution of the nonlinear eigenvalue problem is found by the artificial small parameter method. The perturbation theory approach allows us to derive the analytical presentation of the stress and integrity distributions near the crack tip. The technique proposed permits us to find the higher-order terms of the asymptotic expansions of the stress components and the integrity parameter.

**Keywords:** fatigue crack growth, cyclic loading, asymptotic analysis, nonlinear eigenvalue problem, analytical solution.

---

## 1. Введение

Прогнозирование разрушения ответственных инженерных систем и элементов конструкций представляет собой важную практическую проблему, анализу которой как в

---

\*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 12-08-00390 и № 13-01-97009-р-Поволжье).

теоретическом, так и в прикладном аспектах уделяется большое внимание [1–6]. К настоящему времени проведены обширные исследования, развивающие теории и методы континуальной механики поврежденности, позволяющие вместе с концепциями традиционной механики разрушения оценить поведение элемента конструкции, находящегося под действием сложных систем статических и динамических нагрузок [1–6]. В связи с появлением теорий и подходов континуальной механики поврежденности становится актуальным развитие аккуратных математических методов решения нелинейных задач механики разрушения в связанной постановке, когда параметр или параметры, описывающие деградацию материала, входят в определяющие уравнения [3, 7, 8]. Одним из наиболее распространенных методов нелинейной механики разрушения является метод разложения по собственным функциям, восходящий к классическим работам М. Уилльямса. С тех пор метод разложения полей напряжений, деформаций и перемещений по собственным функциям в окрестности вершины трещины часто применяется для анализа напряженно-деформированного состояния вблизи кончика трещины, особенно в нелинейных материалах (в материалах с нелинейными определяющими уравнениями) [7–12]. Метод разложения по собственным функциям приводит к нелинейным задачам на собственные значения [7, 11], которые, как правило, исследуются численно с помощью методов Рунге–Кутты совместно с методом пристрелки [12]. Однако последние являются многопараметрическими и их применение сопряжено с большими трудностями, особенно в тех случаях, когда рассматриваемое уравнение или система уравнений являются сингулярно возмущенными [8, 12]. Для преодоления указанных сложностей необходимо использование более аккуратных техник, позволяющих получать точные аналитические решения. Асимптотическая теория дает возможность построить аналитические решения такого рода задач: методы теории возмущений активно применяются в прикладной математике, механике и современной инженерии [13–15]. В [13] рассматриваются методы асимптотического анализа и синтеза в нелинейной динамике и механике деформируемого твердого тела, где особое внимание уделяется гомотопическому методу возмущений, который основывается на введении искусственного малого параметра. В [15] рассматриваются асимптотические методы расчета неоднородных композиционных материалов с учетом микромеханических эффектов, вызванных особенностями внутренней структуры. Примером применения подходов и техник асимптотической теории и методов возмущений в нелинейной механике разрушения, приводящим к решению в замкнутой форме, может служить точное решение нелинейной задачи на собственные значения, найденное в [11]. В силу указанных причин в настоящее время асимптотические методы привлекают особое внимание в прикладной механике, в частности в механике деформируемого твердого тела и механике разрушения [3, 10]. Предметом настоящей статьи является асимптотический анализ полей напряжений, деформаций и сплошности в окрестности распространяющейся в условиях циклического нагружения трещины в предположении реализации плоского напряженного состояния и применение метода малого параметра для решения нелинейной задачи на собственные значения, к которой редуцируется задача при использовании метода разложения по собственным функциям. Следует отметить, что изучение усталостного роста трещины и оценка жизнеспособности конструкции, в которой может образоваться и расти усталостная трещина, является актуальной задачей современной механики деформируемого твердого тела [3, 8] и требует привлечения развитых математических методов, способных привести к аналитическим результатам, к решениям в замкнутой форме. Применению методов асимптотической теории (методу искусственного малого параметра) для решения нелинейной задачи на собственные значения и посвящена данная работа.

## 2. Математическая постановка задачи об усталостном подрастании трещины в среде с поврежденностью. Фундаментальные уравнения

В современной механике деформируемого твердого тела для анализа полей напряжений, деформаций и сплошности в непосредственной окрестности вершины усталостной трещины уравнения задачи формулируются в свете континуальной механики поврежденности [2, 3]. Рассмотрим медленный докритический рост усталостной трещины в материале, определяющие соотношения которого построены на основе закона Гука для однородного изотропного линейно упругого материала

$$\varepsilon_{ij} = \frac{(1 + \nu)\sigma_{ij}}{E\psi} - \frac{\nu\sigma_{kk}\delta_{ij}}{E\psi}, \quad (2.1)$$

где  $\varepsilon_{ij}$  — компоненты тензора деформаций,  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений,  $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $\psi$  — скалярный параметр сплошности.

В механике поврежденности деградацию материала во внутренней точке можно описать с помощью некоторого структурного параметра, например параметра поврежденности  $\omega$  или параметра сплошности  $\psi$  [2]. Параметр сплошности  $\psi$  равен единице для неповрежденного, целостного материала в начальный момент времени и нулю для материала в момент разрушения. Функция  $\psi$  ( $0 \leq \psi \leq 1$ ) представляет собой скалярный параметр, описывающий эффект накопления рассеянных повреждений вблизи вершины макротрещины. После введения параметра сплошности следует сформулировать кинетическое уравнение, задающее эволюцию накопления повреждений в среде [2, 3]. Предполагается, что параметр сплошности удовлетворяет эволюционному уравнению [12]:

$$\frac{d\psi}{dN} = \begin{cases} -c\left(\frac{\sigma_e}{\psi}\right)^m \psi^{m-n} & \text{для } \sigma_e \geq \sigma_{th}\psi^\gamma, \\ 0 & \text{для } \sigma_e < \sigma_{th}\psi^\gamma, \end{cases} \quad (2.2)$$

где  $N$  — число циклов,  $c$ ,  $m$ ,  $n$ ,  $\gamma$ ,  $\sigma_{th}$  — постоянные, определяемые экспериментально. Далее принимается, что  $\gamma = 1$  (что соответствует использованию традиционной концепции эффективного напряжения). В полярной системе координат  $r$ ,  $\theta$  с полюсом в вершине движущейся трещины определяющие уравнения задачи (2.1) для плоского напряженного состояния, который исследуется ниже, формулируются следующим образом:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\theta\theta}}{E\psi}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr}}{E\psi}, \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{(1 + \nu)\sigma_{r\theta}}{E\psi}. \quad (2.3)$$

Уравнения равновесия задачи

$$r\sigma_{rr,r} + \sigma_{r\theta,\theta} + (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0, \quad r\sigma_{r\theta,r} + \sigma_{\theta\theta,\theta} + 2\sigma_{r\theta} = 0 \quad (2.4)$$

удовлетворяются тождественно, если ввести в рассмотрение функцию напряжений Эри  $\chi(r, \theta)$ , такую что

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = \chi_{,rr}, \quad \sigma_{rr}(r, \theta) = \frac{\chi_{,r}}{r} + \frac{\chi_{,\theta\theta}}{r^2}, \quad \sigma_{r\theta}(r, \theta) = -\left(\frac{\chi_{,\theta}}{r}\right)_{,r}. \quad (2.5)$$

Условие совместности деформаций

$$2(r\varepsilon_{r\theta,\theta})_{,r} = \varepsilon_{rr,\theta\theta} - r\varepsilon_{rr,r} + r(r\varepsilon_{\theta\theta})_{,rr} \quad (2.6)$$

замыкает постановку задачи. Решение сформулированной системы уравнений (2.2)–(2.6) должно удовлетворять граничным условиям-требованиям отсутствия поверхностных усилий на верхнем и нижнем берегах трещины:

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta = \pm\pi) = 0, \quad \sigma_{r\theta}(r, \theta = \pm\pi) = 0. \quad (2.7)$$

### 3. Асимптотический анализ полей у вершины трещины. Метод разложения по собственным функциям

Асимптотические разложения функции напряжений Эри  $\chi$  и параметра сплошности  $\psi$  в непосредственной окрестности вершины трещины ( $r \rightarrow 0$ ) разыскиваются в форме

$$\chi(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k r^{\lambda_k+2} f_k(\theta), \quad \psi(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k r^{\mu_k} g_k(\theta), \quad (3.1)$$

где  $f_k(\theta)$ ,  $g_k(\theta)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , — угловые распределения асимптотических разложений функции напряжений Эри  $\chi$  и параметра сплошности  $\psi$ ;  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$  — масштабные (амплитудные) множители, зависящие от геометрии образца и системы приложенных нагрузок;  $\lambda_k$ ,  $\mu_k$  — подлежащие определению показатели степеней асимптотических разложений (3.1). В силу (2.5), асимптотические разложения компонент тензора напряжений принимают вид

