СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ. 2015. Т. 18, № 2

УДК 519.63

Об устойчивости некоторых потоковых схем расщепления*

К.В. Воронин[1,2], Ю.М. Лаевский[1,2]

[1]Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

[2]Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090
E-mails: ol_mer@mail.ru (Воронин К.В.), laev@labchem.sscc.ru (Лаевский Ю.М.)

Воронин К.В., Лаевский Ю.М. Об устойчивости некоторых потоковых схем расщепления // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2015. — Т. 18, № 2. — С. 135–145.

В работе исследуется устойчивость некоторых схем расщепления, аппроксимирующих уравнения для теплового потока, полученные смешанным методом конечных элементов. Для двумерной задачи схема расщепления основана на методе переменных направлений, а для трехмерной задачи — на схеме Дугласа–Ганна.

DOI: 10.15372/SJNM20150203

Ключевые слова: *теплоперенос, смешанная формулировка, метод конечных элементов, схема расщепления.*

Voronin K.V., Laevsky Yu.M. On the stability of some flux splitting schemes // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2015. — Vol. 18, № 2. — P. 135–145.

In this paper, we investigate the stability of some splitting schemes approximating the equations for a heat flux, obtained by a mixed finite element method. For the two-dimensional problem, the splitting scheme is based on the alternating direction method, and for the three-dimensional problem the splitting scheme is based on the Douglas–Gunn scheme.

Keywords: *heat transfer, mixed formulation, finite element method, splitting scheme.*

1. Введение

В работе [1] был предложен способ построения экономичных разностных схем, аппроксимирующих уравнение теплового потока, для задачи теплопереноса в терминах “температура – вектор теплового потока”. Подход основан на использовании устойчивых схем расщепления для сеточной дивергенции с указанием способа конструирования схем для теплового потока. В качестве иллюстрации подхода был рассмотрен ряд двумерных и трехмерных примеров. При этом для схем, обеспечивающих наилучшие результаты по точности, остался открытым вопрос об их устойчивости. При этом, аналогично [2], имеет место устойчивость в подпространстве, поскольку в качестве скалярных “прообразов” берутся абсолютно устойчивые схемы расщепления. То есть рассмотренные потоковые схемы устойчивы в подпространстве, ортогональном ядру оператора сеточной дивергенции. Однако это подпространство не является инвариантным относительно оператора перехода со слоя на слой, и, следовательно, вопрос об устойчивости во всем пространстве

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00019) и Президиума СО РАН.

остается открытым. Собственно, данная работа посвящена исследованию этого вопроса. Подобное исследование для другого класса схем содержится в работе [3]. Отметим, что потоковым схемам для параболических уравнений посвящены статьи [4, 5].

Работа организована следующим образом. Ниже, во введении, приводится смешанная формулировка задачи о переносе тепла и осуществляется ее аппроксимация по смешанному методу конечных элементов с использованием элементов Равьяра–Тома наименьшей степени [6]. Это сделано для полноты изложения, и здесь мы почти дословно следуем работе [1]. Здесь же выписаны потоковые схемы расщепления из работы [1]. Далее во втором пункте получены априорные оценки для "двумерной" схемы, а в третьем пункте — для "трехмерной". Полученные априорные оценки позволяют ответить на вопрос об устойчивости предложенных схем по начальным данным [7]. В четвертом пункте в качестве заключительных замечаний обсуждаются вопросы устойчивости вычисления температуры и устойчивости по правой части.

В открытой ограниченной области $\Omega \subset R^d$, $d = 2, 3$, процесс кондуктивного теплопереноса будем описывать в виде системы уравнений первого порядка — закона сохранения энергии и закона Фурье:

$$c_p\rho\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla\boldsymbol{w} = f, \quad \boldsymbol{w} = -\lambda\nabla T, \tag{1}$$

где T — температура, $\boldsymbol{w}$ — вектор теплового потока, ρ — плотность среды, c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении, λ — коэффициент теплопроводности, f — распределенный в Ω источник (сток) тепла. Для системы (1) поставим начально-краевую задачу с начальными данными:

$$T(0,\boldsymbol{x}) = T_0(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} = (x,y,z) \in \Omega,$$

с краевыми условиями: типа Дирихле на части границы

$$T(t,\boldsymbol{x}) = g_0(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma_0,$$

и Неймана на оставшейся части границы

$$-\lambda\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{n}}(t,\boldsymbol{x}) = g_1(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma_1.$$

Перейдем к обобщенной по пространственным переменным формулировке задачи, лежащей в основе применения смешанного метода конечных элементов. Используя стандартные обозначения для пространств Соболева, получим систему интегральных тождеств:

$$\int\limits_\Omega c_p\rho\frac{\partial T}{\partial t}q\,d\boldsymbol{x} + \int\limits_\Omega (\nabla\boldsymbol{w})q\,d\boldsymbol{x} = \int\limits_\Omega fq\,d\boldsymbol{x}, \tag{2}$$

$$\int\limits_\Omega \frac{1}{\lambda}\,\boldsymbol{w}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x} = \int\limits_\Omega T\,\nabla\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x} - \int\limits_{\Gamma_0} g_0\,\boldsymbol{n}\boldsymbol{v}\,d\gamma, \tag{3}$$

имеющих место при любых функциях $q \in L_2(\Omega)$ и любых вектор-функциях $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_{\mathrm{div}}(\Omega,\Gamma_1)$ ($\boldsymbol{n}\boldsymbol{v} = 0$ на Γ_1). При этом температура T и тепловой поток $\boldsymbol{w}$ ищутся соответственно как функция из $L_2(\Omega)$ и вектор-функция $\boldsymbol{H}_{\mathrm{div}}(\Omega)$ такая, что $\boldsymbol{n}\boldsymbol{w} = g_1$ на Γ_1.

