УДК 519.642

К численному решению одного класса систем полиномиальных уравнений Вольтерра I рода*

С.В. Солодуша

Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева Сибирского отделения Российской академии наук, ул. Лермонтова, 130, Иркутск, 664033

E-mail: solodusha@isem.irk.ru

Солодуша С.В. К численному решению одного класса систем полиномиальных уравнений Вольтерра I рода // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние.— Новосибирск, 2018.— Т. 21, № 1.— С. 117–126.

В статье рассматривается некоторый класс систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго порядка, связанный с задачей автоматического управления динамическим объектом с векторными входом и выходом. Рассмотрен численный способ решения, основанный на применении метода Ньютона–Канторовича. С целью проверки эффективности разработанных алгоритмов проведены серии тестовых расчетов.

DOI: 10.15372/SJNM20180108

Ключевые слова: *системы полиномиальных интегральных уравнений Вольтерра I рода, численное решение, метод Ньютона–Канторовича.*

Solodusha S.V. To the numerical solution of one class of systems of the Volterra polynomial equations of the first kind // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci.— Novosibirsk, 2018.— Vol. 21, № 1.— P. 117–126.

In this paper, we consider a class of second order systems of the Volterra nonlinear integral equations. This class is related to the automatic control problem of a dynamic object with vector inputs and outputs. A numerical solution technique based on the Newton–Kantorovich method is considered. To verify the efficiency of the algorithms developed, a series of test calculations were carried out.

Keywords: *systems of the polynomial Volterra equations of the first kind, numerical solution, Newton–Kantorovich method.*

Введение

Для решения проблем описания функционирования динамических систем в условиях априорной неопределенности разработано довольно много методов [1]. Краткий анализ современных методов идентификации нелинейных систем, включающий достоинства и недостатки использования нейронных сетей, генетических алгоритмов, алгоритмов самоорганизации, а также алгоритмов на базе функциональных рядов Винера и Вольтерра, представлен в работе [2]. Согласно [2, 3], аппарат интегро-степенных рядов Вольтерра [4] является наиболее предпочтительным для описания динамики систем типа "вход–выход", так как он применим для различных режимов исследуемого объекта и может взаимодействовать с широким классом технических объектов. В теории моделирования систем управления традиционно используется аппарат дифференциальных уравнений. Тем не менее разработка альтернативных методов моделирования, связанных с приложением

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-01-01425а).

интегральных уравнений типа Вольтерра, является актуальной прикладной задачей (см., например, [5]).

Одна из традиционных задач автоматического управления нестационарным динамическим объектом типа черного ящика при отсутствии обратной связи — определение входного сигнала $x(t)$, которому соответствует заданный (желаемый) отклик $y(t)$.

В математическом плане данная проблема может быть сведена к решению полиномиального (N-степенного) уравнения Вольтерра I рода

$$\sum_{m=1}^{N} \int_0^t \cdots \int_0^t K_m(t, s_1, \ldots, s_m) \prod_{i=1}^{m} x(s_i)\, ds_i = y(t), \tag{1}$$

$t \in [0, T]$, где $x(t)$ — скалярная функция времени, ядра Вольтерра K_m, симметричные по переменным $s_1, \ldots, s_m$, и отклик $y(t)$ считаются заданными. При $N = 1$ вместо (1) имеем стандартное линейное уравнение Вольтерра I рода

$$\int_0^t K_1(t, s) x(s)\, ds = y(t), \quad t \in [0, T]. \tag{2}$$

Общеизвестно, что линейное уравнение (2) в предположении, что $K_1'(t, s) \in C_\Delta$, $\Delta = \{t, s / 0 \le s \le t \le T\}$, $K_1(t, t) \ne 0$ для всех $t \in [0, T]$, $y(0) = 0$, $y'(t) \in C_{[0,T]}$, имеет единственное решение $x(t) \in C_{[0,T]}$ при любом $T < \infty$.

В работах [6–9] дан обзор теории и численных методов решения уравнений вида (1) при $N = 2, 3$, наиболее часто встречающихся на практике. Основная специфика полиномиального уравнения (1) при $N > 1$ состоит в локальности T^* — области существования (единственного) непрерывного решения.

Во многих приложениях $x(t)$ является вектор-функцией. Пусть, например, $x(t) = (x_1, x_2)^\top$, $y(t) = (y_1, y_2)^\top$. Тогда вместо (1) имеем

$$\sum_{m=1}^{N} \sum_{1 \le i_1 \le \cdots \le i_m \le 2} \int_0^t \cdots \int_0^t K^{(p)}_{i_1,\ldots,i_m}(t, s_1, \ldots, s_m) \prod_{j=1}^{m} x_{i_j}(s_j)\, ds_j = y_p(t), \tag{3}$$

где $p = 1, 2$, $t \in [0, T]$, переходные характеристики $K^{(p)}_{i_1,\ldots,i_m}$ — симметричны по переменным, соответствующим совпадающим индексам $i_1, \ldots, i_m$. В данной работе показана специфика применения метода Ньютона–Канторовича [10] для численного решения системы полиномиальных уравнений вида (3).