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k r^{\lambda_k} \sigma_{ij}^{(k)}(\theta),$$

где  $\sigma_{\theta\theta}^{(k)}(\theta) = (\lambda_k+2)(\lambda_k+1)f_k(\theta)$ ,  $\sigma_{rr}^{(k)}(\theta) = (\lambda_k+2)f_k(\theta) + f_k''(\theta)$ ,  $\sigma_{r\theta}^{(k)}(\theta) = -(\lambda_k+1)f_k'(\theta)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Определяющие уравнения (2.3) и выражения (2.5) позволяют построить асимптотические разложения компонент тензора деформаций вблизи кончика трещины в форме

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}(r, \theta) &= \frac{1}{E} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha_j}{\beta_0} r^{\lambda_j-\mu_0} \varepsilon_{rr}^{(j)}(\theta), & \varepsilon_{\theta\theta}(r, \theta) &= \frac{1}{E} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha_j}{\beta_0} r^{\lambda_j-\mu_0} \varepsilon_{\theta\theta}^{(j)}(\theta), \\ \varepsilon_{r\theta}(r, \theta) &= \frac{1+\nu}{E} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha_j}{\beta_0} r^{\lambda_j-\mu_0} \varepsilon_{r\theta}^{(j)}(\theta), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где, например, коэффициенты первых двух членов асимптотических разложения определяются выражениями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^{(0)} &= (c_0 f_0 + f_0'') (g_0)^{-1}, & \varepsilon_{\theta\theta}^{(0)} &= (a_0 f_0 - \nu f_0'') (g_0)^{-1}, & \varepsilon_{r\theta}^{(0)} &= -(\lambda_0+1) f_0' (g_0)^{-1}, \\ c_0 &= (\lambda_0+2)[1-\nu(\lambda_0+1)], & a_0 &= (\lambda_0+2)(\lambda_0+1-\nu); \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr}^{(1)} &= \frac{c_1 f_1 + f_1''}{g_0} - (c_0 f_0 + f_0'') \frac{g_1}{g_0^2}, & \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} &= \frac{a_1 f_1 - \nu f_1''}{g_0} - (a_0 f_0 - \nu f_0'') \frac{g_1}{g_0^2}, \\ \varepsilon_{r\theta}^{(1)} &= - \left[ \frac{(\lambda_1 + 1) f_1'}{g_0} - (\lambda_0 + 1) f_0' \frac{g_1}{g_0^2} \right], \\ c_1 &= (\lambda_1 + 2) [1 - \nu(\lambda_1 + 1)], & a_1 &= (\lambda_1 + 2)(\lambda_1 + 1 - \nu).\end{aligned}\quad (3.4)$$

Условие совместности деформаций (2.6) и асимптотические разложения деформаций (3.2) дают возможность вывести обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) для  $k$ -го члена асимптотического разложения (3.2):

$$2(1 + \nu)(\lambda_k - \mu_0 + 1) \frac{d\varepsilon_{r\theta}^{(k)}}{d\theta} = \frac{d^2 \varepsilon_{rr}^{(k)}}{d\theta^2} - (\lambda_k - \mu_0) \varepsilon_{rr}^{(k)} + (\lambda_k - \mu_0 + 1)(\lambda_k - \mu_0) \varepsilon_{\theta\theta}^{(k)}. \quad (3.5)$$

С помощью соотношений (3.3), (3.4) из уравнений (3.5) можно получить уравнения относительно функций  $f_0(\theta)$  и  $f_1(\theta)$ :

$$f_0^{IV} - 2\bar{E} f_0''' + (b_1 + \bar{G}) f_0'' - b_2 \bar{E} f_0' + (c_0 \bar{G} + b_3) f_0 = 0, \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}f_1^{IV} - 2\bar{E} f_1''' + (b_4 + \bar{G}) f_1'' - b_5 \bar{E} f_1' + (c_1 \bar{G} + b_6) f_1 \\ = -(c_0 f_0 + f_0'') \frac{g_1'}{g_0} + \frac{g_1'}{g_0} \left[ 4(c_0 f_0 + f_0'') \bar{E} - 2b_7 f_0' - 2(c_0 f_0' + f_0''') \right] + \\ \frac{g_1}{g_0} \left[ 4b_7 f_0' \frac{g_0'}{g_0} - 2b_7 f_0'' - (c_0 f_0'' + f_0^{IV}) + 4(c_0 f_0' + f_0''') \bar{E} - 2(c_0 f_0 + f_0'')(\bar{G} + \bar{E}^2) \right] + \\ \frac{g_1}{g_0} \left[ (\lambda_1 - \mu_0)(c_0 f_0 + f_0'') + (\lambda_1 - \mu_0 + 1)(\lambda_1 - \mu_0)(a_0 f_0 - \nu f_0'') \right],\end{aligned}\quad (3.7)$$

где для краткости введены обозначения:

$$\begin{aligned}b_1 &= 2(1 + \nu)(\lambda_0 - \mu_0 + 1)(\lambda_0 + 1) - (\lambda_0 - \mu_0) - \nu(\lambda_0 - \mu_0 + 1)(\lambda_0 - \mu_0) + c_0, \\ b_2 &= 2(1 + \nu)(\lambda_0 - \mu_0 + 1)(\lambda_0 + 1) + 2c_0, & b_3 &= a_0(\lambda_0 - \mu_0 + 1)(\lambda_0 - \mu_0) - c_0(\lambda_0 - \mu_0), \\ b_4 &= 2(1 + \nu)(\lambda_1 - \mu_0 + 1)(\lambda_1 + 1) - (\lambda_1 - \mu_0) - \nu(\lambda_1 - \mu_0 + 1)(\lambda_1 - \mu_0) + c_1, \\ b_5 &= 2(1 + \nu)(\lambda_1 - \mu_0 + 1)(\lambda_0 + 1) + 2c_1, & b_6 &= a_0(\lambda_1 - \mu_0 + 1)(\lambda_1 - \mu_0) - c_1(\lambda_1 - \mu_0), \\ b_7 &= (1 + \nu)(\lambda_1 - \mu_0 + 1)(\lambda_0 + 1), & \bar{E} &= \frac{g_0'}{g_0}, & \bar{G} &= 2\bar{E}^2 - \frac{g_0''}{g_0}.\end{aligned}\quad (3.8)$$

Левая часть кинетического уравнения (2.2) может быть представлена в форме

$$\frac{d\psi}{dN} = \frac{d\psi}{dl} \frac{dl}{dN}, \quad (3.9)$$

где  $l$  — текущая длина трещины,  $dl/dN$  — скорость ее подрастания. Учитывая асимптотическое разложение параметра сплошности (3.1), левую часть эволюционного уравнения можно, используя равенства  $dr/dl = -\cos \theta$ ,  $d\theta/dl = \sin \theta/r$  [8, 12], записать как

$$\frac{d\psi}{dl} \frac{dl}{dN} = \frac{dl}{dN} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{d\beta_k}{dl} r^{\mu_k} g_k + \beta_k r^{\mu_k - 1} (g_k' \sin \theta - \mu_k g_k \cos \theta) \right]. \quad (3.10)$$

Правая часть кинетического уравнения с учетом двучленных асимптотических разложений (3.1) принимает вид

$$-c \frac{\alpha_0^m}{\beta_0^n} r^{m\lambda_0 - n\mu_0} \frac{\sigma_e^{(0)}}{g_0^n} - c \frac{\alpha_0^m}{\beta_0^n} \frac{\alpha_1}{\alpha_0} r^{m\lambda_0 - n\mu_0 + \mu_1 - \mu_0} \frac{\sigma_e^{(0)}}{g_0^n} \left( m \frac{\sigma_e^{(1)}}{\sigma_e^{(0)}} - n \frac{g_1}{g_0} \right), \quad (3.11)$$

где  $\sigma_e^{(k)}(\theta)$ ,  $k = 0, 1$ , — коэффициенты двучленного асимптотического разложения интенсивности касательных напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_e(r, \theta) &= \alpha_0 r^{\lambda_0} \sigma_e^{(0)}(\theta) + \alpha_1 r^{\lambda_1} \sigma_e^{(1)}(\theta), \\ \sigma_e^{(0)} &= \sqrt{\left(\sigma_{\theta\theta}^{(0)}\right)^2 + \left(\sigma_{rr}^{(0)}\right)^2 - \sigma_{rr}^{(0)} \sigma_{\theta\theta}^{(0)} + 3\left(\sigma_{r\theta}^{(0)}\right)^2}, \\ \sigma_e^{(1)} &= \frac{2\sigma_{rr}^{(0)} \sigma_{rr}^{(1)} + 2\sigma_{\theta\theta}^{(0)} \sigma_{\theta\theta}^{(1)} - \sigma_{rr}^{(0)} \sigma_{\theta\theta}^{(1)} - \sigma_{rr}^{(1)} \sigma_{\theta\theta}^{(0)} + 6\sigma_{r\theta}^{(0)} \sigma_{r\theta}^{(1)}}{2\sigma_e^{(0)}}. \end{aligned}$$

