кинетики процесса показывает, что принятые выше принципы действительно обеспечивают полное перемешивание и, самое главное, показывают, что процесс к возмущениям устойчив [5]. Это означает, что полученные результаты можно использовать для создания действующих эффективных смесителей порошковых материалов [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Макаров Ю.И.** Аппараты для смешения сыпучих материалов. — М.: Машиностроение, 1973.
2. **Ревуженко А.Ф.** Принципы создания идеальных смесителей порошковых материалов // Порошковая металлургия. — 1989. — № 4.
3. **Монин А.С., Яглом А.М.** Стохастическая гидромеханика. Механика турбулентности. — М.: Наука, 1965. — Ч. 1.
4. **Сципер Ф.** Принципы случайного блуждания. — М.: Мир, 1969.
5. **Bobryakov A.P., Kramarenko V.I., Revuehenko A.F., Shemyakin E.I.** Theoretical models of powder mining // Intern. Conference on Powder Metallurgy, London, 1990. — S. l.: Inst. of Metals, 1990. — V. 3.
6. **А.с. 1172582 СССР.** Способ смешивания сыпучих материалов и устройство для его осуществления / В.Г. Безродный, А.П. Бобряков, Б.В. Назаров и др. // Открытия. Изобретения. — 1985. — № 30.

г. Новосибирск *Поступила 14/VII 1993 г.*

УДК 539.3

Ю.А. Боган

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ НАПРЯЖЕНИЙ В УПРУГОМ СИЛЬНО АНИЗОТРОПНОМ МАТЕРИАЛЕ

В данной работе рассмотрены две известные задачи в теории упругости (о распределении напряжений в эллиптической области, контактная задача для полуплоскости) с точки зрения влияния сильной анизотропии. Напомним, что материал называется сильно анизотропным, если модуль Юнга в заданном направлении значительно больше, чем в ортогональном. В частности, изучен предельный случай, когда материал в пределе нерастяжим. Обнаружено, что задача расчета упомянутых выше конструкций имеет ряд специфических особенностей.

1. Распределение напряжений в эллиптической области. В [1, 2] предложен метод расчета ортотропных пластин, основанный на том, что для многих материалов отношение комплексных параметров является малым. Этот метод основан также на разложении комплексных потенциалов $\Phi_k (k = 1, 2)$ в ряд по неотрицательным степеням малого параметра. Ниже на примере явного решения краевой задачи для эллиптической области показано, что разложение в ряд одного из комплексных потенциалов начинается с отрицательной степени малого параметра, а также, что решение предельной задачи имеет особенность типа квадратного корня в точках касания характеристики предельного уравнения и границы.

Примем обобщенный закон Гука для ортотропного материала в виде

$$\sigma_{11} = c_{11}u_{1,x_1} + c_{12}u_{2,x_2}, \quad \sigma_{22} = c_{12}u_{1,x_1} + c_{22}u_{2,x_2}, \quad \sigma_{12} = c_{66}(u_{1,x_2} + u_{2,x_1}),$$

где u_1, u_2 — перемещения; c_{ij} — коэффициенты упругости. Введем безразмерные напряжения и жесткости, положив

$$d_{ij} = c_{ij}c_{66}^{-1}, \quad \sigma^*_{ij} = \sigma_{ij}c_{66}^{-1}, \quad i, j = 1, 2$$

(в дальнейшем для безразмерных напряжений прежние обозначения сохранятся).

Рассмотрим ситуацию, когда $d_{22} \gg 1$. Эта ситуация соответствует композиционному материалу, армированному одним семейством очень жестких волокон, параллельных оси x_2. Положим $d_{22} = \varepsilon^{-2}$, $\varepsilon \ll 1$. Уравнение для функции напряжений при отсутствии объемных сил имеет вид

$$\gamma_1^2 w^{\varepsilon}_{,x_1^4} + (1 - c\varepsilon^2\gamma_1^2) w^{\varepsilon}_{,x_1^2x_2^2} + \varepsilon^2 w^{\varepsilon}_{,x_2^4} = 0 \tag{1.1}$$