1. Постановка задачи

На практике обычно ограничиваются случаем $N \le 3$. Именно системам полиномиальных интегральных уравнений Вольтерра I рода второй и третьей степени посвящена данная статья.

Для простоты рассмотрим тестовый случай постоянных ядер в (3), когда $K^{(p)}_{i_1,\ldots,i_m}(t, s_1, \ldots, s_m) = K^{(p)}_{i_1,\ldots,i_m}$:

$$\sum_{m=1}^{N}\sum_{1\le i_1\le\dots\le i_m\le 2} K^{(p)}_{i_1,\dots,i_m}\prod_{j=1}^{m}\int_0^t x_{i_j}(s_j)\,ds_j = y_p(t), \tag{4}$$

где $y_p(0) = 0$, $y'_p(t) \in C_{[0,T]}$, определитель блочной матрицы $(\mathcal{K}_1\mathcal{K}_2)$ — не нулевой $(|\mathcal{K}_1\,\mathcal{K}_2| \neq 0)$. Для удобства примем следующие обозначения:

$$\mathcal{K}_p = \left(K^{(1)}_p,\, K^{(2)}_p\right)^\top, \qquad \mathcal{K}_{pq} = \mathcal{K}_{qp} = \left(K^{(1)}_{pq}, K^{(2)}_{pq}\right)^\top, \quad p,q = 1,2.$$

Всюду далее считаем все функции и функциональные пространства вещественными. Замена искомой функции в (4):

$$\theta_1(t) = \int_0^t x_1(s)\,ds, \qquad \theta_2(t) = \int_0^t x_2(s)\,ds$$

позволяет свести исходную задачу к поиску непрерывного решения $\Theta^*(t) = (\theta^*_1(t), \theta^*_2(t))^\top$ системы полиномиальных уравнений:

$$\Phi(\Theta) = (\Phi_1(\Theta), \Phi_2(\Theta)) = 0, \tag{5}$$

второй степени (при $N = 2$)

$$\Phi_p(\theta_1(t), \theta_2(t)) \equiv \sum_{i=1}^{2} K^{(p)}_i \theta_i(t) + \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{i} K^{(p)}_{ji}\theta_i(t)\theta_j(t) - y_p(t) \tag{6}$$

и третьей степени (при $N = 3$)

$$\begin{aligned}\Phi_p(\theta_1(t), \theta_2(t)) \equiv \sum_{i=1}^{2} K^{(p)}_i \theta_i(t) + \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{i} K^{(p)}_{ji}\theta_i(t)\theta_j(t) &+ \\ \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{j} K^{(p)}_{kji}\theta_i(t)\theta_j(t)\theta_k(t) - y_p(t).&\end{aligned} \tag{7}$$

В статье [11] получены аналитическое решение системы (5), (6) и его численная аппроксимация квадратурными методами (правых и средних прямоугольников) путем сведения системы к уравнению четвертого порядка. Как известно, итерационный метод Ньютона нахождения корней алгебраических уравнений с успехом применим для решения нелинейных интегральных уравнений (см., например, [12, 13]). Требуется построить алгоритм приближенного решения систем (5), (6) и (5), (7) на базе метода Ньютона–Канторовича.

2. Численный метод

Итерационный процесс решения (5) методом Ньютона–Канторовича имеет вид

$$\Phi'(\Theta_{m-1})\,(\Theta_m - \Theta_{m-1}) + \Phi(\Theta_{m-1}) = 0, \quad m = 1, 2, \dots .$$

Производная $\Phi'(\Theta_{m-1})$ нелинейного оператора $\Phi(\Theta)$ в точке Θ_{m-1} определяется матрицей

$$\begin{pmatrix} \partial\Phi_1/\partial\theta_1 \mid_{(\theta_{1_{m-1}},\theta_{2_{m-1}})} & \partial\Phi_1/\partial\theta_2 \mid_{(\theta_{1_{m-1}},\theta_{2_{m-1}})} \\ \partial\Phi_2/\partial\theta_1 \mid_{(\theta_{1_{m-1}},\theta_{2_{m-1}})} & \partial\Phi_2/\partial\theta_2 \mid_{(\theta_{1_{m-1}},\theta_{2_{m-1}})} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, имеем

$$\partial\Phi_p/\partial\theta_1 \mid_{(\theta_{1_{m-1}},\theta_{2_{m-1}})}(\Delta\theta_1(t)) + \partial\Phi_p/\partial\theta_2 \mid_{(\theta_{1_{m-1}},\theta_{2_{m-1}})}(\Delta\theta_2(t)) - \Phi_p\left(\theta_{1_{m-1}}(t),\theta_{2_{m-1}}(t)\right), \quad (8)$$

где $\Delta\theta_1(t)=\theta_{1_m}(t)-\theta_{1_{m-1}}(t)$, $\Delta\theta_2(t)=\theta_{2_m}(t)-\theta_{2_{m-1}}(t)$. В качестве начального приближения $\Theta_0=(\theta_{1_0}(t),\theta_{2_0}(t))^\top$ выберем решение системы (5) при $N=1$:

$$\theta_{1_0}(t)=\frac{|y(t)\,\mathcal{K}_2|}{|\mathcal{K}_1\,\mathcal{K}_2|}, \qquad \theta_{2_0}(t)=\frac{|\mathcal{K}_1\,y(t)|}{|\mathcal{K}_1\,\mathcal{K}_2|}.$$