В дальнейшем будем полагать, что Ω — d-мерный прямоугольник. Осуществим пространственную дискретизацию равенств (2), (3). При этом рассмотрим трехмерный случай, так как упрощения при переходе к двумерному случаю очевидны. В Ω зададим, вообще говоря, неравномерную прямоугольную сетку с ячейками $K_{i,j,k} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}]$, так что $\overline{\Omega} = \cup_{i,j,k} K_{i,j,k}$. Для аппроксимации температуры T будет использоваться пространство кусочно-постоянных функций

$$W_h = \left\{ q_h \,|\, q_h(\boldsymbol{x}) = \sum_{i,j,k} q_{i,j,k} \chi_{i,j,k}(\boldsymbol{x}) \right\},$$

где $\chi_{i,j,k}$ — характеристическая функция ячейки $K_{i,j,k}$. Для аппроксимации вектор-функции $\boldsymbol{w}$ используется пространство элементов Равьяра–Тома наименьшей степени (см. [6]):

$$\boldsymbol{V}_h = V_{h,x} \times V_{h,y} \times V_{h,z},$$

где

$$V_{h,x} = \mathrm{span}\{\varphi_{x,i}\}_i, \qquad V_{h,y} = \mathrm{span}\{\varphi_{y,j}\}_j, \qquad V_{h,z} = \mathrm{span}\{\varphi_{z,k}\}_k,$$

$\varphi_{x,i}$, $\varphi_{y,j}$ и $\varphi_{z,k}$ — стандартные функции-крышки аргументов x, y и z соответственно. При этом

$$\boldsymbol{v}_h \,|_{K_{i,j,k}} = \left(\begin{array}{c} a_1 + (a_2 - a_1)(x - x_i)/h_{x,i} \\ b_1 + (b_2 - b_1)(y - y_j)/h_{y,j} \\ c_1 + (c_2 - c_1)(z - z_k)/h_{z,k} \end{array} \right).$$

Отметим, что

$$W_h \subset L_2(\Omega), \qquad \boldsymbol{V}_h \subset \boldsymbol{H}_{\mathrm{div}}(\Omega),$$

и пусть $\boldsymbol{V}_{h,0} = \boldsymbol{H}_{\mathrm{div}}(\Omega, \Gamma_1) \cap \boldsymbol{V}_h$. Тогда согласно (2), (3), полудискретная сеточная задача формулируется следующим образом: найти функцию $T_h \in W_h$ и вектор-функцию $\boldsymbol{w}_h \in \boldsymbol{V}_h$ такую, что $(\boldsymbol{n}\boldsymbol{w}_h)(x_i, y_j, z_k) = g_1(x_i, y_j, z_k)$ при $(x_i, y_j, z_k) \in \Gamma_1$, и для произвольных $q_h \in W_h$ и $\boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{V}_{h,0}$ выполняются равенства:

$$\int\limits_{\Omega} c_p \rho \frac{\partial T_h}{\partial t} q_h \, d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\Omega} (\nabla \boldsymbol{w}_h) q_h \, d\boldsymbol{x} = \int\limits_{\Omega} f q_h \, d\boldsymbol{x}, \tag{4}$$

$$\int\limits_{\Omega} T_h \, \nabla \boldsymbol{v}_h \, d\boldsymbol{x} - \int\limits_{\Omega} \frac{1}{\lambda} \boldsymbol{w}_h \boldsymbol{v}_h \, d\boldsymbol{x} = \int\limits_{\Gamma_0} g_0 \, \boldsymbol{n}\boldsymbol{v}_h \, d\gamma. \tag{5}$$

В векторно-матричной форме система (4), (5) принимает вид:

$$M \frac{dT_h}{dt} + \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{w}_h = f_h, \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{w}_h = \boldsymbol{B} T_h - \boldsymbol{g}_h, \tag{6}$$

где M — диагональная матрица,

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_x & 0 & 0 \\ 0 & A_y & 0 \\ 0 & 0 & A_z \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix},$$

