

УДК 519.6:532.517+546.28

Моделирование конвективных процессов при получении поликремния методом Бриджмена*

В.Н. Попов

*Институт теоретической и прикладной механики
им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск*

E-mail: popov@itam.nsc.ru

С использованием предложенной трехмерной модели проведено численное исследование конвективного теплопереноса в расплаве при получении поликристаллического кремния вертикальным методом Бриджмена. Течение в жидкости описывается уравнениями Навье–Стокса в приближении Буссинеска, а распределение концентрации растворенного вещества определяется из решения уравнения конвективной диффузии. Рассмотрено влияние неоднородного разогрева боковых стенок сосуда и формы фронта кристаллизации на структуру течений в расплаве и распределение растворенного в жидкости вещества.

Ключевые слова: конвекция, поликремний, теплоперенос, моделирование.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из наиболее перспективных направлений в энергетике является создание фотоэлектрических станций с солнечными элементами на основе кремния. Вертикальный метод Бриджмена широко используется при получении поликристаллического кремния, низкая цена которого дает ему преимущество перед монокристаллическим, несмотря на более высокую эффективность последнего. Однако для повышения качества поликремния необходимо совершенствовать технологию его выращивания, добиваясь оптимизации размера зерен и их ориентации, избавления от включений или повышения их однородности [1, 2].

Причины образования дефектов той или иной текстуры поликремния ясны не до конца. Одной из причин неравномерного распределения вытесняемых компонентов в затвердевающей слитке является конфигурация потоков, существующих в расплаве. Управление конвективными течениями заключается либо в их подавлении, либо в придании потокам желаемой конфигурации и интенсивности для поддержания гомогенности расплава. Обычно для перемешивания жидкости используют вращение тигля. Это способствует регулированию конвективных потоков и устраняет сегрегационные неоднородности в слитке, обусловленные изменением объема расплава в процессе его затвердевания.

* Работа выполнена при финансовой поддержке интеграционного проекта “Численно-аналитические исследования новых моделей задач математической физики” (совместно с УрО РАН и ДВО РАН).

Наряду с этим в работе [3] рассматривался метод, позволявший оказывать влияние на структуру течения в жидкости за счет неоднородного разогрева боковых стенок тигля. Управляющими параметрами в предлагаемом подходе являются геометрические размеры перегретого сектора, а также скорость его перемещения из-за вращения тигля или темпа переключения нагревательных элементов в печи. Таким образом, появляется возможность формировать структуру конвекции, влияющую на распределение вытесняемых компонентов при ростовом процессе, и, тем самым, решать задачу гомогенизации расплава. В результате применения такого подхода были получены слитки поликристаллического кремния с улучшенными структурными и электрофизическими характеристиками [4].

В настоящей работе с использованием трехмерного численного моделирования исследовано распределение некогерентных примесей в расплаве при получении поликристаллического кремния методом Бриджмена. Анализировалось влияние конфигурации границы фазового перехода на распределение вытесняемого вещества вблизи фронта кристаллизации в условиях азимутально-неоднородного нагрева боковых стенок тигля. Процессы рассматривались в диапазоне параметров, соответствующих реальным температурам в ростовой печи и расплаве, размерам и форме тигля.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

На рис. 1 представлена схема выращивания поликристаллического кремния вертикальным методом Бриджмена в условиях неоднородного нагрева боковых стенок сосуда. Расплавленный материал заполняет тигель конической формы до уровня H_0 , которому соответствует внутренний радиус R_t (см. рис. 1, *a*). В основании сосуд имеет радиус R_b . Тигель опускается внутри ростовой установки и охлаждается таким образом, чтобы кристаллизация расплава начиналась с донной части и далее граница фазового перехода перемещалась снизу вверх. Поскольку рассматриваются только конвективные процессы в расплаве, то фронт кристаллизации моделируется поверхностью, имеющей плоскую, выпуклую или вогнутую форму. Распределение температурного поля в жидкости определяется отводом тепла через фронт кристаллизации и теплообменом с поверхностью графитового нагревателя, который имеет область неоднородного разогрева шириной $\Delta\phi$ в азимутальном направлении. Распределение температуры по высоте графитового нагревателя определено на опытной установке (см. рис. 1, *b*).