($\gamma_1 = d_{11}^{-1}$, $c = d_{12}^2 + 2d_{12}$). При $\varepsilon = 0$ оно переходит в уравнение

$$\gamma_1^2 w^0_{,x_2^4} + w^0_{,x_1^2x_2^2} = 0$$

составного типа с одним двукратным семейством характеристик $x_1 = \text{const}$. Изменение типа уравнения в пределе позволяет ожидать, что решение предельной задачи будет иметь особенности, отсутствующие в анизотропной упругости. Действительно, как было показано ранее [3], вблизи характеристической части границы наблюдается возникновение пограничного слоя и число граничных условий в пределе уменьшается на единицу.

Точное решение задачи теории упругости для сплошного эллипса при заданном на границе векторе напряжений дано в [4]. Используя обозначения [4], запишем граничные условия:

$$2\mathrm{Re}[\Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2)]|_{\partial Q} = g_1(\theta),$$

$$2\mathrm{Re}[\mu_1\Phi_1(z_1) + \mu_2\Phi_2(z_2)]|_{\partial Q} = g_2(\theta).$$

Считаем, что g_1, g_2 разлагаются в ряд Фурье:

$$g_1(\theta) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k e^{ik\theta} + \bar{\alpha}_k e^{-ik\theta}),$$

$$g_2(\theta) = \beta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k e^{ik\theta} + \bar{\beta}_k e^{-ik\theta}).$$

Уравнение границы возьмем в параметрическом виде $x_1 = a\cos\theta$, $x_2 = b\sin\theta$. Для равновесия пластины необходимо выполнение условия $-i(\alpha_1 - \bar{\alpha}_1)b^{-1} = a^{-1}(\beta_1 + \bar{\beta}_1)$. Функции Φ_1 и Φ_2 разлагаются в ряды по полиномам Фабера:

$$\Phi_1 = A_0 + A_1 z_1 + \sum_{k=2}^{\infty} A_k P_{1k}(z_1),\ \Phi_2 = B_0 + B_1 z_2 + \sum_{k=2}^{\infty} B_k P_{2k}(z_2).$$

Здесь

$$P_{sk}(z_s) = (-1)(a - i\mu_s b)^{-1}[(z_s + (z_s - a^2 - \mu_s b^2)^{1/2}) +$$
$$+ (z_s - (z_s - a^2 - \mu_s^2 b^2)^{1/2})^k],\quad s = 1, 2.$$

Положим $\mu_k = il_k$: l_1 и l_2 — положительные корни уравнения

$$(d_{11} - \lambda^2)(1 - \varepsilon^{-2}\lambda^2) + c^2\lambda^2 = 0.$$

Постоянные A_k, B_k определяются из системы уравнений

$$A_k + B_k + \bar{A}_k t_1^k + \bar{B}_k t_2^k = -\alpha_k,\quad A_k\mu_1 + B_k\mu_2 + \bar{A}_k\bar{\mu}_1 t_1^k + \bar{B}_k\bar{\mu}_2 t_2^k = -\beta_k,$$

где $t_k = (a + i\mu_k b)(a - i\mu_k b)^{-1}$ $(k = 1, 2)$. В дальнейшем предположим, что выполнены условия равновесия и что A_0, $B_0 = 0$.

Рассмотрим предельный переход при $\varepsilon \to 0$. Тогда l_1 стремится к нулю, а l_2 — к $d = \sqrt{d_{11}}$. Более точно,

$$l_1 = \varepsilon + O(\varepsilon^3),\ l_2 = d + O(\varepsilon^2).$$

Положим

$$A_k = a_k^\varepsilon + ib_k^\varepsilon,\ B_k = c_k^\varepsilon + id_k^\varepsilon,$$
$$\delta_1 = l_2(1 - t_2^k)(1 + t_1^k) - \varepsilon(1 - t_1^k)(1 + t_2^k),$$
$$\delta_2 = l_2(1 - t_1^k)(1 + t_2^k) - \varepsilon(1 + t_1^k)(1 - t_2^k).$$