Окончательно система (8) принимает вид:

$$a_{p_m}(t)\theta_{1_m}(t)+b_{p_m}(t)\theta_{2_m}(t)=c_{p_m}(t), \quad (9)$$
$$a_{p_m}(t)=K_1^{(p)}+2K_{11}^{(p)}\theta_{1_{m-1}}(t)+K_{12}^{(p)}\theta_{2_{m-1}}(t),$$
$$b_{p_m}(t)=K_2^{(p)}+2K_{22}^{(p)}\theta_{2_{m-1}}(t)+K_{12}^{(p)}\theta_{1_{m-1}}(t),$$
$$c_{p_m}(t)=y_p(t)+K_{11}^{(p)}\theta_{1_{m-1}}^2(t)+K_{22}^{(p)}\theta_{2_{m-1}}^2(t)+K_{12}^{(p)}\theta_{1_{m-1}}(t)\theta_{2_{m-1}}(t),$$

если $\Phi_p(\theta_1(t),\theta_2(t))$ определяется равенством (6), и

$$A_{p_m}(t)\theta_{1_m}(t)+B_{p_m}\theta_{2_m}(t)=C_{p_m}(t), \quad (10)$$
$$A_{p_m}(t)=a_{p_m}(t)+3K_{111}^{(p)}\theta_{1_{m-1}}^2(t)+2K_{112}^{(p)}\theta_{2_{m-1}}(t)\theta_{1_{m-1}}(t)+K_{122}^{(p)}\theta_{2_{m-1}}^2(t),$$
$$B_{p_m}(t)=b_{p_m}(t)+3K_{222}^{(p)}\theta_{2_{m-1}}^2(t)+2K_{122}^{(p)}\theta_{1_{m-1}}(t)\theta_{2_{m-1}}(t)+K_{112}^{(p)}\theta_{1_{m-1}}^2(t),$$
$$C_{p_m}(t)=c_{p_m}(t)+2K_{112}^{(p)}\theta_{1_{m-1}}^2(t)\theta_{2_{m-1}}(t)+_{122}^{(p)}\theta_{1_{m-1}}(t)\theta_{2_{m-1}}^2(t)+$$
$$2K_{111}^{(p)}\theta_{1_{m-1}}^3(t)+2K_{222}^{(p)}\theta_{2_{m-1}}^3(t),$$

если $\Phi_p(\theta_1(t),\theta_2(t))$ из (7).

Очевидно, что единственность корней $(\theta_{1_m}(t),\ \theta_{2_m}(t))$ линейных систем (9) (или (10)) на каждой m–й итерации обеспечивается выполнением условий $D_m(t)=a_{1_m}(t)b_{2_m}(t)-a_{2_m}(t)b_{1_m}(t)\neq 0$ (или $D_m(t)=A_{1_m}(t)B_{2_m}(t)-A_{2_m}(t)B_{1_m}(t)\neq 0$). Таким образом, значение $t=T^*$ есть наименьший элемент из множества $M=\{t : D_m(t)=0,\ t\geq 0,\ m=1,2,\ldots\}$.

Замечание 1. Эквивалентная (5) при $N=2$ задача Коши имеет вид [11]:

$$\dot\theta_1(t)=\frac{|y'(t)\ \mathcal{K}_2|+|y'(t)\ \mathcal{K}_{12}|\,\theta_1(t)+2\,|y'(t)\ \mathcal{K}_{22}|\,\theta_2(t)}{Q_1(\theta_1(t),\theta_2(t))}, \quad (11)$$

$$\dot\theta_2(t)=\frac{|y'(t)\ \mathcal{K}_1|+|y'(t)\ \mathcal{K}_{12}|\,\theta_2(t)+2\,|y'(t)\ \mathcal{K}_{11}|\,\theta_1(t)}{Q_2(\theta_1(t),\theta_2(t))}, \quad (12)$$

где

$$Q_p(\theta_1(t),\theta_2(t))=|\mathcal{K}_p\ \mathcal{K}_q|+2(-1)^p\left(-|\mathcal{K}_{11}\ \mathcal{K}_{12}|\,,|\mathcal{K}_{22}\ \mathcal{K}_{12}|\right)\Theta^\top(t)\Theta(t)-$$
$$4\,|\mathcal{K}_{qq}\ \mathcal{K}_{pp}|\,\theta_1(t)\theta_2(t)+2(-1)^p\left(|\mathcal{K}_2\ \mathcal{K}_{11}|\,,-|\mathcal{K}_1\ \mathcal{K}_{22}|\right)\Theta(t)+$$
$$(-1)^p\left(-|\mathcal{K}_1\ \mathcal{K}_{12}|\,,|\mathcal{K}_2\ \mathcal{K}_{12}|\right)\Theta(t), \quad p,q=1,2, \quad p\neq q; \quad (13)$$
$$\theta_1(0)=0, \qquad \theta_2(0)=0, \qquad t\in[0,T^{**}).$$

Здесь T^{**} — минимальный положительный корень $Q_p(\theta_1^*(t),\theta_2^*(t))=0$. Для иллюстрации специфики (9) и (11)–(13) приведем следующий пример.