Математическое моделирование основано на численном решении трехмерных нестационарных уравнений Навье–Стокса в приближении Буссинеска и

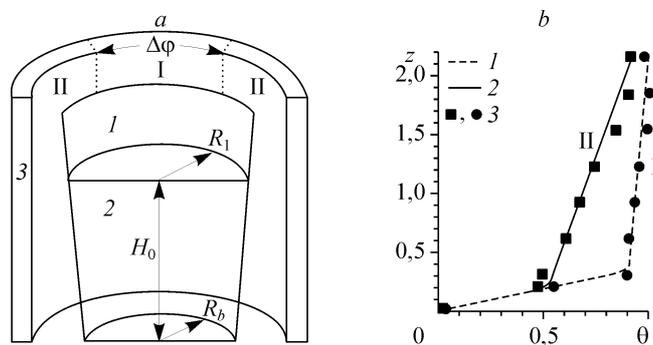


Рис. 1. Схема ростовой установки (*a*) и распределение температуры θ по высоте тигля в зонах разогрева I, II на поверхности нагревателя (*b*).

1 — тигель, 2 — расплав, 3 — графитовый нагреватель (*a*), точки — экспериментальные данные (*b*).

конвективного теплопереноса в цилиндрической системе координат, записываемых в виде [5]:

$$\mathbf{u}_t + (\nabla \mathbf{u})\mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{k} \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \theta, \quad (1)$$

$$\nabla \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

$$\theta_t + (\nabla \mathbf{u})\theta = \frac{1}{\text{Pr Re}} \nabla^2 \theta, \quad \theta = (T - T_S)/\Delta T_0. \quad (3)$$

Здесь \mathbf{u} — вектор скорости с компонентами u, v, w в радиальном (r), азимутальном (φ) и вертикальном (z) направлениях соответственно, \mathbf{k} — единичный вектор вдоль координатной оси z , p — давление, θ — температура, Re — число Рейнольдса, Pr — число Прандтля, Gr — число Грасгофа, Bi — число Био, где

$$\text{Pr} = \nu / a, \quad \text{Gr} = \beta g R_t^3 \Delta T_0 / \nu^2, \quad \text{Re} = v_0 R_t / \nu, \quad \text{Bi} = \alpha R_t / \lambda.$$

Безразмерные параметры определяются с помощью характерного размера R_t , времени $t_0 = R_t / v_0$, скорости $v_0 = v / R_t$, давления $p_0 = \rho v_0^2$, температурного интервала $\Delta T_0 = T_0 - T_S$, где T_S — температура затвердевания жидкости, T_0 — температура поверхности графитового нагревателя при $z = H_0$, ν — кинематическая вязкость, ρ — плотность, g — ускорение свободного падения, β — коэффициент объемного теплового расширения, λ — теплопроводность, a — температуропроводность, α — коэффициент теплоотдачи.

Уравнения (1)–(3) рассматриваются в расчетной области, где жидкость заполняет сосуд конической формы до уровня $H = H_0/R_t$, которому соответствует внутренний радиус, равный 1. В основании тигель имеет радиус $r_0 = R_b/R_t$. Боковая стенка сосуда описывается функцией $f_1(z) = kz + r_0$, где $k = (1 - r_0)/H$. Фронт кристаллизации моделируется поверхностью, образованной вращением кривой $f_2(r) = \delta(1 - r^2/r_0^2)$ вокруг оси Oz и может, в зависимости от δ , иметь плоскую, выпуклую или вогнутую форму.

Для жидкости используются условия прилипания на стенках сосуда и поверхности фронта кристаллизации. Предполагается, что небольшие величины конвективных скоростей при исследуемых режимах нагрева обуславливают плоскую форму свободной поверхности в отсутствии вязких напряжений. Теплообмен между расплавом в тигле и средой в ростовой печи описывается законом Ньютона. На границе раздела фаз температура постоянная. В начальный момент времени температура в жидкости от поверхности фронта кристаллизации до ее свободной поверхности определена согласно экспериментальным данным в отсутствие неоднородного бокового подогрева.