Сравнение левой (3.10) и правой (3.11) частей кинетического уравнения позволяет получить выражение для скорости распространения усталостной трещины  $dl/dN = c\alpha_0^m/\beta_0^{n+1}$  и равенства  $\alpha_1/\beta_1 = c\alpha_0^{1-m}\beta_0^n dl/dN$ ,  $\mu_0 - 1 = m\lambda_0 - n\mu_0$ . Асимптотический анализ кинетического уравнения накопления рассеянных повреждений также дает возможность вывести два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$g_0' \sin \theta - \mu_0 g_0 \cos \theta = - \left(\sigma_e^{(0)}\right)^m g_0^{-n}, \quad (3.12)$$

$$g_1' \sin \theta - \mu_1 g_1 \cos \theta = - \left(\sigma_e^{(0)}\right)^m g_0^{-n} \left( m \frac{\sigma_e^{(1)}}{\sigma_e^{(0)}} - n \frac{g_1}{g_0} \right). \quad (3.13)$$

#### 4. Нелинейная задача на собственные значения.

##### Численное решение

Из проведенного анализа следует, что для отыскания нулевого приближения (функций  $f_0(\theta)$  и  $g_0(\theta)$ ) получена система двух нелинейных ОДУ:

$$\begin{aligned} f_0^{IV} - 2\bar{E}f_0''' + (b_1 + \bar{G})f_0'' - b_2\bar{E}f_0' + (c_0\bar{G} + b_3)f_0 &= 0, \\ g_0' \sin \theta - \mu_0 g_0 \cos \theta &= - \left(\sigma_e^{(0)}\right)^m g_0^{-n}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

решение которой должно подчиняться краевым условиям, следующим из условий отсутствия поверхностных усилий (2.7) и естественного условия на поверхностях дефекта

$$f_0(\theta = \pm\pi) = 0, \quad f_0'(\theta = \pm\pi) = 0, \quad g_0(\theta = \pm\pi) = 0. \quad (4.2)$$

В силу симметрии задачи можно рассматривать только верхнюю полуплоскость, заменив условия при  $\theta = -\pi$  условиями симметрии задачи при  $\theta = 0$ :

$$f_0'(\theta = 0) = 0, \quad f_0'''(\theta = 0) = 0, \quad g_0'(\theta = 0) = 0. \quad (4.3)$$

Уравнение (4.1), очевидно, является однородным, что позволяет на функцию  $f_0(\theta)$  наложить условие нормировки решения  $f_0(\theta = 0) = 1$ . Таким образом, сформулирована

нелинейная задача на собственные значения: необходимо найти значение параметра  $\mu_0$  (собственное значение), отвечающее нетривиальному решению системы уравнений (4.1), удовлетворяющему краевым условиям (4.2). Система уравнений (4.1) может быть проинтегрирована численно, для чего двухточечная краевая задача (4.1)–(4.3) сводится к задаче Коши с начальными условиями:  $f_0(\theta = 0) = 1$ ,  $f'_0(\theta = 0) = 0$ ,  $f''_0(\theta = 0) = A_1$ ,  $f'''_0(\theta = 0) = 0$ ,  $g_0(\theta = 0) = [(\sigma_e^{(0)}(\theta = 0))^m / \mu_0]^{1/(n+1)}$ ,  $g'_0(\theta = 0) = 0$ . Неизвестные параметры (собственное значение  $\mu_0$  и  $f''_0(\theta = 0) = A_1$ ) подбираются таким образом, чтобы выполнялись граничные условия на верхнем берегу трещины (4.2). Результаты численного решения представлены на рис. 1 и рис. 2, где точками показаны угловые распределения компонент тензора напряжений и сплошности.

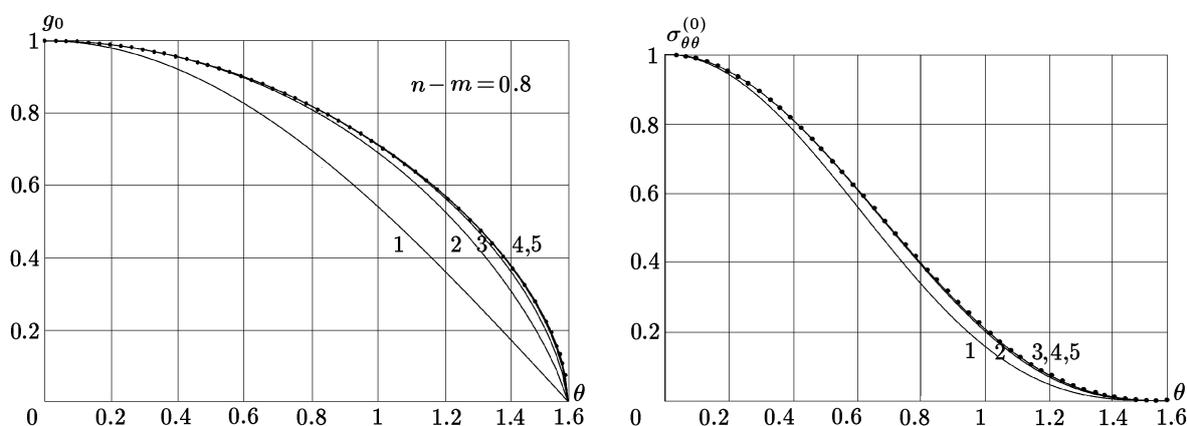


Рис. 1. Угловое распределение параметра сплошности и угловое распределение компоненты тензора напряжений  $\sigma_{\theta\theta}^{(0)}$  в окрестности вершины трещины

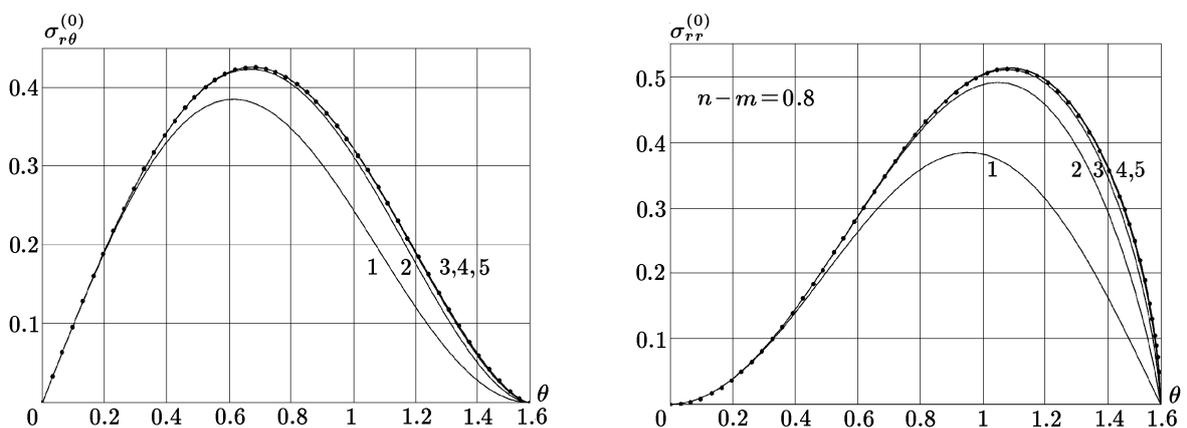


Рис. 2. Угловое распределение компонент тензора напряжений  $\sigma_{r\theta}^{(0)}$ ,  $\sigma_{rr}^{(0)}$  у вершины трещины

В ходе численного решения задачи подбирались значения собственного числа  $\mu_0$  и константы  $f''_0(0) = A_1$  для различных значений материальных констант  $m$ ,  $n$  такие, чтобы они приводили к выполнению граничных условий на верхнем берегу трещины. Вычисления показали, что, начиная с некоторого значения угла  $\theta_d$ , функция  $g_0(\theta)$  принимает отрицательные значения, что противоречит физическому смыслу параметра сплошности. Поэтому необходимо перейти к модифицированной постановке задачи и искать решение на отрезке  $[0, \theta_d]$ , а область  $[\theta_d, \pi]$  трактовать как область полностью поврежден-

ного материала, в которой все компоненты тензора напряжений и параметр сплошности обращаются в нуль. Поэтому граничные условия на верхнем берегу трещины “сносились” на луч  $\theta = \theta_d$  и принимают вид  $f_0(\theta = \theta_d) = 0$ ,  $f_0'(\theta = \theta_d) = 0$ ,  $g_0(\theta = \theta_d) = 0$ . Был проведен тщательный численный анализ решений системы двух нелинейных ОДУ и найдено, что для различных значений пар констант  $n$ ,  $m$  угол  $\theta_d$  оказывается равным одной и той же величине  $\theta_d = \pi/2$ . Отметим, что второе уравнение в системе (4.1) является сингулярно возмущенным, что приводит к необходимости применения дополнительного исследования в окрестности точки  $\theta = 0$ . Более того, метод пристрелки становится многопараметрическим, поэтому численное решение требует дополнительного обоснования и подтверждения. Перечисленные сложности прямых компьютерных вычислений демонстрируют необходимость построения аналитического решения сформулированной задачи на собственные значения и объясняют повышенный в последнее время интерес к построению аналитических решений нелинейных дифференциальных уравнений. Преодолеть указанные трудности при решении нелинейной задачи на собственные значения можно с помощью методов асимптотической теории — метода искусственного малого параметра.