Пример 1. Пусть в (4) $N = 2$, $K_1^{(1)} = K_2^{(1)} = K_1^{(2)} = 1$, $K_2^{(2)} = 2$, $K_{22}^{(1)} = \frac{1}{4}$, $K_{22}^{(2)} = -\frac{1}{2}$, $K_{11}^{(1)} = K_{12}^{(1)} = -1$, $K_{11}^{(2)} = K_{12}^{(2)} = \frac{1}{2}$.

Зададим

$$y_1(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} - \frac{t^5}{6} + \frac{t^6}{36}, \qquad y_2(t) \ = \ \frac{t^2}{2} + \frac{2t^3}{3} + \frac{t^4}{8} + \frac{t^5}{12} - \frac{t^6}{18}.$$

С помощью системы компьютерной алгебры MAPLE находим решение $\theta_1^*(t) = \frac{t^2}{2}$, $\theta_2^*(t) = \frac{t^3}{3}$ и соответственно $x_1^*(t) = t$, $x_2^*(t) = t^2$. Начальные приближения:

$$\theta_{1_0}(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{5t^4}{8} - \frac{5t^5}{12} + \frac{t^6}{9}, \qquad \theta_{2_0}(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{3t^4}{8} + \frac{t^5}{4} - \frac{t^6}{12}.$$

Согласно (13),

$$Q_p(\theta_1^*(t), \theta_2^*(t)) = 1 - \frac{7t^2}{4} - \frac{4t^3}{3} + \frac{t^5}{4} + \frac{t^6}{12},$$

так что $T^{**} = 0.630578$.

Результаты решения системы (9) приведены в таблице 1, где m — число итераций, t_m^* — корни уравнений $D_m(t) = 0$, $\|\varepsilon_{p,t_k}\| = \max_{0 \le t \le t_k} \left|\theta_{p_m}(t) - \theta_p^*(t)\right|$, $t_1 = 0.58$, $t_2 = 0.6$ (здесь и далее все вычисления проводились с двойной точностью).

Таблица 1

m	t_m^*	$\|\varepsilon_{1,\,t_1}\|$	$\|\varepsilon_{2,\,t_1}\|$	$\|\varepsilon_{1,\,t_2}\|$	$\|\varepsilon_{2,\,t_2}\|$
1	0.69103	0.01997	0.01195	0.03193	0.01933
2	0.68541	0.00132	0.00079	0.00437	0.00264
3	0.68499	$6{\cdot}10^{-6}$	$4{\cdot}10^{-6}$	0.00011	0.00007
4	0.68488	$2{\cdot}10^{-10}$	$1{\cdot}10^{-10}$	$7{\cdot}10^{-8}$	$4{\cdot}10^{-8}$

Из табл. 1 видно, что итерационный алгоритм с выбранными начальными приближениями сходится к точному значению. Вычислительный эксперимент показал увеличение погрешности ε_{p,t_k} по мере приближения t_k к значению T^*.

Было получено, что определитель $D_m(t)$ системы (8) аппроксимирует функцию $Q(t) \equiv Q_p(\theta_1^*(t), \theta_2^*(t))$ на отрезке $t \in [0, T^{**})$. Результаты сравнения этих функций, определяющих область существования непрерывного решения, приведены в табл. 2.

Таблица 2

m	t^{**}	$\|\hat{\varepsilon}_{t_1}\|$	$\|\hat{\varepsilon}_{t_2}\|$	$\|\hat{\varepsilon}_{t_3}\|$
2	0.64457	0.02408	0.03764	0.06082
3	0.63424	0.00161	0.00526	0.01959
4	0.63149	0.00001	0.00013	0.00346
5	0.63083	$2{\cdot}10^{-10}$	$8{\cdot}10^{-8}$	0.00015

Здесь t^{**} — корень уравнения $D_m'(t) = 0$ при фиксированном значении m, $\left\|\hat{\varepsilon}_{t_k}\right\| = \max_{0 \le t \le t_k} |D_m(t) - Q(t)|$, $t_3 = 0.62$. Из табл. 2 видно, что значение t^{**} с увеличением числа итераций m приближается к значению T^{**}.