Таким образом, граничные условия формулируются в следующем виде. На боковой стенке сосуда $0 < z \leq H$, $r = f_1(z)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$:

$$\partial \theta / \partial \mathbf{n} = \text{Bi}[\theta_H(\varphi, z) - \theta], \quad \mathbf{u} = 0. \quad (4)$$

Здесь \mathbf{n} — нормальная составляющая к рассматриваемой поверхности, $\theta_H(\varphi, z)$ — распределение температуры на поверхности графитового нагревателя.

На границе фазового перехода $0 \leq r \leq 1$, $z = f_2(r)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$$\theta = 0, \quad \mathbf{u} = 0. \quad (5)$$

На свободной поверхности жидкости $0 \leq r < 1, z = H, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$:

$$\partial\theta/\partial\mathbf{n} = 0, \quad \partial u/\partial\mathbf{n} = 0, \quad \partial v/\partial\mathbf{n} = 0, \quad w = 0. \quad (6)$$

Начальные условия:

$$\theta = \theta_H(0, z), \quad \mathbf{u} = 0, \quad 0 \leq r \leq 1, 0 \leq z \leq H, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad t = 0, \quad (7)$$

где $\theta_H(0, z)$ соответствует распределению температуры I на рис. 1, b.

Таким образом, структура течения определялась в ходе решения системы (1)–(3) с граничными условиями (4)–(7).

Распределение растворенной в жидкости примеси описывается уравнением диффузии:

$$\partial C/\partial t + (\mathbf{u}\nabla)C = (1/Sc\text{Re})\nabla(\nabla C), \quad C = (C - C_0)/\Delta C_0. \quad (8)$$

Здесь Sc — число Шмидта ($Sc = \nu/D$), $\Delta C_0 = C_m - C_0$, где C_m — средняя концентрация растворенного вещества в жидкости, а C_0 — концентрация насыщения, D — коэффициент диффузии.

Граничные условия для (8) запишем в следующем виде. На боковой стенке сосуда и свободной поверхности жидкости

$$\partial C/\partial\mathbf{n} = 0. \quad (9)$$

На границе фазового перехода

$$-Sc^{-1}\partial C/\partial\mathbf{n} = Bi_D C, \quad (10)$$

где $Bi_D = w_0(1 - k_0)R_l/\nu$, w_0 — скорость роста твердой фазы, k_0 — равновесный коэффициент распределения примеси.

Начальное распределение растворенного вещества при $t = 0$ определено как $C = 1$.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Для численной реализации модели уравнения (1)–(3), (8) переписаны в дивергентной форме

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{F}_r + \mathbf{H}_\varphi + \mathbf{G}_z = \mathbf{f}, \quad (11)$$

где векторы \mathbf{q} , \mathbf{F} , \mathbf{H} , \mathbf{G} , \mathbf{f} определяются следующим образом:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} ru \\ rv \\ rw \\ 0 \\ r\theta \\ rC \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} r(u^2 - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial u}{\partial r} + p) \\ r(uv - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial v}{\partial r}) \\ r(uw - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial w}{\partial r}) \\ ru \\ r(u\theta - \frac{1}{\text{Pr Re}} \frac{\partial \theta}{\partial r}) \\ r(uC - \frac{1}{\text{Sc Re}} \frac{\partial C}{\partial r}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} uv - \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{2}{\text{Re}} \frac{v}{r} \\ v^2 - \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{2}{\text{Re}} \frac{u}{r} + p \\ vw - \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \\ v \\ v\theta - \frac{1}{\text{Pr Re}} \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \\ vC - \frac{1}{\text{Sc Re}} \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial \varphi} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} r(uw - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial u}{\partial z}) \\ r(vw - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial v}{\partial z}) \\ r(w^2 - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial w}{\partial z} + p) \\ rw \\ r(w\theta - \frac{1}{\text{Pr Re}} \frac{\partial \theta}{\partial z}) \\ r(wC - \frac{1}{\text{Sc Re}} \frac{\partial C}{\partial z}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} v^2 - \frac{1}{\text{Re}} \frac{u}{r} + p \\ -uv - \frac{1}{\text{Re}} \frac{v}{r} \\ r \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \theta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Использование цилиндрической системы координат при описании течений в области, имеющей сложную форму, является непростой задачей ввиду необходимости построения расчетной сетки, не являющейся ортогональной, а также выполнения интерполяционных процедур при определении граничных условий. Поэтому с учетом формы сосуда использовалось преобразование координат:

$$x = \frac{r}{kz + r_0}, \quad \omega = \varphi, \quad y = \frac{z - \delta}{H - \delta} \frac{[1 - r^2 / (kz + r_0)^2]}{[1 - r^2 / (kz + r_0)^2]} H, \quad (12)$$