A_x, A_y, A_z — трехдиагональные матрицы. Кроме того, чрезвычайно важным для дальнейшего является то обстоятельство, что матрицы $B_x M^{-1} B_x^\top$, $B_y M^{-1} B_y^\top$, $B_z M^{-1} B_z^\top$ также являются трехдиагональными. Отметим, что матрицы M и $\boldsymbol{A}$ порождают нормировки пространств сеточных функций, эквивалентных пространствам скалярных функций $L_2(\Omega)$ и векторных функций $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$ соответственно. Учитывая этот факт, изменим обозначения с целью обеспечения изометричности пространств сеточных функций стандартным эвклидовым пространствам. А именно, от сеточных функций T и $\boldsymbol{w}$ (здесь и далее индекс h опускаем) переходим к функциям $M^{1/2}T$ и $\boldsymbol{A}^{1/2}\boldsymbol{w}$, сохраняя при этом прежние обозначения. Так же от оператора $\boldsymbol{B}$ перейдем к оператору $\boldsymbol{A}^{-1/2}\boldsymbol{B}M^{-1/2}$. И, наконец, источники f и $\boldsymbol{g}$ преобразуем к $M^{-1/2}f$ и $\boldsymbol{A}^{-1/2}\boldsymbol{g}$ соответственно. В новых обозначениях уравнения (6) примут вид:

$$\frac{dT}{dt} + \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{w} = f, \qquad \boldsymbol{w} = \boldsymbol{B}T - \boldsymbol{g}. \tag{7}$$

Приведем схемы расщепления из работы [1], осуществляющие аппроксимацию по времени системы (7) со вторым порядком точности. В двумерном случае скалярным “прообразом” потоковой схемы является схема переменных направлений, а в трехмерном — схема Дугласа–Ганна [8]. Запишем эти схемы в канонической форме А.А. Самарского (см., например, [7]) с нулевой правой частью (в следующих пунктах будут рассматриваться вопросы устойчивости по начальным данным). Имеем

$$\left(\boldsymbol{E} + \frac{\tau}{2}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^\top + \frac{\tau^2}{4}\boldsymbol{D}\right)\frac{\boldsymbol{w}^{n+1} - \boldsymbol{w}^n}{\tau} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{w}^n = \boldsymbol{0}. \tag{8}$$

Обозначим:

$$\Lambda_x = B_x^\top B_x, \qquad \Lambda_y = B_y^\top B_y, \qquad \Lambda_z = B_z^\top B_z, \qquad C = \Lambda_y + \Lambda_z + \frac{\tau}{2}\Lambda_y\Lambda_z.$$

Тогда в двумерном случае

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} B_x\Lambda_y B_x^\top & B_x\Lambda_y B_y^\top \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_x\Lambda_y \\ 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{B}^\top \tag{9}$$

и в трехмерном случае

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} B_xCB_x^\top & B_xCB_y^\top & B_xCB_z^\top \\ B_y\Lambda_z B_x^\top & B_y\Lambda_z B_y^\top & B_y\Lambda_z B_z^\top \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_xC \\ B_y\Lambda_z \\ 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{B}^\top. \tag{10}$$

Рассмотрим конечномерное гильбертово пространство $\boldsymbol{H}$ со скалярным произведением и нормой

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{\boldsymbol{H}} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{\boldsymbol{E}} + (\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{\boldsymbol{E}}, \qquad \|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{H}} = \sqrt{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})_{\boldsymbol{H}}},$$

где $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{\boldsymbol{E}}$ — стандартное эвклидово скалярное произведение. При этом пространство $\boldsymbol{H}$ является сеточным аналогом пространства $\boldsymbol{H}_{\mathrm{div}}(\Omega, \Gamma_1)$. Кроме того, через H_0 будем обозначать эвклидово пространство, соответствующее скалярным сеточным функциям T_h и q_h (см. (4)), со скалярным произведением $(\cdot\,, \cdot)$ и нормой $\|\cdot\|_2$. Схемы расщепления (8) будем исследовать на устойчивость по начальным данным в пространстве $\boldsymbol{H}$ с начальными данными из подпространства $\widetilde{\boldsymbol{H}} \subset \boldsymbol{H}$ с более сильной нормой.

2. Устойчивость в двумерном случае

Пространство $\boldsymbol{H}$ представим в виде прямой суммы сеточно-соленоидальных и сеточно-потенциальных векторов:

$$\boldsymbol{H} = \mathrm{Ker}\,\boldsymbol{B}^\top \oplus \mathrm{Im}\,\boldsymbol{B}.$$

При этом имеет место представление $\boldsymbol{w}^n = \boldsymbol{w}^{n,0} + \boldsymbol{w}^{n,1}$, где $\boldsymbol{w}^{n,0} \in \operatorname{Ker} \boldsymbol{B}^\top$, $\boldsymbol{w}^{n,1} \in \operatorname{Im} \boldsymbol{B}$, и поскольку $\operatorname{Im} \boldsymbol{B} = (\operatorname{Ker} \boldsymbol{B}^\top)^\perp$ имеет место равенство

$$\|\boldsymbol{w}^n\|^2_{\boldsymbol{E}} = \|\boldsymbol{w}^{n,0}\|^2_{\boldsymbol{E}} + \|\boldsymbol{w}^{n,1}\|^2_{\boldsymbol{E}}. \tag{11}$$