## 5. Метод искусственного малого параметра

Введем малый параметр  $\varepsilon = \mu_0 - \mu_0^{(0)}$ , отражающий влияние нелинейности задачи (нелинейного закона накопления повреждений) и представляющий собой разность между собственным значением, отвечающим нелинейной “возмущенной” задаче и собственным значением, соответствующим линейной “невозмущенной” задаче. Приближенное решение системы уравнений относительно двух функций  $f_0(\theta)$  и  $g_0(\theta)$  (4.1) ищется в форме

$$\mu_0 = \mu_0^{(0)} + \varepsilon, \quad \lambda_0 = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \lambda_0^{(j)}, \quad n = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j n_j, \quad m = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j m_j, \quad (5.1)$$

$$f_0(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j f_0^{(j)}(\theta), \quad g_0(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j g_0^{(j)}(\theta). \quad (5.2)$$

Подстановка асимптотических разложений (5.1), (5.2) в первое уравнение (4.1) и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях малого параметра  $\varepsilon$  позволяют получить следующую последовательность дифференциальных уравнений:

$$\varepsilon^0 : \left( f_0^{(0)} \right)^{IV} - 2E_0 \left( f_0^{(0)} \right)''' + \left( b_1^{(0)} + G_0 \right) \left( f_0^{(0)} \right)'' - b_2^{(0)} E_0 \left( f_0^{(0)} \right)' + \left( c_0^{(0)} G_0 + b_3^{(0)} \right) f_0^{(0)} = 0, \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^1 : & \left( f_0^{(1)} \right)^{IV} - 2E_0 \left( f_0^{(1)} \right)''' + \left( b_1^{(0)} + G_0 \right) \left( f_0^{(1)} \right)'' - b_2^{(0)} E_0 \left( f_0^{(1)} \right)' + \left( c_0^{(0)} G_0 + b_3^{(0)} \right) f_0^{(1)} \\ & = 2E_1 \left( f_0^{(0)} \right)''' - \left( b_1^{(1)} + G_1 \right) \left( f_0^{(0)} \right)'' + \left( b_2^{(0)} E_1 + b_2^{(1)} E_0 \right) \left( f_0^{(0)} \right)' - \\ & \quad \left( c_0^{(0)} G_1 + c_0^{(1)} G_0 \right) f_0^{(0)}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 : & \left( f_0^{(2)} \right)^{IV} - 2E_0 \left( f_0^{(2)} \right)''' + \left( b_1^{(0)} + G_0 \right) \left( f_0^{(2)} \right)'' - b_2^{(0)} E_0 \left( f_0^{(2)} \right)' + \left( c_0^{(0)} G_0 + b_3^{(0)} \right) f_0^{(2)} \\ & = 2 \sum_{k=0}^1 E_{k+1} \left( f_0^{(1-k)} \right)''' - \sum_{k=0}^1 \left( b_1^{(k+1)} + G_{k+1} \right) \left( f_0^{(1-k)} \right)'' + \\ & \quad \sum_{k=0}^1 \left( \sum_{j=0}^{2-k} b_2^{(j)} E_{2-j} \right) \left( f_0^{(k)} \right)' - \sum_{k=0}^1 \left( \sum_{j=0}^{2-k} c_0^{(j)} G_{2-j} \right) f_0^{(k)}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon^3 : & \left(f_0^{(3)}\right)^{IV} - 2E_0\left(f_0^{(3)}\right)''' + \left(b_1^{(0)} + G_0\right)\left(f_0^{(3)}\right)'' - b_2^{(0)}E_0\left(f_0^{(3)}\right)' + \left(c_0^{(0)}G_0 + b_3^{(0)}\right)f_0^{(3)} \\
& = 2\sum_{k=0}^2 E_{k+1}\left(f_0^{(2-k)}\right)''' - \sum_{k=0}^2 \left(b_1^{(k+1)} + G_{k+1}\right)\left(f_0^{(2-k)}\right)'' + \\
& \quad \sum_{k=0}^2 \left(\sum_{j=0}^{3-k} b_2^{(j)}E_{3-j}\right)\left(f_0^{(k)}\right)' - \sum_{k=0}^2 \left(\sum_{j=0}^{3-k} c_0^{(j)}G_{3-j}\right)f_0^{(k)}, \tag{5.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon^4 : & \left(f_0^{(4)}\right)^{IV} - 2E_0\left(f_0^{(4)}\right)''' + \left(b_1^{(0)} + G_0\right)\left(f_0^{(4)}\right)'' - b_2^{(0)}E_0\left(f_0^{(4)}\right)' + \left(c_0^{(0)}G_0 + b_3^{(0)}\right)f_0^{(4)} \\
& = 2\sum_{k=0}^3 E_{k+1}\left(f_0^{(3-k)}\right)''' - \sum_{k=0}^3 \left(b_1^{(k+1)} + G_{k+1}\right)\left(f_0^{(3-k)}\right)'' + \\
& \quad \sum_{k=0}^3 \left(\sum_{j=0}^{4-k} b_2^{(j)}E_{4-j}\right)\left(f_0^{(k)}\right)' - \sum_{k=0}^3 \left(\sum_{j=0}^{4-k} c_0^{(j)}G_{4-j}\right)f_0^{(k)}, \tag{5.7}
\end{aligned}$$

где  $E_j, G_j, b_k^{(j)}, a_0^{(j)}, c_0^{(j)}$  — коэффициенты асимптотических разложений функций  $\bar{E}, \bar{G}$  и величин  $b_k$  (3.8),  $a_0, c_0$  в ряд по малому параметру  $\varepsilon$ :

$$\bar{E} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j E_j, \quad \bar{G} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j G_j, \quad b_k = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j b_k^{(j)}, \quad a_0 = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j a_0^{(j)}, \quad c_0 = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j c_0^{(j)}. \tag{5.8}$$

Коэффициенты введенных в рассмотрение асимптотических разложений (5.8) в силу (5.1) принимают вид (здесь и далее в работе построены пятичленные асимптотические разложения искомых параметров и функций (5.1) и (5.2)):  $E_j = (1/g_0^{(0)}) \sum_{l=0}^j (g_0^{(l)})' t_{j-l}$ , где  $t_p = -(1/g_0^{(0)}) \sum_{j=0}^{p-1} t_j g_0^{(p-j)}$ ,  $t_0 = 1$ ,  $G_j = 2 \sum_{l=0}^j E_l E_{j-l} - (1/g_0^{(0)}) \sum_{l=0}^j (g_0^{(l)})'' t_{j-l}$ . Коэффициенты асимптотических разложений параметров  $b_p$  ( $p = 1, 2, 3$ ) вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}
b_1^{(j)} & = 2(1 + \nu) \sum_{l=0}^j \eta_0^{(l)} \xi_0^{(j-l)} - \left(\lambda_0^{(j)} - \mu_0^{(j)}\right) - \nu \sum_{l=0}^j \eta_0^{(l)} \left(\lambda_0^{(j-l)} - \mu_0^{(j-l)}\right) + c_0^{(j)}, \\
b_2^{(j)} & = 2(1 + \nu) \sum_{l=0}^j \eta_0^{(l)} \xi_0^{(j-l)} + 2c_0^{(j)}, \\
b_3^{(j)} & = \sum_{l=0}^j \left(a_0^{(k-j)} \eta_0^{(l)} - c_0^{(l)}\right) \left(\lambda_0^{(j-l)} - \mu_0^{(j-l)}\right),
\end{aligned}$$