которое отображает физическую область (r, φ, z) на вычислительную область (x, ω, y) .

В новой системе координат (11) можно представить в виде

$$\mathbf{q}_r^* + \mathbf{F}_x^* + \mathbf{H}_\omega^* + \mathbf{G}_y^* = \mathbf{f}^*, \quad (13)$$

где

$$\mathbf{F}^* = (x_r \mathbf{F} + x_z \mathbf{G}) / J, \quad \mathbf{H}^* = \omega_\varphi \mathbf{H} / J, \quad \mathbf{G}^* = (y_r \mathbf{F} + y_z \mathbf{G}) / J, \quad \mathbf{q}^* = \mathbf{q} / J, \quad \mathbf{f}^* = \mathbf{f} / J,$$

а для якобиана преобразования используется выражение $J = (x_r y_z - x_z y_r) \omega_\varphi$. При записи уравнений (13) предполагается, что частные производные в членах с вязкостью и диффузией преобразуются в соответствии с правилами дифференцирования сложных функций.

Для решения уравнений Навье–Стокса и конвективного теплопереноса применялся конечно-разностный алгоритм. Отметим, что рассматривается режим конвекции жидкости, когда течение является ламинарным и выраженный пограничный слой отсутствует. Использование преобразования (12) позволяет отобразить расчетную область в цилиндр и применять пространственную сетку вида

$$x_i = \Delta x i, \quad i = 0, \dots, I, \quad \omega_m = \Delta \omega m, \quad m = 0, \dots, M, \quad y_k = \Delta y k, \quad k = 0, \dots, K,$$

$$\Delta x = 1 / I, \quad \Delta \omega = 2\pi / M, \quad \Delta y = H / K,$$

которая разбивает расчетную область на $I \times M \times K$ ячеек.

По аналогии с методами типа *MAC* и *SIMPLE* [6, 7] составляющие скорости u , v , w определялись в серединах боковых граней ячеек, а давление P рассчитывалось в центрах ячеек. Распределение температуры и концентрации растворенного вещества в расчетной области описывается их значениями в узлах сетки. Вдоль временной переменной используется равномерная сетка $t = n \cdot \tau$, $n = 0, 1, 2, \dots$ с шагом τ . Разностные уравнения строились посредством аппроксимации

балансных соотношений, получаемых интегрированием преобразованных уравнений (1)–(3), (8) и граничных условий (4)–(7), (9), (10).

Порядок проведения расчетов на каждом временном шаге следующий. Первоначально вычисляются температурное и концентрационное поля в жидкости. Подстановка рассчитанных значений температуры в уравнения количества движения делает возможным определение составляющих поля скоростей. Далее с использованием метода искусственной сжимаемости [8] рассчитывается давление. Проводится несколько итераций по согласованию распределения давления и скоростей. Условием окончания итераций является выполнение $\max |\nabla \cdot \mathbf{u}| \leq \varepsilon$, где ε — заданное малое число. Решение алгебраических систем, получаемых при неявной аппроксимации уравнений движения и теплопереноса, осуществляется итерационным методом блочной последовательной верхней релаксации [9].