Так как для произвольного n выполняется равенство $\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{w}^{n,0} = 0$, с учетом представления (9) схему (8) можно переписать в виде

$$\frac{\boldsymbol{w}^{n+1,0} - \boldsymbol{w}^{n,0}}{\tau} + \left(\boldsymbol{E} + \frac{\tau}{2}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^\top\right)\frac{\boldsymbol{w}^{n+1,1} - \boldsymbol{w}^{n,1}}{\tau} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{w}^{n,1} + \frac{\tau^2}{4}\boldsymbol{D}\frac{\boldsymbol{w}^{n+1,1} - \boldsymbol{w}^{n,1}}{\tau} = \boldsymbol{0}. \tag{12}$$

При этом первое слагаемое в левой части этого равенства принадлежит подпространству $\operatorname{Ker} \boldsymbol{B}^\top$, а второе и третье слагаемые являются элементами подпространства $\operatorname{Im} \boldsymbol{B}$. Рассмотрим последнее слагаемое. Пусть $\boldsymbol{P} : \boldsymbol{H} \to \operatorname{Ker} \boldsymbol{B}^\top$ — проектор на подпространство $\operatorname{Ker} \boldsymbol{B}^\top$ и $\boldsymbol{I}$ — тождественный в $\boldsymbol{H}$ оператор. При этом $\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{w}^{n,1} \in \operatorname{Ker} \boldsymbol{B}^\top$, а $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})\boldsymbol{D}\boldsymbol{w}^{n,1} \in \operatorname{Im} \boldsymbol{B}$ для произвольного n. Учитывая (11), в схеме (12) можно приравнять нулю отдельно суммы слагаемых из ортогональных подпространств. В результате получим систему:

$$\left(\boldsymbol{E} + \frac{\tau}{2}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^\top + \frac{\tau^2}{4}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})\boldsymbol{D}\right)\frac{\boldsymbol{w}^{n+1,1} - \boldsymbol{w}^{n,1}}{\tau} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{w}^{n,1} = \boldsymbol{0}, \tag{13}$$

$$\frac{\boldsymbol{w}^{n+1,0} - \boldsymbol{w}^{n,0}}{\tau} + \frac{\tau^2}{4}\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\frac{\boldsymbol{w}^{n+1,1} - \boldsymbol{w}^{n,1}}{\tau} = \boldsymbol{0}\,. \tag{14}$$

Просуммируем равенство (14) по $n = 0, \ldots, k-1$ и, учитывая, что $\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{w}^{\alpha,1} = \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{w}^\alpha$, $\alpha = 0,\, k$, получим

$$\boldsymbol{w}^{k,0} = \boldsymbol{w}^{0,0} - \frac{\tau^2}{4}\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\big(\boldsymbol{w}^k - \boldsymbol{w}^0\big). \tag{15}$$

Далее использование представления (9) дает неравенство

$$\|\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{w}^\alpha\|^2_{\boldsymbol{E}} \le \|\boldsymbol{D}\boldsymbol{w}^\alpha\|^2_{\boldsymbol{E}} = \big(B_x\Lambda_y \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{w}^\alpha, B_x\Lambda_y \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{w}^\alpha\big) = \|\Lambda_y \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{w}^\alpha\|^2_{\Lambda_x},$$

где $\alpha = 0,\, k$. Отметим, что $\|\ \|_{\Lambda_x}$ — полунорма. Из этого неравенства и (15) следует

$$\|\boldsymbol{w}^{k,0}\|_{\boldsymbol{E}} \le \|\boldsymbol{w}^{0,0}\|_{\boldsymbol{E}} + \frac{\tau^2}{4}\|\Lambda_y \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{w}^0\|_{\Lambda_x} + \frac{\tau^2}{4}\|\Lambda_y \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{w}^k\|_{\Lambda_x}. \tag{16}$$

Введем скалярные сеточные функции $\xi^k = \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{w}^{k,1} = \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{w}^k$. При этом, как показано в [1], ξ^k является результатом применения схемы переменных направлений

$$\left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda + \frac{\tau^2}{4}\Lambda_x\Lambda_y\right)\frac{\xi^{n+1} - \xi^n}{\tau} + \Lambda\xi^n = 0. \tag{17}$$

Здесь $\Lambda = \Lambda_x + \Lambda_y = \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{B}$. К (17) легко прийти, подействовав оператором сеточной дивергенции $\boldsymbol{B}^\top$ на уравнение (13). Отметим, что оператор Λ симметричен и положительно определен. Последнее есть следствие невырожденности исходного оператора задачи благодаря наличию части границы Γ_0 с условием Дирихле. При этом для произвольного вектора $q \in H_0$ имеет место неравенство

$$(\Lambda q, q) \ge \lambda_{\min}\|q\|^2_2, \tag{18}$$

где $\lambda_{\min} > 0$ — не зависящее от шага сетки h минимальное собственное число оператора Λ.