Замечание 2. В частном случае, когда один из входных сигналов известен, решение системы (5) сводится к решению двух полиномиальных интегральных уравнений Вольтерра I рода. В частности, при заданном $x_2(t)$, вместо (9) и (10) используем соответственно

$$\theta_{1_m}(t) = \frac{\Omega_{m-1}(t)}{K_1^{(p)} + K_{12}^{(p)}\theta_2(t) + 2K_{11}^{(p)}\theta_{1_{m-1}}(t)}, \tag{14}$$

$$\Omega_{m-1}(t) = K_{11}^{(p)}\theta_{1_{m-1}}^2(t) - K_2^{(p)}\theta_2(t) - K_{22}^{(p)}\theta_2^2(t) + y_p(t),$$

с начальным приближением

$$\theta_{1_0}(t) = \frac{y_p(t) - K_2^{(p)}\theta_2(t) - K_{22}^{(p)}\theta_2^2(t)}{K_1^{(p)} + K_{12}^{(p)}\theta_2(t)}$$

и

$$\theta_{1_m}(t) = \frac{\Psi_{m-1}(t)}{\alpha(t) + 2\left(K_{11}^{(p)} + K_{112}^{(p)}\theta_2(t)\right)\theta_{1_{m-1}}(t) + 3K_{111}^{(p)}\theta_{1_{m-1}}^2(t)}, \tag{15}$$

$$\alpha(t) = K_1^{(p)} + K_{12}^{(p)}\theta_2(t) + K_{122}^{(p)}\theta_2^2(t),\ \Psi_{m-1}(t) = 2K_{111}^{(p)}\theta_{1_{m-1}}^3(t) +$$

$$\left(K_{11}^{(p)} + K_{112}^{(p)}\theta_2(t)\right)\theta_{1_{m-1}}^2(t) - K_2^{(p)}\theta_2(t) - K_{22}^{(p)}\theta_2^2(t) - K_{222}^{(p)}\theta_2^3(t) + y_p(t),$$

с начальным приближением

$$\theta_{1_0}(t) = \frac{y_p(t) - K_2^{(p)}\theta_2(t) - K_{22}^{(p)}\theta_2^2(t) - K_{222}^{(p)}\theta_2^3(t)}{K_1^{(p)} + K_{12}^{(p)}\theta_2(t) + K_{122}^{(p)}\theta_2^2(t)}.$$

Проиллюстрируем полученные формулы на примерах.

Пример 2. Пусть в (6) $K_1^{(1)} = 1$, $K_2^{(1)} = K_{11}^{(1)} = K_{22}^{(1)} = K_{12}^{(1)} = -1$, $\theta_2(t) = t$, $y_1(t) = t$. Тогда $\theta_1^*(t) = \frac{1 - t - \sqrt{-3t^2 - 10t + 1}}{2}$, $\theta_{1_0}(t) = \frac{2t + t^2}{1 - t}$, $t \in [0, T^*)$, $T^* = \frac{2\sqrt{7} - 5}{3}$.

В табл. 3 представлены результаты вычислений с помощью (14) при $t_k = 0.09$, где $\|\varepsilon_{t_k}\| = \max_{0 \le t \le t_k} \|\theta_{1_m}(t) - \theta_1^*(t)\|$, $\|\tilde{\varepsilon}_{t_k}\| = \max_{0 \le t \le t_k} \left\|\tilde{\theta}_{1_m}(t) - \theta_1^*(t)\right\|$. Здесь и далее значения $\tilde{\theta}_{1_m}(t_k)$ были получены с помощью модифицированного метода Ньютона–Канторовича.

Таблица 3

m	$\theta_{1_m}(t_k)$	$\|\varepsilon_{t_k}\|$	$\tilde{\theta}_{1_m}(t_k)$	$\|\tilde{\varepsilon}_{t_k}\|$
1	0.29274	$0.24690 \cdot 10^{-1}$	0.29274	$0.24690 \cdot 10^{-1}$
2	0.31555	$0.18785 \cdot 10^{-2}$	0.30765	$0.97829 \cdot 10^{-2}$
3	0.31742	$0.12652 \cdot 10^{-4}$	0.31326	$0.41700 \cdot 10^{-2}$
4	0.31743	$0.58175 \cdot 10^{-11}$	0.31561	$0.18246 \cdot 10^{-2}$

Пример 3. Пусть в (7) $K_1^{(1)} = 1$, $K_2^{(1)} = K_{11}^{(1)} = K_{22}^{(1)} = K_{12}^{(1)} = K_{111}^{(1)} = K_{222}^{(1)} = K_{112}^{(1)} = K_{122}^{(1)} = -1$, $\theta_2(t) = t$, $y_1(t) = -t - \frac{t^2}{2} - \frac{3t^3}{2} - \frac{3t^4}{4} - \frac{t^5}{4} - \frac{t^6}{8}$, $t \in [0, 0.4]$. Тогда $\theta_1^*(t) = \frac{t^2}{2}$, начальное приближение $\theta_{1_0}(t) = \frac{t^2\left(-4 + 4t + 6t^2 + 2t^3 + t^4\right)}{8(-1 + t + t^2)}$. Расчеты, иллюстрирующие (15) при $t_k = 0.35$, даны в табл. 4.