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

При проведении численных экспериментов рассматривалась структура течений в расплаве со свойствами кремния при его разогреве в сосуде высотой 70 мм, с диаметрами в основании 50 мм и в верхней части — 65 мм [10]. Материал тигля — стеклографит, толщина стенок — 0,002 м. Боковые стенки нагревателя имеют распределение температуры в области $-\Delta\varphi \leq \varphi \leq \Delta\varphi$ ($\Delta\varphi = 120^\circ$) согласно значений I (см. рис. 1, *b*), а при $\Delta\varphi < \varphi < 2\pi - \Delta\varphi$ — согласно значений II. Равновесный коэффициент распределения k_0 принимался равным 0,5, скорость роста твердой фазы w_0 по экспериментальным данным оценивалась как $3,36 \cdot 10^{-6}$ м/с. Величины параметров, используемых при расчетах, следующие: $Gr = 2,3 \cdot 10^7$, $Re = 1$, $Bi = 0,3$, $Pr = 0,015$, $Sc = 5$, $Bi_D = 0,015$, $\varepsilon = 10^{-4}$. Расчеты проводились на пространственных сетках $I \times M \times K$ от $32 \times 36 \times 40$ до $64 \times 72 \times 80$ (различие получаемых результатов не превышало 5 %). Значения временного шага выбирались из условий устойчивости численного счета, минимизации количества итераций и изменялись от 10^{-3} до 10^{-4} .

Поскольку процесс получения поликристаллического кремния вертикальным методом Бриджмена является достаточно медленным, то его на некотором временном интервале можно считать квазистационарным и анализировать поля температуры и структуру течения при заданной высоте затвердевшей фазы. Ниже представлены результаты, полученные для уровня незатвердевшего расплава в тигле $0,5H + f_2(r) \leq z \leq H$ и различных формах границы фазового перехода (плоская, вогнутая, выпуклая — $\delta = 0, -0,2, 0,2$). Ввиду того, что тигель опустился относительно первоначального положения на расстояние $0,5 H$, теплообмен происходит между расплавом и поверхностью графитового нагревателя в зоне $0 \leq z \leq 0,5H$ (см. рис. 1, *b*).

Рис. 2–4 иллюстрируют распределение температурного поля и структуру течений в расплаве при различных условиях затвердевания слитка в плоскости rz при $\varphi = 0$ (см. рис. 2–4, I), на свободной поверхности расплава (II) и на расстоянии $H/80$ от границы фазового перехода (III). Стрелки на рисунках указывают направление, а их длина характеризует интенсивность потока. Масштаб скоростей на рис. 2, *b*, *d* — 4, *b*, *d*, I, II и рис. 2, *b*, *d* — 4, *b*, *d*, III — 2:1. Рис. 5 отображает распределение вытесняемой примеси на границе фазового перехода для рассматриваемых вариантов. Отметим, что представленные результаты диффузионной задачи дают качественную картину, т. к. для получения более точных данных требуется существенное увеличение узлов пространственной сетки.