где  $k$  — число удерживаемых слагаемых, а  $a_0^{(j)}$  и  $c_0^{(j)}$  вычисляются по формулам:

$$a_0^{(j)} = \sum_{l=0}^j \zeta_0^{(l)} \xi_0^{(j-l)} - \nu \zeta_0^{(j)}, \quad c_0^{(j)} = \zeta_0^{(j)} - \nu \sum_{l=0}^j \zeta_0^{(l)} \xi_0^{(j-l)}, \tag{5.9}$$

$$\lambda_0 - \mu_0 + 1 = \eta_0 = \sum_{j=0}^k \varepsilon^j \eta_0^{(j)}, \quad \lambda_0 + 1 = \xi_0 = \sum_{j=0}^k \varepsilon^j \xi_0^{(j)}, \quad \lambda_0 + 2 = \zeta_0 = \sum_{j=0}^k \varepsilon^j \zeta_0^{(j)}. \tag{5.10}$$

Подстановка асимптотических разложений (5.1), (5.2) во второе уравнение (4.1) и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях малого параметра  $\varepsilon$  позволяет вывести последовательность ОДУ:

$$\varepsilon^0 : \left(g_0^{(0)}\right)' \sin \theta - \mu_0^{(0)} g_0^{(0)} \cos \theta = \frac{-\sigma_0^{(0)}}{g_0^{(0)}}, \quad (5.11)$$

$$\varepsilon^1 : \left(g_0^{(1)}\right)' \sin \theta - \mu_0^{(0)} g_0^{(1)} \cos \theta = g_0^{(0)} \cos \theta + \frac{\sigma_0^{(0)} (\Omega(\theta) - \Lambda(\theta))}{g_0^{(0)}}, \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 : \left(g_0^{(2)}\right)' \sin \theta - \mu_0^{(0)} g_0^{(2)} \cos \theta = & g_0^{(1)} \cos \theta + \frac{\sigma_0^{(0)} \Lambda \Omega}{g_0^{(0)}} - \\ & \frac{\sigma_0^{(0)}}{g_0^{(0)}} \left[ \frac{\Omega^2}{2} - \left( n_2 \ln g_0^{(0)} + n_1 \frac{g_0^{(1)}}{g_0^{(0)}} + \frac{g_0^{(2)}}{g_0^{(0)}} + \frac{1}{2} \left( \frac{g_0^{(1)}}{g_0^{(0)}} \right)^2 \right) \right] - \\ & \frac{\sigma_0^{(0)}}{g_0^{(0)}} \left\{ \frac{\Lambda^2}{2} + m_2 \ln \sigma_0^{(0)} + m_1 \frac{\sigma_0^{(1)}}{\sigma_0^{(0)}} + \frac{\sigma_0^{(2)}}{\sigma_0^{(0)}} - \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_0^{(1)}}{\sigma_0^{(0)}} \right)^2 \right\}, \quad (5.13) \\ \Omega(\theta) = & n_1 \ln g_0^{(0)} + \frac{g_0^{(1)}}{g_0^{(0)}}, \quad \Lambda(\theta) = m_1 \ln \sigma_0^{(0)} + \frac{\sigma_0^{(1)}}{\sigma_0^{(0)}}. \end{aligned}$$

Выделение коэффициента при  $k$ -й ( $k \geq 2$ ) степени малого параметра  $\varepsilon$  в кинетическом уравнении накопления повреждений приводит к ОДУ, содержащему неизвестные функции  $f_0^{(k)}(\theta)$  и  $g_0^{(k)}(\theta)$ , которое в силу громоздкости не приводится. Таким образом, получена система ОДУ относительно функций  $f_0^{(k)}(\theta)$  и  $g_0^{(k)}(\theta)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . ОДУ решаются последовательно: на  $k$ -м шаге интегрируется система уравнений относительно функций  $f_0^{(k)}(\theta)$ ,  $g_0^{(k)}(\theta)$  при известных ранее найденных функциях  $f_0^{(j)}(\theta)$ ,  $g_0^{(j)}(\theta)$ , где  $j = 0, 1, \dots, k-1$ .

## 6. Определение коэффициентов асимптотических разложений функции напряжений Эри и параметра сплошности

Решение системы дифференциальных уравнений (5.3), (5.11)  $f_0^{(0)}(\theta)$  и  $g_0^{(0)}(\theta)$  должно удовлетворять условиям, следующим из требований отсутствия поверхностных усилий на верхнем берегу трещины, условиям симметрии на ее продолжении:

$$\begin{aligned} f_0^{(0)}(\theta = \pi) = 0, \quad \left(f_0^{(0)}\right)'(\theta = \pi) = 0, \quad \left(f_0^{(0)}\right)'(\theta = 0) = 0, \quad \left(f_0^{(0)}\right)'''(\theta = 0) = 0, \\ \left(g_0^{(0)}\right)'(\theta = 0) = 0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

и условию регулярности решения, следующему из кинетического уравнения

$$g_0^{(0)}(\theta = 0) = \left( \frac{\sigma_0^{(0)}(\theta = 0)}{\mu_0^{(0)}} \right)^{1/2}. \quad (6.2)$$

Интегрирование системы нелинейных дифференциальных уравнений (5.3), (5.11) вместе со сформулированными краевыми условиями (6.1), (6.2) и исследование ее решения показывают существование области полностью поврежденного (диспергированного) материала  $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ , в которой все компоненты тензора напряжений и параметр сплошности обращаются в нуль. Область полностью поврежденного материала примыкает к

берегам трещины и занимает всю левую полуплоскость, тогда как в области активного накопления повреждений (зоне процесса)  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  решение определяется формулами:

$$f_0^{(0)}(\theta) = \frac{(\cos \theta)^3}{6}, \quad g_0^{(0)}(\theta) = \cos \theta, \quad \mu_0^{(0)} = 1. \quad (6.3)$$

Уравнения (5.4), (5.12), определяющие угловые распределения вторых слагаемых в асимптотических разложениях (5.2), имеют следующую структуру:

$$(f_0^{(1)})^{IV} + p_1 (f_0^{(1)})''' + p_2 (f_0^{(1)})'' + p_3 (f_0^{(1)})' + p_4 f_0^{(1)} + p_5 (g_0^{(1)})'' + p_6 (g_0^{(1)})' + p_7 g_0^{(1)} = F_1^1, \quad (6.4)$$

$$q_1 (f_0^{(1)})''' + q_2 (f_0^{(1)})'' + q_3 (f_0^{(1)})' + q_4 f_0^{(1)} + q_5 (g_0^{(1)})'' + q_6 (g_0^{(1)})' + q_7 g_0^{(1)} = F_2^1, \quad (6.5)$$

где коэффициенты уравнений  $p_j$ ,  $q_j$  и их правые части  $F_k^1$  определяются формулами:

$$p_1 = -2E_0, \quad p_2 = b_1^{(0)} + G_0, \quad p_3 = -b_2^{(0)} E_0,$$

$$p_4 = c_0^{(0)} G_0 + b_3^{(0)}, \quad p_5 = -\frac{(f_0^{(0)})''}{g_0^{(0)}} - \frac{c_0^{(0)} f_0^{(0)}}{g_0^{(0)}},$$

$$p_6 = -2 \frac{(f_0^{(0)})'''}{g_0^{(0)}} + 4 (f_0^{(0)})'' \frac{(g_0^{(0)})'}{(g_0^{(0)})^2} - b_2^{(0)} \frac{(f_0^{(0)})'}{g_0^{(0)}} + 4 c_0^{(0)} f_0^{(0)} \frac{(g_0^{(0)})'}{(g_0^{(0)})^2},$$

$$p_7 = 2 \frac{(g_0^{(0)})' (f_0^{(0)})'''}{(g_0^{(0)})^2} - 4 (f_0^{(0)})'' \frac{[(g_0^{(0)})']^2}{(g_0^{(0)})^3} + 4 (f_0^{(0)})'' \frac{(g_0^{(0)})''}{(g_0^{(0)})^2} +$$

$$b_2^{(0)} (f_0^{(0)})' \frac{(g_0^{(0)})'}{(g_0^{(0)})^2} - 4 c_0^{(0)} f_0^{(0)} \frac{[(g_0^{(0)})']^2}{(g_0^{(0)})^3} + c_0^{(0)} f_0^{(0)} \frac{(g_0^{(0)})''}{(g_0^{(0)})^2},$$

$$F_1^1 = -b_1^{(1)} (f_0^{(0)})'' + b_2^{(1)} E_0 (f_0^{(0)})' - c_0^{(1)} G_0 f_0^{(0)},$$

$$q_1 = \frac{(1 - \lambda_0^{(0)}) f_0^{(0)} + 2 (f_0^{(0)})''}{2 g_0^{(0)} \sigma_0^{(0)}}, \quad q_2 = \left\{ \frac{(1 - \lambda_0^{(0)}) f_0^{(0)} + 2 (f_0^{(0)})''}{2 g_0^{(0)} \sigma_0^{(0)}} \right\}' + \frac{(\lambda_0^{(0)} + 1)^2 (f_0^{(0)})'}{g_0^{(0)} \sigma_0^{(0)}},$$