Отдельно рассмотрим случаи перестановочных и неперестановочных операторов Λ_x и Λ_y. Пусть $\Lambda_x\Lambda_y = \Lambda_y\Lambda_x$. Как хорошо известно (см., например, [7]), в этом случае схема (17) устойчива по начальным данным в различных нормах, и, в частности в эвклидовой норме и в энергетической норме оператора Λ. Напомним, что мы перешли к переменным, для которых эвклидова норма изометрична сеточной норме пространства $L_2(\Omega)$. При этом имеют место неравенства:

$$\|\xi^k\|_2 \le \|\xi^0\|_2, \qquad \|\Lambda_y\xi^k\|_{\Lambda_x} \le \|\Lambda_y\xi^k\|_{\Lambda} \le \|\Lambda_y\xi^0\|_{\Lambda}. \tag{19}$$

Здесь использован тот факт, что в случае перестановочных операторов соответствующие оценки имеют место и для сеточной функции $\Lambda_y\xi^k$. Этот факт становится совершенно очевидным, если формально подействовать оператором Λ_y на уравнение (17). Второе неравенство из (19) можно переписать в виде

$$\|\Lambda_y\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{w}^k\|_{\Lambda_x} \le \|\Lambda_y\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{w}^0\|_{\Lambda}.$$

Подставляя эту оценку в неравенство (16) и учитывая равенство (11), получим

$$\|\boldsymbol{w}^{k,0}\|_{\boldsymbol{E}} \le \|\boldsymbol{w}^0\|_{\boldsymbol{E}} + \frac{\tau^2}{2}\|\Lambda_y\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{w}^0\|_{\Lambda}.$$

Возводя это неравенство в квадрат и используя ε-неравенство, получим

$$\|\boldsymbol{w}^{k,0}\|^2_{\boldsymbol{E}} \le \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\|\boldsymbol{w}^0\|^2_{\boldsymbol{E}} + \frac{\tau^4}{4}(1+\varepsilon)\|\Lambda_y\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{w}^0\|^2_{\Lambda}. \tag{20}$$

Далее первую из оценок (19) можно переписать в виде следующего неравенства:

$$\|\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{w}^k\|^2_2 \le \|\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{w}^0\|^2_2. \tag{21}$$

Осталось оценить норму $\|\boldsymbol{w}^{k,1}\|_{\boldsymbol{E}}$. Рассмотрим произвольный вектор $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Im}\boldsymbol{B}$. Принадлежность образу оператора $\boldsymbol{B}$ означает, что найдется элемент $q \in H_0$ такой, что $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{B}q$. Тогда

$$\|\boldsymbol{v}\|^2_{\boldsymbol{E}} = \|\boldsymbol{B}q\|^2_{\boldsymbol{E}} = (\Lambda q, q).$$

С другой стороны, в соответствии с (18) имеет место неравенство

$$\|\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{v}\|^2_2 = \|\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{B}q\|^2_2 = \|\Lambda q\|^2_2 \ge \lambda_{\min}(\Lambda q, q).$$

Из последних двух неравенств и (21) следует искомая оценка

$$\|\boldsymbol{w}^{k,1}\|^2_{\boldsymbol{E}} \le \frac{1}{\lambda_{\min}}\|\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{w}^{k,1}\|^2_2 \le \frac{1}{\lambda_{\min}}\|\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{w}^0\|^2_2. \tag{22}$$

Сложим неравенства (20)–(22). Учитывая равенство (11) и полагая $\varepsilon = \lambda_{\min}$, получим

$$\|\boldsymbol{w}^k\|^2_{\boldsymbol{H}} \le \left(1+\frac{1}{\lambda_{\min}}\right)\|\boldsymbol{w}^0\|^2_{\boldsymbol{H}} + \frac{\tau^4}{4}(1+\lambda_{\min})\|\Lambda_y\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{w}^0\|^2_{\Lambda}.$$

Из последнего неравенства следует итоговый результат об устойчивости по начальным данным в коммутативном случае. Определим подпространство $\widetilde{\boldsymbol{H}} \subset \boldsymbol{H}$ как множество элементов из $\boldsymbol{H}$ с равномерно по параметрам сетки ограниченной нормой

$$\|\boldsymbol{v}\|_{\widetilde{\boldsymbol{H}}} = \left(\|\boldsymbol{v}\|^2_{\boldsymbol{H}} + \tau^4\|\Lambda_y\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{v}\|^2_{\Lambda}\right)^{1/2}.$$

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть операторы Λ_x и Λ_y перестановочны. Тогда потоковая схема расщепления* (8), (9) *равномерно устойчива в пространстве $\boldsymbol{H}$ по начальным данным из пространства $\widetilde{\boldsymbol{H}}$, т. е. существует не зависящее от параметров τ, h и n число $c_1 > 0$ такое, что $\forall\, \boldsymbol{w}^0 \in \widetilde{\boldsymbol{H}}$ выполняется неравенство*

$$\|\boldsymbol{w}^n\|_{\boldsymbol{H}} \leq c_1 \|\boldsymbol{w}^0\|_{\widetilde{\boldsymbol{H}}}, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Теперь рассмотрим некоммутативный случай: $\Lambda_x\Lambda_y \neq \Lambda_y\Lambda_x$. В этом случае устойчивость по начальным данным в эвклидовой норме метода переменных направлений устанавливается для переменной $\eta^k = (E + 0.5\tau\Lambda_y)\xi^k$, т. е. имеет место неравенство $\|\eta^k\|_2 \leq \|\eta^0\|_2$, которое может быть переписано в виде

$$\|\xi^k\|_2^2 + \tau\|\xi^k\|_{\Lambda_y}^2 + \frac{\tau^2}{4}\|\Lambda_y\xi^k\|_2^2 \leq \left\|\left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda_y\right)\xi^0\right\|_2^2. \tag{23}$$