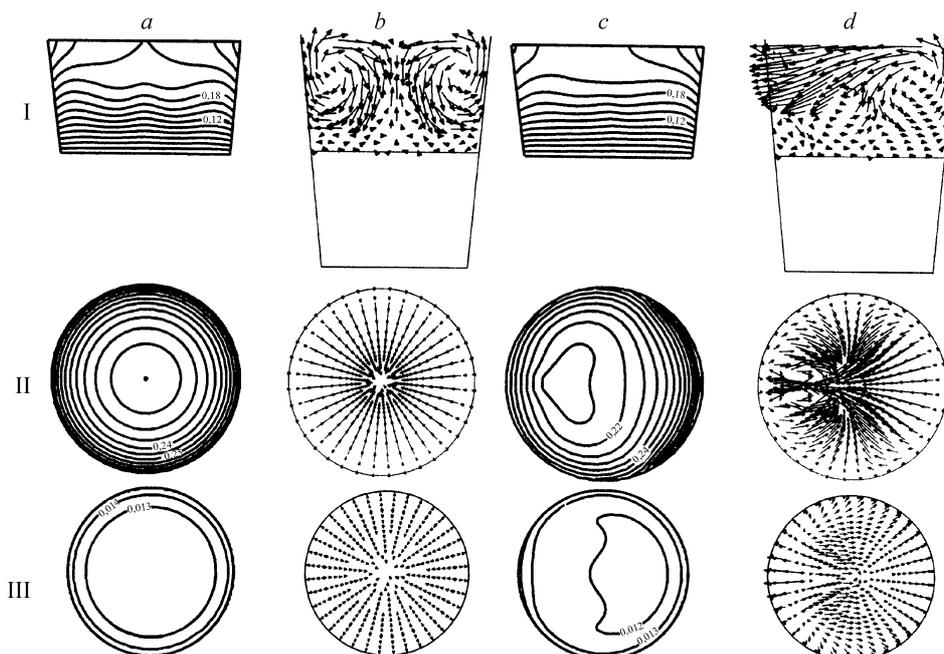


Рис. 2. Изотермы (*a, c*) и поле скоростей (*b, d*) в плоскости rz при $\varphi = 0^\circ$ (I), на поверхности расплава (II) и на расстоянии $H/80$ от плоской границы фазового перехода (III), при осесимметричном (*a, b*) и неоднородном (*c, d*) разогреве боковых стенок тигля.

На рис. 2, *a, b* – 4, *a, b*, I, II, III представлены результаты, полученные при осесимметричном теплообмене боковых стенок тигля с графитовым нагревателем, разогретым согласно данным I на рис. 1, *b*. С помощью расчетов определено, что

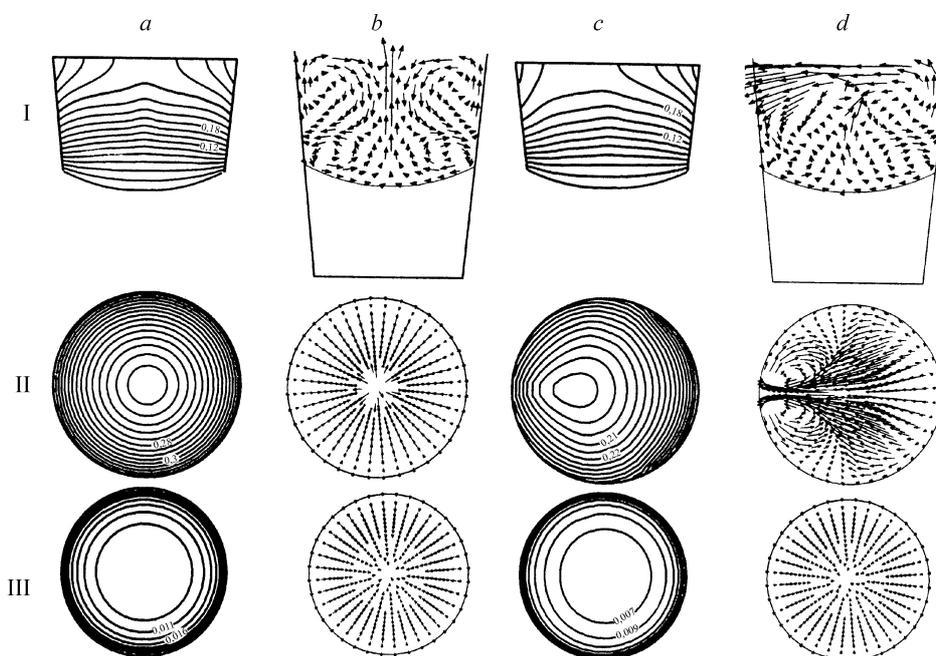


Рис. 3. Изотермы (*a, c*) и структура течения (*b, d*) в плоскости rz при $\varphi = 0^\circ$ (I), на поверхности расплава (II) и на поверхности, расположенной на расстоянии $H/80$ от вогнутой границы фазового перехода (III), при осесимметричном (*a, b*) и неоднородном (*c, d*) разогреве боковых стенок тигля.

при плоской или вогнутой форме границы фазового перехода происходит интенсивное перемешивание жидкости в верхней части сосуда. Коническая форма тигля способствует существованию восходящего потока в области центральной оси. Такая структура течения приводит к тому, что значительная часть вытесняемой при кристаллизации примеси скапливается в центральной области (рис. 5, *a*, I, II). По результатам расчетов, в случае, когда сосуд имеет форму цилиндра, восходящий поток в центре отсутствует [11].

В случае выпуклого фронта кристаллизации основная циркуляция в жидкости обуславливается всплыванием теплых масс вверх вдоль боковых стенок и образованием нисходящего потока в области центральной оси тигля, который вблизи фазовой границы формирует расходящееся течение. Симметричный нагрев жидкости способствует существованию застойной зоны вблизи границы фазового перехода в центральной части сосуда (см. рис. 4, *b*, I, II, III). При такой структуре течения вытесняемое в жидкость вещество не только переносится к боковым стенкам сосуда, но и частично накапливается в центральной зоне (см. рис. 5, *a*, III).