Таблица 4

m	$\theta_{1_m}(t_k)$	$\|\varepsilon_{t_k}\|$	$\tilde{\theta}_{1_m}(t_k)$	$\|\tilde{\varepsilon}_{t_k}\|$
1	$0.60850{\cdot}10^{-1}$	$0.39984{\cdot}10^{-3}$	$0.60850{\cdot}10^{-1}$	$0.39984{\cdot}10^{-3}$
2	$0.61249{\cdot}10^{-1}$	$0.69606{\cdot}10^{-8}$	$0.61219{\cdot}10^{-1}$	$0.31321{\cdot}10^{-4}$
3	$0.61250{\cdot}10^{-1}$	$0.21179{\cdot}10^{-13}$	$0.61248{\cdot}10^{-1}$	$0.24998{\cdot}10^{-5}$
4	$0.61250{\cdot}10^{-1}$	0	$0.61250{\cdot}10^{-1}$	$0.19981{\cdot}10^{-8}$

3. Дискретизация метода

Введем сетку узлов $t_i = ih$, $i = \overline{1,n}$, $nh = T$, причем считаем, что $T < T^*$, чтобы обеспечить существование непрерывного решения системы. Аппроксимируя интегралы, например в (9), квадратурами правых прямоугольников, запишем сеточный аналог для вычисления $x^h_{1_m}(t_i)$ и $x^h_{2_m}(t_i)$:

$$h\,a_{p_m}(t_i)x^h_{1_m}(t_i)+h\,b_{p_m}(t_i)x^h_{2_m}(t_i) = c_{p_m}(t_i)-a_{p_m}(t_i)h\sum_{j=1}^{i-1}x^h_{1_m}(t_j)-b_{p_m}(t_i)h\sum_{j=1}^{i-1}x^h_{2_m}(t_j), \tag{16}$$

где

$$a_{p_m}(t_i) = K_1^{(p)} + 2K_{11}^{(p)}h\sum_{j=1}^{i}x^h_{1_{m-1}}(t_j) + K_{12}^{(p)}h\sum_{j=1}^{i}x^h_{2_{m-1}}(t_j),$$

$$b_{p_m}(t_i) = K_2^{(p)} + 2K_{22}^{(p)}h\sum_{j=1}^{i}x^h_{2_{m-1}}(t_j) + K_{12}^{(p)}h\sum_{j=1}^{i}x^h_{1_{m-1}}(t_j),$$

$$c_{p_m}(t_i) = y_p(t_i) + K_{11}^{(p)}h^2\left(\sum_{j=1}^{i}x^h_{1_{m-1}}(t_j)\right)^2 + K_{22}^{(p)}h^2\left(\sum_{j=1}^{i}x^h_{2_{m-1}}(t_j)\right)^2 + K_{12}^{(p)}h^2\left(\sum_{j=1}^{i}x^h_{1_{m-1}}(t_j)\right)\left(\sum_{j=1}^{i}x^h_{2_{m-1}}(t_j)\right).$$

Очевидно, что при $h \to 0$ выполняются условия

$$x^h_{1_m} \to x_1(0) = \frac{|y'(0)\ \mathcal{K}_2|}{|\mathcal{K}_1\ \mathcal{K}_2|}, \qquad x^h_{2_m} \to x_2(0) = \frac{|\mathcal{K}_1\ y'(0)|}{|\mathcal{K}_1\ \mathcal{K}_2|}.$$

В табл. 5 приведены результаты расчетов $x^h_{1_i} = x^h_{1_m}(t_i)$, $x^h_{2_i} = x^h_{2_m}(t_i)$ для примера 1 при фиксированном значении $m = 3$ с $h = 0.01$ и $h = 0.001$ с помощью (16).

Появление погранслоя при $t_i \to 0.7$ — следствие нарушения неравенства $T < T^*$. Если, например, ограничиться значением $t_k = t_2$, то $\left\|\check{\varepsilon}_1^{h=0.01}\right\|_{C_h} = 0.0050001$, $\left\|\check{\varepsilon}_1^{h=0.001}\right\|_{C_h} = 0.0005001$, $\left\|\check{\varepsilon}_2^{h=0.01}\right\|_{C_h} = 0.0049666$, $\left\|\check{\varepsilon}_2^{h=0.001}\right\|_{C_h} = 0.0004996$ и линейная сходимость имеет место.

Таблица 5

t_i	$x_{1_i}^{h=0.01}$	$x_{2_i}^{h=0.01}$	$x_{1_i}^{h=0.001}$	$x_{2_i}^{h=0.001}$
0.1	0.09500	0.00903	0.09950	0.00990
0.2	0.19500	0.03803	0.19950	0.03980
0.3	0.29500	0.08703	0.29950	0.08970
0.4	0.39500	0.15603	0.39950	0.15960
0.5	0.49500	0.24503	0.49950	0.24950
0.6	0.58667	0.35907	0.58428	0.36862
0.7	239.442	−152.023	−27.3195	18.7467

Сходимость квадратурных методов правых и средних прямоугольников для (10) иллюстрирует следующий пример.