Тогда

$$a_k^\varepsilon = \delta_1^{-1}[(1 + t_2^k)\operatorname{Im}\beta_k - l_2(1 - t_2^k)\operatorname{Re}\alpha_k],$$
$$c_k^\varepsilon = \delta_1^{-1}[\varepsilon(1 - t_1^k)\operatorname{Re}\alpha_k - (1 + t_1^k)\operatorname{Im}\alpha_k],$$
$$b_k^\varepsilon = -\delta_2^{-1}[(1 + t_2^k)\operatorname{Im}\alpha_k + (1 - t_2^k)\operatorname{Re}\beta_k],$$
$$d_k^\varepsilon = \delta_2^{-1}[(1 - t_1^k)\operatorname{Re}\beta_k + \varepsilon(1 + t_1^k)\operatorname{Im}\alpha_k].$$

Легко видеть, что a_k^ε, c_k^ε, d_k^ε имеют конечный предел при $\varepsilon \to 0$. Однако b_k^ε имеет порядок $O(\varepsilon^{-1})$. Положим $b_k^\varepsilon = -\varepsilon^{-1}m^\varepsilon$. Тогда m^ε сходится при $\varepsilon \to 0$ к величине m^0:

$$m^0 = \delta_3^{-1}[d(1 + t_2^k)\operatorname{Im}\alpha_k + (1 - t_2^k)\operatorname{Re}\beta_k],$$
$$\delta_3 = 2ba^{-1}kd(1 + t_2^k) - 2(1 - t_2^k).$$

Следовательно, асимптотическое разложение $\Phi_1(x_1 + i\varepsilon x_2)$ начинается со степени ε^{-1}; поэтому разложение по степеням ε, предложенное в [1], является некорректным. Действительно,

$$\Phi_1 = \sum_{k=2}^{\infty}(a_k^\varepsilon + ib_k^\varepsilon)[\operatorname{Re}P_{1k}(z_1) + i\operatorname{Im}P_{1k}(z_1)].$$

Тогда

$$\operatorname{Re}\Phi_1 = \sum^{\infty}(a_k^\varepsilon \operatorname{Re}P_{1k}(z_1) - b_k^\varepsilon \operatorname{Im}P_{1k}(z_1)), \tag{1.2}$$
$$\operatorname{Im}\Phi_1 = \sum_{k=2}^{\infty}(b_k^\varepsilon \operatorname{Re}P_{1k}(z_1) + a_k^\varepsilon \operatorname{Im}P_{1k}(z_1)).$$

Из (1.2) следует, что $\operatorname{Re}\Phi_1 = O(1)$, $\operatorname{Im}\Phi_1 = O(\varepsilon^{-1})$. Положим $P_{1k}(x) = -2\cos kt$, $t = \arccos x/a$. Тогда

$$P_{1k}(z_1) = P_{1k}(x) + i\varepsilon y P'_{1k}(x) + O(\varepsilon^2).$$

Здесь $P'_{1k}(x) = -2ka^{-1}\sin kt(\sin t)^{-1}$.

Предыдущие вычисления позволяют совершить предельный переход в формулах (1.2). Если w^0 — решение предельной задачи, то

$$w^0_{,x_1} = x_2\varphi_1'(x_1) + \varphi_2'(x_1) + \operatorname{Re}\Phi_2'(z_3),\quad z_3 = x_1 + idx_2,$$
$$w^0_{,x_2} = \varphi_1'(x_1) + \operatorname{Re} id\Phi_2'(z_3),$$

где

$$\varphi_1(x_1) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k \cos(k \arccos x_1/a);$$

$\varphi''_2(x_1)$ — первое слагаемое в формуле (1.2). Легко проверить, что граничные условия исходной задачи в пределе выполнены. Вычислим напряжение $\sigma_{22} = w_{,x_1x_1}$ в предельной задаче:

$$\sigma_{22} = x_2\varphi''_1(x_1) + \varphi''_2(x_1) + \operatorname{Re}\Phi''_2(z_3),$$
$$\varphi_1(x_1) = -\sum_{k=2}^{\infty} a_k(k\cos kt(\sin t)^{-2} - \sin kt\cos kt(\sin t)^{-3}).$$