Рисунки 2, *c*, *d* – 4, *c*, *d* I, II, III иллюстрируют результаты, определенные при нагреве боковых стенок тигля (см. рис. 1, *b*) согласно значений I в сегменте $-60^\circ \leq \varphi \leq 60^\circ$ и данных II для $60^\circ < \varphi < 300^\circ$. Условия теплообмена способствуют тому, что в жидкости формируются температурные поля и структуры течений, симметричные относительно плоскости rz при $\varphi = 0$. Ввиду того, что в жидкости возникает температурный градиент в азимутальном направлении, существующее течение дополняется потоками, расходящимися от зоны более интенсивного нагрева в разные стороны. Данные расчетов показывают, что интенсивность

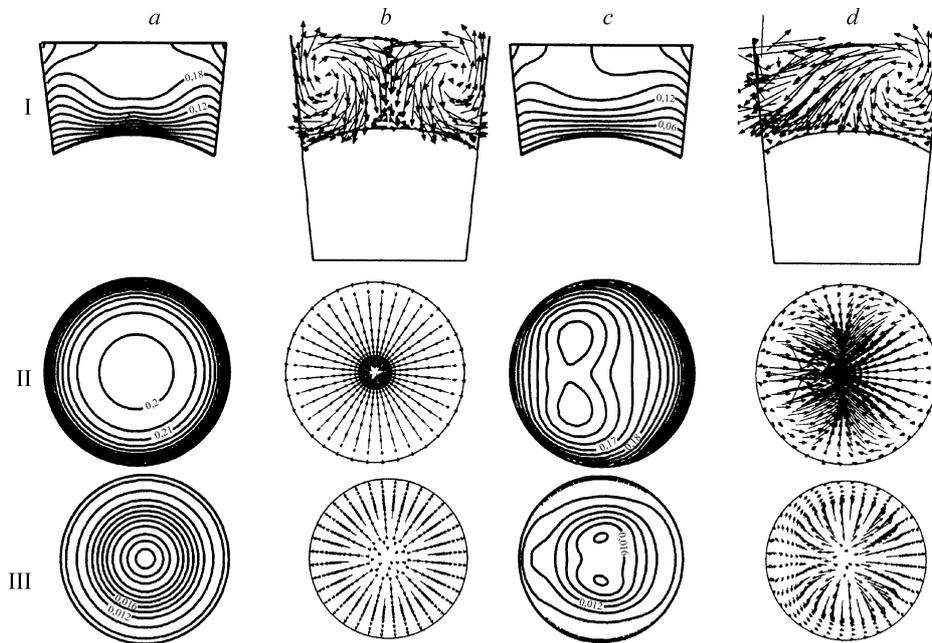


Рис. 4. Изотермы (*a*, *c*) и структура течения (*b*, *d*) в плоскости rz при $\varphi = 0^\circ$ (I), на поверхности расплава (II) и на поверхности, расположенной на расстоянии $H/80$ от выпуклой границы фазового перехода (III), при осесимметричном (*a*, *b*) и неоднородном (*c*, *d*) разогреве боковых стенок тигля.

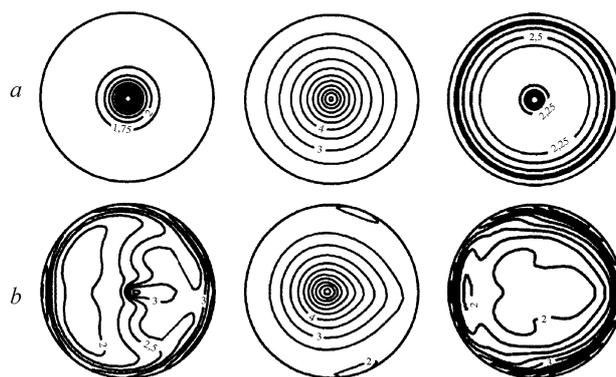


Рис. 5. Изоконцентраты на поверхности фронта кристаллизации, имеющего плоскую (I), вогнутую (II) и выпуклую (III) формы, при равномерном (а) и неоднородном (b) в азимутальном направлении распределениях температуры внутри печи.