$$q_3 = (\lambda_0^{(0)} + 1)^2 \left\{ \frac{(f_0^{(0)})'}{g_0^{(0)} \sigma_0^{(0)}} \right\}' +$$

$$\frac{(\lambda_0^{(0)} + 2) \left[ [(\lambda_0^{(0)} + 2)(\lambda_0^{(0)} + 1)(2\lambda_0^{(0)} + 1) + 1 - \lambda_0^{(0)}] f_0^{(0)} + (1 - \lambda_0^{(0)}) (f_0^{(0)})'' \right]}{2 g_0^{(0)} \sigma_0^{(0)}},$$

$$q_4 = (\lambda_0^{(0)} + 2)(\lambda_0^{(0)} + 1) \left\{ \frac{(\lambda_0^{(0)} + 2)(2\lambda_0^{(0)} + 1) (f_0^{(0)})' - (f_0^{(0)})'''}{2 g_0^{(0)} \sigma_0^{(0)}} \right\}' +$$

$$(\lambda_0^{(0)} + 2) \left\{ \frac{(1 - \lambda_0^{(0)}) f_0^{(0)} + 2 (f_0^{(0)})''}{2 g_0^{(0)} \sigma_0^{(0)}} \right\}' ,$$

$$\begin{aligned}
q_5 &= \sin \theta, & q_6 &= \frac{-\sigma_0^{(0)}}{\left(g_0^{(0)}\right)^2}, & q_7 &= \sin \theta + \frac{\left(\sigma_0^{(0)}/g_0^{(0)}\right)'}{g_0^{(0)}} - \frac{\sigma_0^{(0)}\left(g_0^{(0)}\right)'}{\left(g_0^{(0)}\right)^3}, \\
F_2^1 &= \left(g_0^{(0)} \cos \theta\right)' + n_1 \left(\frac{\sigma_0^{(0)}}{g_0^{(0)}} \ln g_0^{(0)}\right)' - m_1 \left(\frac{\sigma_0^{(0)}}{g_0^{(0)}} \frac{\ln \sigma_0^{(0)}}{g_0^{(0)}}\right)' - \\
&\left\{ \frac{\sigma_0^{(0)}}{2g_0^{(0)}} \left[ \left[ \left(\lambda_0^{(0)} + 2\right) \left(2\lambda_0^{(0)} + 1\right) f_0^{(0)} - \left(f_0^{(0)}\right)'' \right] \lambda_0^{(1)} \left(2\lambda_0^{(0)} + 3\right) f_0^{(0)} + \right. \right. \\
&\left. \left. \left[ \left(1 - \lambda_0^{(0)}\right) f_0^{(0)} + 2\left(f_0^{(0)}\right)'' \right] \lambda_0^{(1)} f_0^{(0)} + 2\left(\lambda_0^{(0)} + 1\right) \lambda_0^{(1)} \left[\left(f_0^{(0)}\right)'\right]^2 \right] \right\}'.
\end{aligned}$$

Краевые условия, накладываемые на функции  $f_0^{(1)}(\theta)$  и  $g_0^{(1)}(\theta)$ , следуют из требований отсутствия поверхностных усилий на границе области диспергированного материала:

$$f_0^{(1)}\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \left(f_0^{(1)}\right)'\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad g_0^{(1)}\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (6.6)$$

и условий симметрии на продолжении трещины:

$$\left(f_0^{(1)}\right)'(\theta = 0) = 0, \quad \left(f_0^{(1)}\right)'''(\theta = 0) = 0, \quad \left(g_0^{(1)}\right)'(\theta = 0) = 0. \quad (6.7)$$

Для дальнейшего анализа сведем полученную систему уравнений (6.4), (6.5) к системе дифференциальных уравнений первого порядка. С этой целью введем обозначения:

$$\varphi_1 = f_0^{(1)}, \quad \varphi_2 = \left(f_0^{(1)}\right)', \quad \varphi_3 = \left(f_0^{(1)}\right)'', \quad \varphi_4 = \left(f_0^{(1)}\right)''', \quad \varphi_5 = g_0^{(1)}, \quad \varphi_6 = \left(g_0^{(1)}\right)'. \quad (6.8)$$

После введенных обозначений система уравнений (6.4), (6.5) принимает вид:

$$\begin{aligned}
\varphi_1' - \varphi_2 &= 0, & \varphi_2' - \varphi_3 &= 0, & \varphi_3' - \varphi_4 &= 0, \\
\varphi_4' + e_1\varphi_1 + e_2\varphi_2 + e_3\varphi_3 + e_4\varphi_4 + e_5\varphi_5 + e_6\varphi_6 &= H_1,
\end{aligned} \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned}
\varphi_5' - \varphi_6 &= 0, \\
\varphi_6' + d_1\varphi_1 + d_2\varphi_2 + d_3\varphi_3 + d_4\varphi_4 + d_5\varphi_5 + d_6\varphi_6 &= H_2.
\end{aligned} \quad (6.10)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
e_1 &= (p_4q_5 - p_5q_4)/q_5, & e_2 &= (p_3q_5 - p_5q_3)/q_5, & e_3 &= (p_2q_5 - p_5q_2)/q_5, \\
e_4 &= (p_1q_5 - p_5q_1)/q_5, & e_5 &= (p_7q_5 - p_5q_7)/q_5, & e_6 &= (p_6q_5 - p_5q_6)/q_5, \\
d_1 &= q_4/q_5, & d_2 &= q_3/q_5, & d_3 &= q_2/q_5, & d_4 &= q_1/q_5, & d_5 &= q_7/q_5, & d_6 &= q_6/q_5,
\end{aligned}$$

$$H_1 = F_1^1 - p_5 \frac{F_2^1}{q_5}, \quad H_2 = \frac{F_2^1}{q_5}. \quad (6.11)$$

Решение системы уравнений (6.9), (6.10) должно удовлетворять крайевым условиям:

$$\varphi_1\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \varphi_2\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \varphi_5\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad (6.12)$$

$$\varphi_2(\theta = 0) = 0, \quad \varphi_4(\theta = 0) = 0, \quad \varphi_6(\theta = 0) = 0. \quad (6.13)$$

Поскольку однородная задача, соответствующая (6.4), (6.7), имеет нетривиальное решение, неоднородная задача обладает решением, только если выполнено некоторое условие разрешимости. Для вывода условия разрешимости краевой задачи обратимся к решению сопряженной краевой задачи. Умножим каждое из уравнений системы (6.9), (6.10) на функции  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_6$  и сложим полученные произведения. Далее проинтегрируем этот результат по углу  $\theta$  в пределах от  $\theta = 0$  до  $\theta = \pi/2$ . Затем проинтегрируем полученное выражение по частям, перенося дифференцирование с функций  $\varphi_k(\theta)$  на  $\psi_k(\theta)$ . После указанных преобразований получим сопряженную к (6.9), (6.10) систему уравнений вида:

$$\psi_1' = e_1\psi_4 + d_1\psi_6, \quad \psi_2' = -\psi_1 + e_2\psi_4 + d_2\psi_6, \quad \psi_3' = -\psi_2 + e_3\psi_4 + d_3\psi_6, \quad (6.14)$$

$$\psi_4' = -\psi_3 + e_4\psi_4 + d_4\psi_6, \quad \psi_5' = e_5\psi_4 + d_5\psi_6, \quad \psi_6' = -\psi_5 + e_6\psi_4 + d_6\psi_6 \quad (6.15)$$

и краевые условия сопряженной задачи:

$$\psi_3\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \psi_4\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \psi_6\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad (6.16)$$

$$\psi_1(\theta = 0) = 0, \quad \psi_3(\theta = 0) = 0, \quad \psi_5(\theta = 0) = 0. \quad (6.17)$$

Условие разрешимости краевой задачи (6.9), (6.10), (6.12), (6.13) принимает форму

$$\int_0^{\pi/2} (H_1\psi_4 + H_2\psi_6) d\theta = 0. \quad (6.18)$$

Численное решение сопряженной краевой задачи (6.14), (6.15) с краевыми условиями (6.16), (6.17) выполнено в системе компьютерной алгебры Mathematica 6.0. Подставляя в условие разрешимости функции  $H_1$  и  $H_2$ , определяемые равенствами (6.11), можно найти, что  $k_1 = n_1 - m_1 = -1$ . Решение краевой задачи для системы уравнений (6.4), (6.5) имеет вид

$$f_0^{(1)}(\theta) = (\cos \theta)^3 \frac{\ln \cos \theta - 5/6}{6}, \quad g_0^{(1)}(\theta) = \cos \theta \ln \cos \theta. \quad (6.19)$$