Очевидно, что произведение $x_2\varphi_1''(x_1)$ имеет особенность $(x^2 - a^2)^{-1/2}$ при $x = +a$, $x = -a$. Нетрудно видеть, что в предельной задаче деформация $\varepsilon_{22} = 0$ и среда является нерастяжимой в направлении оси x_2. В пределе закон состояния примет вид

$$\sigma_{11} = d_{11}u_{1,x_1},\ \sigma_{12} = u_{1,x_2} + u_{2,x_1},\ \sigma_{22} = q + d_{12}u_{1,x_1},\ \varepsilon_{22} = 0.$$

Здесь $q(x_1, x_2)$ — новая неизвестная функция (реакция среды на ограничение нерастяжимости). Перемещения u_1, u_2 и функция q удовлетворяют системе уравнений

$$d_{11}u_{1,x_1x_1} + u_{1,x_2x_2} = 0,\ u_{2,x_2} = 0,$$

$$q_{x_2} + u_{2,x_1x_1} + (1 + d_{12})u_{1,x_1x_2} = 0,$$

с общим решением

(1.3) $$u_1 = \operatorname{Re}\Phi(x_1 + idx_2),\ u_2 = u_2(x_1),$$

$$q = -x_2u_{2,x_2x_2} - (1 + d_{12})\,u_{1,x_1} + \omega(x_1)$$

и зависит от трех неизвестных функций: ω, Φ, u_2. Отметим, что вблизи точек $x_1 = a$, $-a$ возникает так называемый «свободный» пограничный слой, и для построения равномерной всюду в замкнутой области решения исходной задачи к предельному решению необходимо добавить функции пограничного слоя.

Приведем еще один пример, показывающий некорректность прямого предельного перехода. Потенциал простого слоя в ограниченной односвязиой области Q с границей класса C^2 можно записать в форме [5]

(1.4) $$u_1 = \pi^{-1}\operatorname{Im}\oint_{\partial Q}\{[A_1\ln\sigma_1 + A_2\ln\sigma_2]m_1 + [B_1\ln\sigma_1 + B_2\ln\sigma_2]m_2\}ds,$$

$$u_2 = \pi^{-1}\operatorname{Im}\oint_{\partial Q}\{[B_1\ln\sigma_1 + B_2\ln\sigma_2]m_1 + [C_1\ln\sigma_1 + C_2\ln\sigma_2]m_2\}ds,$$

где m_1, m_2 — неизвестные плотности; $\sigma_1 = x_1 - \xi_1 + i\varepsilon(x_2 - \xi_2)$; $\sigma_2 = x_1 - \xi_1 + il_2(x_2 - \xi_2)$; $(\xi_1, \xi_2) \in \partial Q$; коэффициенты A_k, B_k, $C_k (k = 1, 2)$ имеют следующие порядки по ε:

$$A_1 = i(1 + d_{12})^2d_{11}^{-1}(\varepsilon^2 - d_{11})^{-1}\varepsilon^3,\ A_2 = id_{11}^{-1/2},$$

$$B_1 = \varepsilon^2(1 + d_{12})(\varepsilon^2 - d_{11})^{-1},\ B_2 = (1 + d_{12})d_{11}^{-1}\varepsilon^2,$$

$$C_1 = i\varepsilon,\ C_2 = i(1 + d_{12})^2d_{11}^{-1/2}(\varepsilon^2 - d_{11})^{-1}\varepsilon^4.$$

Напомним, что потенциал простого слоя решает первую основную задачу теории упругости (на границе задан вектор усилий) и имеет логарифмический рост на бесконечности. Если в (1.4) перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим $u_2 = 0$. Очевидно, что это решение не соответствует общему решению (1.3). Если проанализировать полученное выше решение для сплошного эллипса, то следует считать, что произведение $\varepsilon m_2(s) = \Phi_2(s)$ имеет конечный предел при $\varepsilon \to 0$, а тогда

$$u_1 = (\pi d)^{-1}\int_{\partial Q} m_1(s)\ln r_2 ds,\ u_1 = \pi^{-1}\int_{\partial Q^*}\Phi_2(s)\ln|x_1 - x_1(s)|ds,$$

$$r_2 = ((x_1 - x_1(s))^2 + d(x_2 - x_2(s))^2)^{1/2}$$

(∂Q^* — нехарактеристическая часть границы).