Пример 4. Пусть в (4) $N = 3$. Доопределим набор ядер из примера 1 значениями $K_{111}^{(p)} = K_{222}^{(p)} = K_{112}^{(p)} = K_{122}^{(p)} = (-1)^{p-1}$, $p = 1, 2$. Зададим

$$y_1(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} - \frac{t^6}{9} - \frac{t^7}{12} + \frac{t^8}{64} + \frac{t^9}{27} + \frac{t^{10}}{36} + \frac{t^{11}}{48} + \frac{t^{12}}{64},$$

$$y_2(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{18} + \frac{t^7}{24} - \frac{t^8}{32} - \frac{t^9}{27} - \frac{t^{10}}{36} - \frac{t^{11}}{48} - \frac{t^{12}}{64}.$$

В табл. 6 приведены значения погрешностей $\left\|\check{\varepsilon}_p^h\right\|_{C_h} = \max_{0\le t_i\le t_k} |x_p(t_i) - x_p^*(t_i)|$, $\left\|\bar{\varepsilon}_p^h\right\|_{C_h} = \max_{0\le t_i\le t_k} \left|x_p\big(t_{i-\frac{1}{2}}\big) - x_p^*\big(t_{i-\frac{1}{2}}\big)\right|$ сеточных решений тестовой системы, где $x_1^* = t^2$, $x_2^* = t^3$, $t_k = 0.3$.

Таблица 6

m	h_1	$\\|\check{\varepsilon}_1^{h_1}\\|$	$\\|\check{\varepsilon}_2^{h_1}\\|$	h_2	$\\|\bar{\varepsilon}_1^{h_2}\\|$	$\\|\bar{\varepsilon}_2^{h_2}\\|$
1	0.1	$0.2667\cdot10^{-1}$	$0.1075\cdot10^{-1}$	0.1	$0.8330\cdot10^{-3}$	$0.6252\cdot10^{-3}$
	0.025	$0.7293\cdot10^{-2}$	$0.3191\cdot10^{-2}$	0.05	$0.2077\cdot10^{-3}$	$0.1722\cdot10^{-3}$
	0.01	$0.2968\cdot10^{-2}$	$0.1319\cdot10^{-2}$	0.025	$0.5115\cdot10^{-4}$	$0.4539\cdot10^{-4}$
2	0.1	$0.2667\cdot10^{-1}$	$0.1075\cdot10^{-1}$	0.1	$0.8333\cdot10^{-3}$	$0.6250\cdot10^{-3}$
	0.025	$0.7292\cdot10^{-2}$	$0.3191\cdot10^{-2}$	0.05	$0.2083\cdot10^{-3}$	$0.1719\cdot10^{-3}$
	0.01	$0.2967\cdot10^{-2}$	$0.1320\cdot10^{-2}$	0.025	$0.5208\cdot10^{-4}$	$0.4492\cdot10^{-4}$

Видно, что методы правых и средних прямоугольников на каждой итерации m имеют порядок сходимости $\mathcal{O}(h)$ и $\mathcal{O}(h^2)$ соответственно.

4. Заключение

Работа продолжает исследования, начатые в [11]. Системы второго порядка уравнений Вольтерра I рода второй и третьей степени, рассмотренные в статье, связаны с задачей автоматического управления нелинейным динамическим объектом. Разработаны алгоритмы численного решения, которые основаны на применении метода Ньютона–Канторовича, метода правых и средних прямоугольников. Начальные приближения определяются в виде решений соответствующей линейной системы уравнений Вольтерра I рода. Проведены серии тестовых расчетов. Дальнейшее развитие работы связано с исследованием нелинейных процессов, протекающих в элементе теплообменного аппарата с независимым подводом тепла [14].

Литература

1. **Giannakins G.B., Serpedin E.** A bibliography on nonlinear system identification // Signal Processing. — 2001. — Vol. 81. — P. 533–580.

2. **Цибизова Т.Ю.** Методы идентификации нелинейных систем управления // Современные проблемы науки и образования. — 2015. — № 1 (часть 1). — С. 109–116. — https://www.science-education.ru/ru/article/view?id=17910.

3. **Волков Н.В**. Функциональные ряды в задачах динамики автоматизированных систем. — М.: Янус-К., 2001.

4. **Volterra V.** A Theory of Functionals, Integral and Integro-Differential Equations. — New York: Dover Publ., 1959.

5. **Brunner H.** Volterra Integral Equations: an Introduction to Theory and Applications. — Cambridge: Cambridge University Press, 2017.

6. **Апарцин А.С.** К исследованию устойчивости решения полиномиального уравнения Вольтерра I рода // Автоматика и телемеханика. — 2011. — № 6. — С. 95–102. — Перевод: Apartsin A.S. Studying the polynomial volterra equation of the first kind for solution stability // Automation and Remote Control. — 2011. — Vol. 72, № 6. — P. 1229–1236.

7. **Апарцин А.С.** Полилинейные интегральные уравнения Вольтерра I рода: элементы теории и численные методы // Известия Иркутского государственного университета. Математика. — 2007. — № 1. — С. 13–41.

8. **Апарцин А.С.** О сходимости численных методов решения билинейного уравнения Вольтерра I рода // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2007. — Т. 47, № 8. — С. 1378–1386. — Перевод: Apartsin A.S. On the convergence of numerical methods for solving a Volterra bilinear equations of the first kind // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2007. — Vol. 47, № 8. — P. 1323–1331.

9. **Апарцин А.С.** Полилинейных уравнениях Вольтерра I рода // Автоматика и телемеханика. — 2004. — № 2. — С. 118–125. — Перевод: Apartsyn A.S. Multilinear Volterra equations of the first kind // Automation and Remote Control. — 2004. — Vol. 65, № 2. — P. 263–269.