Для функций  $f_0^{(k)}(\theta)$  и  $g_0^{(k)}(\theta)$  ( $k \geq 2$ ) можно получить систему двух линейных ОДУ, имеющую аналогичную системе уравнений (6.4), (6.5) структуру:

$$\left(f_0^{(k)}\right)^{IV} + p_1\left(f_0^{(k)}\right)''' + p_2\left(f_0^{(k)}\right)'' + p_3\left(f_0^{(k)}\right)' + p_4f_0^{(k)} + p_5\left(g_0^{(k)}\right)'' + p_6\left(g_0^{(k)}\right)' + p_7g_0^{(k)} = F_1^k, \quad (6.20)$$

$$q_1\left(f_0^{(k)}\right)''' + q_2\left(f_0^{(k)}\right)'' + q_3\left(f_0^{(k)}\right)' + q_4f_0^{(k)} + q_5\left(g_0^{(k)}\right)'' + q_6\left(g_0^{(k)}\right)' + q_7g_0^{(k)} = F_2^k, \quad (6.21)$$

где функции  $F_j^k$  не приводятся в силу громоздкости. Краевые условия, накладываемые на функции  $f_0^{(k)}(\theta)$  и  $g_0^{(k)}(\theta)$ , следуют из требований отсутствия поверхностных усилий на границе области диспергированного материала:  $f_0^{(k)}(\theta = \pi/2) = 0$ ,  $\left(f_0^{(k)}\right)'(\theta = \pi/2) = 0$ ,  $g_0^{(k)}(\theta = \pi/2) = 0$  и условий симметрии на продолжении трещины:  $\left(f_0^{(k)}\right)'(\theta = 0) = 0$ ,  $\left(f_0^{(k)}\right)'''(\theta = 0) = 0$ ,  $\left(g_0^{(k)}\right)'(\theta = 0) = 0$ .

Краевая задача для системы уравнений (6.20), (6.21) подобна краевой задаче относительно функций  $f_0^{(1)}(\theta)$ ,  $g_0^{(1)}(\theta)$ , рассмотренной выше. В силу чего условие разрешимости имеет аналогичный вид, за исключением функций  $F_1^k$ ,  $F_2^k$ . Формулируя условие разрешимости краевой задачи для функций  $f_0^{(k)}(\theta)$ ,  $g_0^{(k)}(\theta)$  в виде (6.18) и заменяя  $F_1^1$  на  $F_1^k$ , а  $F_2^1$  на  $F_2^k$  соответственно

$$\int_0^{\pi/2} (H_1\psi_4 + H_2\psi_6)d\theta = 0, \quad \text{где} \quad H_1 = F_1^k - p_5 \frac{F_2^k}{q_5}, \quad H_2 = \frac{F_2^k}{q_5},$$

можно найти разность  $n_k - m_k = (-1)^k$ . Поэтому справедливо следующее асимптотическое разложение:  $n - m = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \varepsilon^j$ , которое представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с суммой  $n - m = -\varepsilon/(1 + \varepsilon)$ . Исключая малый параметр  $\varepsilon = \mu_0 - \mu_0^{(0)}$ , можно найти аналитическое выражение для собственного значения  $n - m = (1 - \mu_0)/\mu_0$  или  $\mu_0 = 1/(1 + n - m)$ , что дает возможность в конечном итоге записать решение нелинейной задачи на собственные значения в замкнутой форме. После исключения малого параметра решение задачи принимает вид  $f_0(\theta) = (\cos \theta)^{\mu_0+2}/((\lambda_0 + 2)(\lambda_0 + 1))$ ,  $g_0(\theta) = (\cos \theta)^{\mu_0}$ . Угловые распределения главных членов асимптотических разложений компонент тензора напряжений и параметра сплошности определяются формулами:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(0)} &= \kappa \sin^2 \theta (\cos \theta)^{\mu_0}, & \sigma_{\theta\theta}^{(0)} &= \kappa (\cos \theta)^{\mu_0+2}, \\ \sigma_{r\theta}^{(0)} &= \kappa \sin \theta (\cos \theta)^{\mu_0+1}, & g_0 &= \kappa^{m/(n+1)} (\cos \theta)^{\mu_0}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Угловое распределение скалярного параметра сплошности (функция  $g_0(\theta)$ ) для  $n - m = 0.8$  показано на рис. 1 (слева). На рисунках цифрами помечены: 1 — угловое распределение, определяемое главным членом асимптотического разложения (6.3); 2 — угловое распределение, определяемое двучленным асимптотическим разложением функции  $g_0(\theta) = g_0^{(0)}(\theta) + \varepsilon g_0^{(1)}(\theta)$ , где функция  $g_0^{(1)}(\theta)$  вычисляется по формуле (6.19); цифрами  $k = 3, 4, 5$  показаны угловые распределения, определяемые  $k + 1$ -членными асимптотическими разложениями функции  $g_0(\theta) = \sum_{j=0}^4 \varepsilon^j g_0^{(j)}$ , где функции  $g_0^{(j)}$  вычисляются согласно (6.3), (6.19). Точное решение (6.22) показано точками. Из приведенных графиков видно, что кривые, обозначенные цифрами 4 и 5, не различимы и практически совпадают с точным решением. Угловые распределения компонент тензора напряжений показаны на рис. 1 (справа) и рис. 2. Подобная техника была использована для рассмотрения краевой задачи относительно функций  $f_1(\theta)$  и  $g_1(\theta)$  (с помощью описанного подхода исследована система уравнений (3.7) и (3.13)), что позволило найти решение в замкнутой форме  $f_1(\theta) = \kappa (\cos \theta)^{\mu_1}/((\mu_1 + 2)(\mu_1 + 1))$ ,  $g_1(\theta) = \kappa^{m/(n+1)} (\cos \theta)^{\mu_1}$ .

Окончательно, угловые распределения компонент тензора напряжений и параметр сплошности определяются формулами:

$$\sigma_{rr}^{(1)}(\theta) = \kappa \sin^2 \theta (\cos \theta)^{\mu_1}, \quad \sigma_{\theta\theta}^{(1)}(\theta) = \kappa (\cos \theta)^{\mu_1+2}, \quad (6.23)$$

$$\sigma_{r\theta}^{(1)}(\theta) = \kappa \sin \theta (\cos \theta)^{\mu_1+1}, \quad g_0^{(1)}(\theta) = \kappa^{m/(n+1)} (\cos \theta)^{\mu_1}, \quad \mu_1 = 2\mu_0. \quad (6.24)$$

Результаты численного решения системы уравнений (3.7), (3.13) для различных значений параметров кинетического уравнения и сравнение численного и аналитического решения (6.23), (6.24) приведены на рис. 3. Аналитическое решение (6.23), (6.24) показано сплошной линией, точками изображено численное решение системы уравнений (3.7), (3.13).

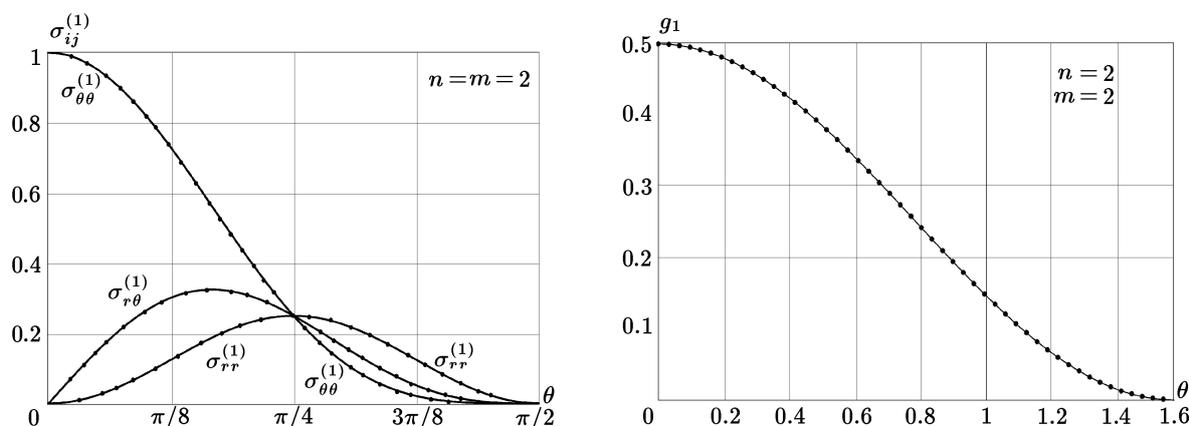


Рис. 3. Угловые распределения коэффициентов второго члена асимптотических разложений тензора напряжений: функции  $\sigma_{ij}^{(1)}(\theta)$  (слева) и параметра сплошности  $g_1(\theta)$  (справа)  $n = 2, m = 2$