2. Жесткий штамп на упругой ортотропной полуплоскости. Эта задача хорошо изучена, и в дальнейшем нас интересует в основном предельный случай, когда полуплоскость нерастяжима в направлении оси x_2. При отсутствии трения граничные условия задачи запишем так:

$$\sigma_{22} = 0 \text{ при } x_2 = -0, \ |x_1| \geqslant a, \ u_2 = f(x_1) \ \text{ при } \ |x_1| \leqslant a; \tag{2.1}$$

$$\sigma_{12} = 0 \ \text{ при } \ x_2 = -0. \tag{2.2}$$

Интервал $(-a, a)$ является возможной областью контакта. В обозначениях [4] напряжения σ_{12}, σ_{22} и перемещение u_2 через комплексные потенциалы С.Г. Лехницкого выражаются следующим образом:

$$\sigma_{22} = 2\mathrm{Re}[\Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2)], \ \sigma_{12} = -2\mathrm{Re}[\mu_1\Phi_1(z_1) + \mu_2\Phi_2(z_2)],$$

$$u_2 = 2\mathrm{Re}[q_1\Phi_1(z_1) + q_2\Phi_2(z_2)], \ q_k = a_{12}\mu_k + a_{22}\mu_k^{-1}, \ k = 1, 2.$$

Приведем сначала решение исходной задачи в форме, удобной для дальнейшего анализа. Положим

$$\Phi_1(z_1) = (\pi i)^{-1}\mu_2(\mu_1 - \mu_2)^{-1} \int_{-a}^{a} p(x) \ln(x - z_1)dx,$$

$$\Phi_2(z_2) = -(\pi i)^{-1}\mu_1(\mu_1 - \mu_2)^{-1} \int_{-a}^{a} p(x) \ln (x - z_2)dx.$$

Тогда граничное условие (2.2) выполняется тождественно, а для определения неизвестной плотности $p(x)$ имеем интегральное уравнение

$$m \int_{-a}^{a} p(t) \ln|t - x|dt = f(x), \ m = \mathrm{Re}i(\mu_1 q_2 - \mu_1 q_2) (\mu_1 - \mu_2)^{-1}\pi^{-1}$$

с решением

$$p(x) = (\pi m)^{-1}(a^2 - x^2)^{-1/2}[\pi^{-1} \int_{-a}^{a} f(t) (a^2 - t^2)^{-1/2}(t - x)^{-1}dt - \pi P] =$$
$$= g(x)m^{-1}.$$

Предыдущие формулы позволяют полностью определить напряженно-деформированное состояние в нижней полуплоскости $x_2 \leqslant 0$.

Как и выше, рассмотрим предельную ситуацию, когда $\varepsilon \to 0$. В пределе получим (как и ранее, индекс нуль вверху означает предел величины при $\varepsilon \to 0$)

$$\dot{u}_2^0(x_1) = - \int_{-a}^{a} g(t)\ln|t - x_1|dt,$$

$$u_1^0(x_1, x_2) = -\mathrm{Re}(\pi d)^{-1} \int_{-a}^{a} g(t)\ln(t - z_3)dt, \ z_3 = x_1 + idx_2,$$

$$\sigma_{22}^0 = x_2\pi^{-1} \int_{-a}^{a} g(t) (t - x_1)^{-2}dt - \mathrm{Re}(\pi id)^{-1} \int_{-a}^{a} g(t) (t - z_3)^{-1}dt,$$

$$\sigma_{22}(x_1, -0) = (\pi d)^{-1}g(x).$$

Первый интеграл в формуле для σ_{22}^0 является гиперсингулярным и существует только в смысле конечной части по Адамару. Отметим, что $u_2^0 \approx C_1\ln|x_1|$ при большом $|x_1|$, $u_1(x_1, x_2) \approx C_2\ln r_2$ при большом r_2; при этом u_2^0 зависит только от x_1, а σ_{22}^0 растет по x_2 линейно; тем не менее давление под штампом конечно.