азимутального течения снижается с увеличением глубины. Неоднородный разогрев сосуда приводит к тому, что восходящий поток вблизи центральной оси сохраняется лишь при вогнутой границе фазового перехода, а в других случаях исчезает. Значения температуры вблизи границы фазового перехода немного снижаются, что может положительно сказаться на структуре слитка, т. к. средний размер зерна в поликристаллическом материале существенно зависит от скорости охлаждения на фронте кристаллизации [12].

Следствием сформировавшейся структуры течения является распределение концентрации растворенного вещества на поверхности фронта кристаллизации (см. рис. 5, b, I, II, III). По результатам расчетов определено, что в случаях плоской и выпуклой границ фазового перехода распределение вытесняемого вещества в центральной части слитка становится более однородным, а его максимальная концентрация наблюдается у боковых стенок сосуда. При вогнутой границе фазового перехода неоднородный разогрев боковых стенок сосуда существенного влияния на распределение примеси не оказывает.

ВЫВОДЫ

В работе с использованием трехмерного численного моделирования рассмотрены конвективные процессы в расплаве при выращивании поликристаллического кремния методом Бриджмена в неосесимметричном тепловом поле. Из полученных результатов следует, что неоднородный разогрев расплава изменяет структуру конвективных течений, которые в случаях плоского или выпуклого фронтов кристаллизации способствуют оттеснению растворенной примеси к стенкам тигля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nepomnyashikh A.I., Fedosenko V.A., Eremin V.P. et al. Low cost multicrystalline silicon as base for development of PV industry. // Proc. of the symposium Energy Cooperation in Northeast Asia: Prerequisites, Conditions, Ways. Irkutsk, Russia, 2002. P. 341–348.
2. Fujiwara K., Obinata Y., Ujihara T. et al. Grain growth behaviors of polycrystalline silicon during melt growth processes // J. of Crystal Growth. 2004. Vol. 266. P. 441–448.
3. Kokh K.A., Popov V.N., Kokh A.E. et al. Numerical modeling of melt flows in vertical Bridgman configuration affected by rotating heat field // J. of Crystal Growth. 2007. Vol. 303. P. 253–257.
4. Бельский С. С., Немчинова Н. В., Красин Б. А. Изучение влияния параметров кристаллизации на свойства и структуру мультикремния // Современные наукоемкие технологии. 2006. № 8. С. 21–25.

5. Полежаев В.И., Бунз А.В., Везуб Н.А. и др. Математическое моделирование конвективного теплопереноса на основе уравнений Навье–Стокса. М.: Наука, 1987. 272 с.
6. F.H. Harlow and J.E. Welch. Numerical calculation of time-depend viscous incompressible flow of fluid with free surface // Phys. Fluids. 1965. Vol. 8. P. 2182–2189.
7. S.V. Patankar, D.B. Spalding. A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-Dimensional Parabolic Flows // Inter. J. Heat Mass Trans. 1972. Vol. 15. P. 1787–1806.
8. Chorin A.J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems // J. Comput. Phys. 1967. Vol. 2. P. 12–26.
9. Самарский А.А., Николаев Т.С. Методы решений сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 592 с.
10. Басин А.С., Шишкин А.В. Получение кремневых пластин для солнечной энергетики. Методы и технологии. Новосибирск: Институт теплофизики СО РАН, 2000. 196 с.
11. Попов, А.Е.Кох, К.А.Кох, и др. В.Н. Численное моделирование конвективных процессов при выращивании поликристаллического кремния методом Бриджмена в неосесимметричном тепловом поле. // Сб. тр. 6-й между. конф. “Рост монокристаллов и теплоперенос”. Обнинск. 2005. Т. 3. С. 603–611.
12. Черепанов А.Н. Морфологические особенности роста дендрита в ячейке двухфазной зоны // Изв. АН СССР. Металлы. 1988. № 5. С. 70–76.

Статья поступила в редакцию 17 февраля 2009 г.