Ясно, что численное решение, полученное с помощью метода Рунге–Кутты, и аналитическое решение, найденное с помощью метода искусственного малого параметра, совпадают. Подобная техника была использована для нахождения функций  $f_j(\theta)$  и  $g_j(\theta)$  ( $j \geq 2$ ). Проведенный анализ позволяет заключить, что справедливы следующие асимптотические разложения функции напряжений и параметра сплошности, содержащие высшие приближения:

$$\chi(r, \theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j r^{\lambda_j + 2} \frac{(\cos \theta)^{\lambda_j + 2}}{(\lambda_j + 2)(\lambda_j + 1)}, \quad \psi(r, \theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j r^{\mu_j} (\cos \theta)^{\mu_j}, \quad (6.25)$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{1 + n - m}, \quad \lambda_k = (k + 1)\lambda_0, \quad \mu_k = \lambda_k.$$

## Выводы и обсуждение результатов

В работе приведен асимптотический анализ напряженно-деформированного состояния и поля сплошности у вершины усталостной трещины отрыва в среде с поврежденностью в связанной постановке задачи (упругость–поврежденность) для плоского напряженного состояния. Построены высшие приближения в асимптотических представлениях компонент тензора напряжений и параметра сплошности вблизи вершины растущей трещины и найдены аналитические представления угловых распределений компонент тензора напряжений и параметра сплошности — всех коэффициентов асимптотических разложений функции напряжений Эри и параметра сплошности. Показано, что определение угловых распределений компонент тензора напряжений и параметра сплошности и показателей степеней асимптотических разложений приводит к нелинейным задачам на собственные значения, для решения которых предложен и реализован метод нахождения точного решения. Проведенный асимптотический анализ уравнений рассматриваемой задачи является особенно эффективным, поскольку прямые компьютерные вычисления распределений напряжений и сплошности в окрестности вершины трещины встречают серьезные трудности: изученная в настоящей работе система нелинейных дифференциальных уравнений является сингулярно возмущенной, что приводит к необходимости отступа от левого конца отрезка интегрирования и строгому обоснованию выбора величины отступа. В рамках асимптотического анализа полностью определяются степени

в асимптотических разложениях, коэффициенты асимптотических разложений — угловые распределения полей напряжений и параметра сплошности. Остаются неизвестными амплитудные множители — коэффициенты  $\alpha_k, \beta_k, k = 0, 1, \dots$ . Масштабные (амплитудные) множители отражают влияние приложенной нагрузки и геометрии образца на ближнее поле напряжений — на поле напряжений вблизи кончика распространяющейся трещины. Амплитудные множители, как правило, не могут быть найдены в ходе асимптотического анализа и их определение влечет за собой необходимость решения задачи в целом — определение механических полей для реального образца или элемента конструкции, находящегося под действием реальной системы нагрузок. В силу этой причины нахождение амплитудных множителей требует привлечения либо конечно-элементного анализа [3, 4], либо применение процедуры сращивания двух решений: ближнего и дальнего поля напряжений, если известно решение задачи для дальнего поля напряжений [9, 16]. Каждая из описанных процедур требует самостоятельного рассмотрения и является предметом дальнейшего изучения.

## Литература

1. **Пестриков В.М., Морозов Е.М.** Механика разрушения. Курс лекций. — СПб.: Профессия, 2012. (Pestrikov V.M., Morozov E.M. Mekhanika razrusheniya. Kurs lektsij. — SPb.: Professiya, 2012.)
2. **Murakami S.** Continuum Damage Mechanics. A Continuum Mechanics Approach to the Analysis of Damage and Fracture. — Dordrecht: Springer, 2012.
3. **Степанова Л.В.** Математические методы механики разрушения. — Самара: Изд-во “Самарский университет”, 2006. (Stepanova L.V. Matematicheskie metody mekhaniki razrusheniya. — Samara: Izd-vo “Samariskij universitet”, 2006.)
4. **Shi J., Chopp D., Lua J., Sukumar N., and Belytschko T.** Abaqus implementation of extended finite element method using a level set representation for three-dimensional fatigue crack growth and life predictions // Engineering Fracture Mechanics. — 2010. — Vol. 77. — P. 2840–2863.
5. **Brighenti R., Carpinteri A., and Corbari N.** Damage mechanics and Paris regime in fatigue life assessment of metals // Int. J. of Pressure Vessels and Piping. — 2013. — Vol. 104. — P. 57–68.
6. **Си Дж.** Мезомеханика, понятие сегментации и мультискейлинговый подход: нано-микро-макро // Физическая мезомеханика / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2008. — Т. 11, № 3. — С. 5–18. (Si Dzh. Mezomekhanika, ponyatie segmentatsii i mul'tiskejlingovyy podkhod: nano-mikro-makro // Fizicheskaya mezomekhanika / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2008. — T. 11, № 3. — S. 5–18.)
7. **Степанова Л.В.** Анализ собственных значений в задаче о трещине в материале со степенным определяющим законом // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2009. — Т. 49, № 8. — С. 1399–1415. (Stepanova L.V. Analiz sobstvennykh znachenij v zadache o treshchine v materiale so stepennym opredelyayushchim zakonom // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2009. — T. 49, № 8. — S. 1399–1415.)
8. **Степанова Л.В.** Уточненный расчет напряженно-деформированного состояния у вершины трещины в условиях циклического нагружения в среде с поврежденностью // Вестник Самарского государственного университета. — 2011. — № 83. — С. 105–115. (Stepanova L.V. Utochnennyj raschet napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya u vershiny treshchiny v usloviyakh tsiklicheskogo nagruzheniya v srede s povrezhdennost'yu // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. — 2011. — № 83. — S. 105–115.)
9. **Hello G., Tahar M.B., and Roelandt J.M.** Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium // Int. J. of Solids and Structures. — 2012. — Vol. 49, iss. 3–4. — P. 556–566.

10. **Li J., Recho N.** Methodes Asymptotiques en Mecanique de la Rupture. — Paris: Hermes Science Publications, 2002.
11. **Степанова Л.В.** О собственных значениях в задаче о трещине антиплоского сдвига в материале со степенными определяющими уравнениями // Прикладная мех. и техн. физика / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2008. — Т. 49, № 1 (287). — С. 173–180. (Stepanova L.V. O sobstvennykh znacheniyakh v zadache o treshchine antiploskogo sdviga v materiale so stepennymi opredelyayushchimi uravneniyami // Prikladnaya mekh. i tekhn. fizika / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2008. — T. 49, № 1 (287). — S. 173–180.)
12. **Zhao J., Zhang X.** The asymptotic study of fatigue crack growth based on damage mechanics // Engineering Fracture Mechanics. — 1995. — Vol. 50, № 1. — P. 131–141.
13. **Андрианов И., Аврейтевич Я.** Методы асимптотического анализа и синтеза в нелинейной динамике и механике деформируемого твердого тела. — Ижевск: Изд-во Института компьютерных исследований, 2013. (Andrianov I., Avrejtsevich YA. Metody asimptoticheskogo analiza i sinteza v nelinejnoj dinamike i mekhanike deformiruемого tverdogo tela. — Izhevsk: Izd-vo Instituta komp'yuternykh issledovaniy, 2013.)
14. **Andrianov I., Awrejcewicz J., and Olevskyy V.** Applications of 2D Padé approximants in nonlinear shell theory: stability calculation and experimental justification // Nonlinearity, Bifurcation and Chaos — Theory and Application / J. Awrejcewicz and P. Hagedorn. — Rijeka: InTech, 2012. — P. 12–26.
15. **Большаков В.И., Андрианов И.В., Данишевский В.В.** Асимптотические методы расчета композиционных материалов с учетом внутренней структуры. — Днепропетровск: Пороги, 2008. (Bol'shakov V.I., Andrianov I.V., Danishevskij V.V. Asimptoticheskie metody rascheta kompozitsionnykh materialov s uchetom vnutrennej struktury. — Dnepropetrovsk: Porogi, 2008.)
16. **Степанова Л.В., Адылина Е.М.** Асимптотические методы нелинейной механики разрушения: результаты, современное состояние и перспективы // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физ.-мат. науки. — 2013. — Т. 31, № 2 (31). — С. 156–168. (Stepanova L.V., Adylina E.M. Asimptoticheskie metody nelinejnoj mekhaniki razrusheniya: rezul'taty, sovremennoe sostoyanie i perspektivy // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Ser. Fiz.-mat. nauki. — 2013. — T. 31, № 2 (31). — S. 156–168.)

*Поступила в редакцию 20 января 2014 г.,  
в окончательном варианте 19 ноября 2014 г.*