Для иллюстрации полученного выше решения рассмотрим два частных случая.

1. *Штамп с плоским основанием.* Положим $f(x_1) = c$. Тогда

$$u_2^0(x_1) = c \text{ при } |x_1| \leqslant a,$$

$$u_2^0 = -P[\ln(x_1 + (x_1^2 - a^2)^{1/2}) - \ln a] + c \text{ при } x_1 > a,$$

$$u_2^0 = P[\ln(x_1 + (x_1^2 - a^2)^{1/2}) - \ln a] + c \text{ при } x_1 < -a,$$

$$\sigma_{22}^0 = -\lambda_2 u_{2,x_2x_2} - \mathrm{Re}\,P(id(z_3^2 - a^2)^{1/2})^{-1}.$$

Если задана прижимающая штамп сила P_0, то $P_0 = P\pi d^{-1}$ и давление под штампом $p(x_1)$ дается классической формулой

$$p(x_1) = P_0\pi^{-1}(a^2 - x_1^2)^{-1/2}.$$

Заметим, что напряжение σ_{22}^0 на продолжении штампа имеет особенность $(x_1^2 - a^2)^{-3/2}$, отсутствующую в классической задаче. Причины этого объяснены ниже.

2. *Штамп с закругленным основанием.* Положим, как всегда, $f(x_1) = x_1^2(2R)^{-1}$, где R — радиус закругления. Тогда

$$u_2^0(x_1) = x_1^2(2R)^{-1} \text{ при } |x_1| \leqslant a,$$

$$u_2(x_1) = -P[\ln(x_1 + (x_1^2 - a^2)^{1/2}) - \ln a] + x_1^2(2R)^{-1} - x_1(2R)^{-1}(x_1^2 - a^2)^{1/2}$$

при $x_1 > a$, аналогичная формула имеет место при $x_1 < -a$,

$$\sigma_{22}^0(x_1, -0) = -d^{-1}(a^2 - x_1^2)^{-1/2}[-P + R^{-1}(x_1^2 - 2^{-1}a^2)], \quad |x_1| \leqslant a.$$

Решение физически возможно, если давление под штампом неотрицательно, т.е. если $P \geqslant a^2(2R)^{-1}$. Если P не удовлетворяет этому условию, значит, сила P недостаточна для того, чтобы вдавить штамп до полного соприкосновения с упругим телом. В этом случае, как обычно [6, 7], для определения области контакта необходимо использовать требование обращения в нуль контактного давления на концах области контакта. Обратим внимание на то обстоятельство, что, как и в предыдущем случае, σ_{22}^0 при $|x| > a$ имеет особенность $(x^2 - a^2)^{-3/2}$.

Появление этой особенности у напряжения σ_{22}^0 связано с тем обстоятельством, что при $\varepsilon \ll 1$ исходная задача сингулярно возмущена, и потому вблизи точек $x_1 = \pm a$ возникает «свободный» пограничный слой. Здесь построен только нулевой член асимптотики; для построения равномерной асимптотики к этому решению необходимо добавить функции пограничного слоя.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Космодамианский А.С.** Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями. — Киев; Донецк: Вища шк., 1976.
2. **Маневич Л.И., Павленко А.В., Коблик С.Г.** Асимптотические методы в теории упругости ортотропного тела. — Киев; Донецк: Вища шк., 1982.
3. **Боган Ю.А.** Асимптотическое поведение краевых задач для упругого кольца, армированного очень жесткими волокнами // ПМТФ. — 1980. — № 6. — С. 118—122.
4. **Лехницкий С.Г.** Анизотропные пластинки. — М.: Гостехиздат, 1957.
5. **Купрадзе В.Д.** Методы потенциала в теории упругости. — М.: Физматгиз, 1963.
6. **Галин Л.А.** Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. — М.: Наука, 1980.
7. **Мусхелишвили Н.И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М.: Наука, 1966.

г. Новосибирск *Поступила 28/IV 1993 г.*