Во-первых, из (23) немедленно следует аналог неравенства (21):

$$\|\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{w}^k\|_2^2 \leq \left\|\left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda_y\right)\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{w}^0\right\|_2^2. \tag{24}$$

Далее, как хорошо известно, существует не зависящее от параметров сетки число $c > 0$ такое, что $\|\Lambda_x\|_2 \leq c^2h^{-2}$, и, следовательно, согласно (23):

$$\|\Lambda_y\xi^k\|_{\Lambda_x} \leq \frac{c_2}{h}\|\Lambda_y\xi^k\|_2 \leq \frac{2c}{\tau h}\left\|\left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda_y\right)\xi^0\right\|_2.$$

Воспользуемся этим неравенством для получения аналога оценки (20). А именно, воспользуемся этим неравенством для оценки последнего слагаемого в правой части неравенства (16). Учитывая, что

$$\frac{\tau^2}{4}\|\Lambda_y\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{w}^0\|_{\Lambda_x} \leq \frac{c}{2}\,\frac{\tau}{h}\left\|\left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda_y\right)\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{w}^0\right\|_2,$$

приходим к неравенству

$$\|\boldsymbol{w}^{k,0}\|_{\boldsymbol{E}} \leq \|\boldsymbol{w}^{0,0}\|_{\boldsymbol{E}} + c\,\frac{\tau}{h}\left\|\left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda_y\right)\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{w}^0\right\|_2,$$

из которого немедленно следует аналог оценки (20):

$$\|\boldsymbol{w}^{k,0}\|_{\boldsymbol{E}}^2 \leq \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)\|\boldsymbol{w}^0\|_{\boldsymbol{E}}^2 + c^2(1+\varepsilon)\,\frac{\tau^2}{h^2}\left\|\left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda_y\right)\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{w}^0\right\|_2^2. \tag{25}$$

И, наконец, используя неравенство (24), очевидным образом приходим к аналогу оценки (22):

$$\|\boldsymbol{w}^{k,1}\|_{\boldsymbol{E}}^2 \leq \frac{1}{\lambda_{\min}}\|\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{w}^{k,1}\|_2^2 \leq \frac{1}{\lambda_{\min}}\left\|\left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda_y\right)\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{w}^0\right\|_2^2. \tag{26}$$

Аналогично предыдущему сложим неравенства (24)–(26) с учетом формулы (11). В результате получим

$$\|\boldsymbol{w}^k\|^2_{\boldsymbol{H}} \le \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\|\boldsymbol{w}^0\|^2_{\boldsymbol{E}} + \left(1+\frac{1}{\lambda_{\min}}+c^2(1+\varepsilon)\,\frac{\tau^2}{h^2}\right)\left\|\left(E+\frac{\tau}{2}\Lambda_y\right)\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{w}^0\right\|^2_2.$$

Из этой оценки следует итоговый результат об устойчивости по начальным данным в некоммутативном случае. Определим подпространство $\widetilde{\boldsymbol{H}} \subset \boldsymbol{H}$ как множество элементов из $\boldsymbol{H}$ с равномерно по параметрам сетки ограниченной нормой

$$\|\boldsymbol{v}\|_{\widetilde{\boldsymbol{H}}} = \left(\|\boldsymbol{v}\|^2_{\boldsymbol{E}} + \left\|\left(E+\frac{\tau}{2}\Lambda_y\right)\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{v}\right\|^2_2\right)^{1/2}.$$

Справедлива

Теорема 2. *Для схемы* (8), (9) *существует не зависящее от параметров* τ, h *и* n *число* $c_2 > 0$ *такое, что* $\forall\,\boldsymbol{w}^0 \in \widetilde{\boldsymbol{H}}$ *выполняется неравенство*

$$\|\boldsymbol{w}^n\|_{\boldsymbol{H}} \le c_2\left(1+\frac{\tau}{h}\right)\|\boldsymbol{w}^0\|_{\widetilde{\boldsymbol{H}}}, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Замечание 1. Для безразмерных сеточных параметров ограничение $\tau/h \le \text{const}$ не является обременительным, поскольку его нарушение существенно ухудшает аппроксимационные свойства разностной схемы.