10. **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ в нормированных пространствах. — М.: Физматлит, 1959.

11. **Солодуша С.В.** Об одном классе систем билинейных интегральных уравнений Вольтерра I рода второго порядка // Автоматика и телемеханика. — 2009. — № 4. — С. 110–118. — Перевод: Solodusha S.V. A class of systems of bilinear integral Volterra equations of the first kind of the second order // Automation and Remote Control. — 2009. — Vol. 70, № 4. — P. 663–671.

12. **Бельтюков Б.А.** К решению нелинейных интегральных уравнений методом Ньютона // Дифференциальные уравнения. — 1966. — Т. 2, № 8. — С. 1072–1083.

13. **Бойков И.В., Тында А.Н.** Приближенное решение нелинейных интегральных уравнений теории развивающихся систем // Дифференциальные уравнения. — 2003. — Т. 39, № 9. — С. 1214–1223. — Перевод: Boikov I.V., Tynda A.N. Approximate solution of nonlinear integral equations of the theory of developing systems // Differential Equations. — 2003. — Vol. 39, № 9. — P. 1277–1288.

14. **Таиров Э.А.** Нелинейное моделирование динамики теплообмена в канале с однофазным теплоносителем // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. — 1989. — № 1. — С. 150–156.

Поступила в редакцию 2 мая 2017 г.

Литература в транслитерации

1. **Giannakins G.B., Serpedin E.** A bibliography on nonlinear system identification // Signal Processing. — 2001. — Vol. 81. — P. 533–580.
2. **Tsibizova T.Yu.** Metody identifikatsii nelineynyh sistem upravleniya // Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya. — 2015. — № 1 (chast' 1). — S. 109–116. — https://www.science-education.ru/ru/article/view?id=17910.
3. **Volkov N.V**. Funktsional'nye ryady v zadachah dinamiki avtomatizirovannyh sistem. — M.: Yanus-K., 2001.
4. **Volterra V.** A Theory of Functionals, Integral and Integro-Differential Equations. — New York: Dover Publ., 1959.
5. **Brunner H.** Volterra Integral Equations: an Introduction to Theory and Applications. — Cambridge: Cambridge University Press, 2017.
6. **Apartsin A.S.** K issledovaniyu ustoychivosti resheniya polinomial'nogo uravneniya Vol'terra I roda // Avtomatika i telemekhanika. — 2011. — № 6. — S. 95–102. — Perevod: Apartsin A.S. Studying the polynomial volterra equation of the first kind for solution stability // Automation and Remote Control. — 2011. — Vol. 72, № 6. — P. 1229–1236.
7. **Apartsin A.S.** Polilineynye integral'nye uravneniya Vol'terra I roda: elementy teorii i chislennye metody // Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. — 2007. — № 1. — S. 13–41.
8. **Apartsin A.S.** O skhodimosti chislennyh metodov resheniya bilineynogo uravneniya Vol'terra I roda // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2007. — T. 47, № 8. — S. 1378–1386. — Perevod: Apartsin A.S. On the convergence of numerical methods for solving a Volterra bilinear equations of the first kind // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2007. — Vol. 47, № 8. — P. 1323–1331.
9. **Apartsin A.S.** Polilineynyh uravneniyah Vol'terra I roda // Avtomatika i telemekhanika. — 2004. — № 2. — S. 118–125. — Perevod: Apartsyn A.S. Multilinear Volterra equations of the first kind // Automation and Remote Control. — 2004. — Vol. 65, № 2. — P. 263–269.
10. **Kantorovich L.V., Akilov G.P.** Funktsional'nyy analiz v normirovannyh prostranstvah. — M.: Fizmatlit, 1959.
11. **Solodusha S.V.** Ob odnom klasse sistem bilineynyh integral'nyh uravneniy Vol'terra I roda vtorogo poryadka // Avtomatika i telemekhanika. — 2009. — № 4. — S. 110–118. — Perevod: Solodusha S.V. A class of systems of bilinear integral Volterra equations of the first kind of the second order // Automation and Remote Control. — 2009. — Vol. 70, № 4. — P. 663–671.
12. **Bel'tyukov B.A.** K resheniyu nelineynyh integral'nyh uravneniy metodom N'yutona // Differentsial'nye uravneniya. — 1966. — T. 2, № 8. — S. 1072–1083.
13. **Boykov I.V., Tynda A.N.** Priblizhennoe reshenie nelineynyh integral'nyh uravneniy teorii razvivayushchihsya sistem // Differentsial'nye uravneniya. — 2003. — T. 39, № 9. — S. 1214–1223. — Perevod: Boikov I.V., Tynda A.N. Approximate solution of nonlinear integral equations of the theory of developing systems // Differential Equations. — 2003. — Vol. 39, № 9. — P. 1277–1288.
14. **Tairov E.A.** Nelineynoe modelirovanie dinamiki teploobmena v kanale s odnofaznym teplonositelem // Izvestiya AN SSSR. Energetika i transport. — 1989. — № 1. — S. 150–156.