3. Устойчивость в трехмерном случае

Исследование устойчивости в трехмерном случае отличается от предыдущего в использовании формулы (10) вместо (9). При этом имеет место

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{w}^\alpha\|^2_{\boldsymbol{E}} \le \|\boldsymbol{D}\boldsymbol{w}^\alpha\|^2_{\boldsymbol{E}} &= (B_xC\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{w}^\alpha, B_xC\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{w}^\alpha) + (B_y\Lambda_z\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{w}^\alpha, B_y\Lambda_z\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{w}^\alpha)\\ &= \|C\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{w}^\alpha\|^2_{\boldsymbol{\Lambda}_x} + \|\Lambda_z\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{w}^\alpha\|^2_{\boldsymbol{\Lambda}_y},\end{aligned}$$

где $\alpha = 0,\, k$. Напомним, что $C = \Lambda_y + \Lambda_z + 0.5\tau\Lambda_y\Lambda_z$. Для оценки полунорм в правой части последнего неравенства воспользуемся свойствами “прообраза” потоковой схемы (8), (10) — скалярной схемы Дугласа–Ганна [8], которая в целых шагах записывается в виде:

$$\left(E+\frac{\tau}{2}\,\Lambda+\frac{\tau^2}{4}\,D\right)\frac{\xi^{n+1}-\xi^n}{\tau} + \Lambda\xi^n = 0\,, \tag{27}$$

где $D = \Lambda_x\Lambda_y + \Lambda_x\Lambda_z + \Lambda_y\Lambda_z + 0.5\tau\Lambda_x\Lambda_y\Lambda_z$. В дальнейшем будем рассматривать случай попарно перестановочных операторов Λ_x, Λ_y и Λ_z. При этом оператор D симметричен и положительно определен, и, следовательно, схема (27) устойчива по начальным данным в различных нормах, причем имеют место неравенства, аналогичные (19):

$$\|\xi^k\|_2 \le \|\xi^0\|_2, \quad \|C\xi^k\|_{\Lambda_x} \le \|C\xi^k\|_\Lambda \le \|C\xi^0\|_\Lambda, \quad \|\Lambda_z\xi^k\|_{\Lambda_y} \le \|\Lambda_z\xi^k\|_\Lambda \le \|\Lambda_z\xi^0\|_\Lambda. \tag{28}$$

Здесь существенно используется попарная перестановочность операторов Λ_x, Λ_y и Λ_z. Из неравенств (18) и (28) следует, что

$$\|\boldsymbol{w}^{k,0}\|_{\boldsymbol{E}} \le \|\boldsymbol{w}^0\|_{\boldsymbol{E}} + \frac{\tau^2}{2}\left(\|C\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{w}^0\|_\Lambda + \|\Lambda_z\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{w}^0\|_\Lambda\right).$$

В свою очередь, из этой оценки с использованием ε-неравенства следует аналог неравенства (20):

$$\left\|\boldsymbol{w}^{k,0}\right\|_{\boldsymbol{E}}^2 \le \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\left\|\boldsymbol{w}^0\right\|_{\boldsymbol{E}}^2 + \frac{\tau^4}{2}(1+\varepsilon)\left(\left\|C\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{w}^0\right\|_\Lambda^2 + \left\|\Lambda_z \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{w}^0\right\|_\Lambda^2\right). \tag{29}$$

Далее из первой оценки (28) и неравенства (18) следуют аналоги неравенств (21) и (22):

$$\left\|\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{w}^k\right\|_2^2 \le \left\|\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{w}^0\right\|_2^2, \tag{30}$$

$$\left\|\boldsymbol{w}^{k,1}\right\|_{\boldsymbol{E}}^2 \le \frac{1}{\lambda_{\min}}\left\|\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{w}^{k,1}\right\|_2^2 \le \frac{1}{\lambda_{\min}}\left\|\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{w}^0\right\|_2^2. \tag{31}$$

Складывая неравенства (29)–(31) с учетом равенства (11) и полагая $\varepsilon = \lambda_{\min}$, приходим к итоговой оценке

$$\left\|\boldsymbol{w}^k\right\|_{\boldsymbol{H}}^2 \le \left(1+\frac{1}{\lambda_{\min}}\right)\left\|\boldsymbol{w}^0\right\|_{\boldsymbol{H}}^2 + \frac{\tau^4}{2}(1+\lambda_{\min})\left(\left\|C\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{w}^0\right\|_\Lambda^2 + \left\|\Lambda_z \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{w}^0\right\|_\Lambda^2\right).$$

Определим подпространство $\widetilde{\boldsymbol{H}} \subset \boldsymbol{H}$ как множество элементов из $\boldsymbol{H}$ с равномерно по параметрам сетки ограниченной нормой

$$\left\|\boldsymbol{v}\right\|_{\widetilde{\boldsymbol{H}}} = \left(\left\|\boldsymbol{v}\right\|_{\boldsymbol{H}}^2 + \tau^4\left(\left\|C\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{v}\right\|_\Lambda^2 + \left\|\Lambda_z \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{v}\right\|_\Lambda^2\right)\right)^{1/2}.$$

Справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть операторы Λ_x, Λ_y и Λ_z попарно перестановочны. Тогда для схемы (8), (10) существует не зависящее от параметров τ, h и n число $c_3 > 0$ такое, что $\forall\, \boldsymbol{w}^0 \in \widetilde{\boldsymbol{H}}$ выполняется неравенство*

$$\left\|\boldsymbol{w}^n\right\|_{\boldsymbol{H}} \le c_3\left\|\boldsymbol{w}^0\right\|_{\widetilde{\boldsymbol{H}}}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Замечание 2. В работе [8] в некоммутативном случае устойчивость установлена при чрезвычайно жестком ограничении $\tau/h^4 \le \mathrm{const}$, которое в исследовании [3] было ослаблено до неравенства $\tau/h^2 \le \mathrm{const}$, являющегося, по сути дела, условием устойчивости явной схемы. Эти соображения сделали нецелесообразным исследование устойчивости рассмотренной в данной работе потоковой схемы расщепления в некоммутативном случае. Отметим, что в многочисленных расчетах, проведенных с нарушением указанных ограничений, неустойчивость не была обнаружена.

4. Заключительные замечания

В заключение обсудим вопросы устойчивости вычисления температуры и устойчивости по правой части.

В соответствии с [1] при $f = 0$ имеем

$$\frac{T^{n+1} - T^n}{\tau} + \boldsymbol{B}^\top \frac{\boldsymbol{w}^{n+1} + \boldsymbol{w}^n}{2} = 0. \tag{32}$$

Суммируя это равенство по $n = 0, 1, \ldots, k-1$, получим

$$T^k = T^0 + \tau \boldsymbol{B}^\top\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{w}^0 + \frac{1}{2}\boldsymbol{w}^k + \sum_{n=1}^{k-1}\boldsymbol{w}^n\right).$$

Для перестановочных операторов используем либо оценку (21) в двумерном случае, либо (30) в трехмерном случае

$$\|T^k\|_2 \le \|T^0\|_2 + k\,\tau\,\|\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{w}^0\|_2.$$

Учитывая, что $k\,\tau \le \text{const}$ и при $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{0}$, согласно (7), $\boldsymbol{w}^0 = \boldsymbol{B}T^0$, получим

$$\|T^k\|_2 \le c\left(\|T^0\|_2 + \|\Lambda T^0\|_2\right).$$

В двумерном некоммутативном случае следует использовать неравенство (24):

$$\|T^k\|_2 \le \|T^0\|_2 + k\,\tau\left\|\left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda_y\right)\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{w}^0\right\|_2 + \frac{\tau}{2}\|\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{w}^0\|_2,$$

откуда аналогично предыдущей оценке следует

$$\|T^k\|_2 \le c\left(\|T^0\|_2 + \left\|\left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda_y\right)\Lambda T^0\right\|_2 + \frac{\tau}{2}\|\Lambda T^0\|_2\right). \tag{33}$$

Теперь рассмотрим вопрос об устойчивости по правой части. Перепишем (32) с ненулевой правой частью

$$\frac{T^{n+1} - T^n}{\tau} + \boldsymbol{B}^\top \frac{\boldsymbol{w}^{n+1} + \boldsymbol{w}^n}{2} = \frac{f^{n+1} + f^n}{2} \equiv r^n. \tag{34}$$

Тогда схема (8) с ненулевой правой частью примет вид:

$$\left(\boldsymbol{E} + \frac{\tau}{2}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^\top + \frac{\tau^2}{4}\boldsymbol{D}\right)\frac{\boldsymbol{w}^{n+1} - \boldsymbol{w}^n}{\tau} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{w}^n = \boldsymbol{F}^n,$$

где, согласно (34), $\boldsymbol{F}^n = \boldsymbol{B}r^n \in \operatorname{Im}\boldsymbol{B}$. Это означает, что при проектировании на ортогональные подпространства меняется только равенство (13):

$$\left(\boldsymbol{E} + \frac{\tau}{2}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^\top + \frac{\tau^2}{4}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})\boldsymbol{D}\right)\frac{\boldsymbol{w}^{n+1,1} - \boldsymbol{w}^{n,1}}{\tau} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{w}^{n,1} = \boldsymbol{B}r^n.$$

Действуя на это равенство сеточной дивергенцией $\boldsymbol{B}^\top$, получим скалярную схему расщепления:

$$\left(E + \frac{\tau}{2}\,\Lambda + \frac{\tau^2}{4}\,D\right)\frac{\xi^{n+1} - \xi^n}{\tau} + \Lambda\xi^n = \Lambda r^n \equiv s^n, \tag{35}$$

где $D = \Lambda_x\Lambda_y$ в двумерном случае и $D = \Lambda_x\Lambda_y + \Lambda_x\Lambda_z + \Lambda_y\Lambda_z + 0.5\tau\Lambda_x\Lambda_y\Lambda_z$ в трехмерном случае. В соответствии с неравенствами (20)–(22), (24)–(26) и (29)–(31) вопрос об устойчивости по правой части сводится к хорошо известным результатам для схемы (35). В этом смысле соответствующий анализ полностью повторяет исследование, представленное в предыдущих пунктах.

Литература

1. **Воронин К.В., Лаевский Ю.М.** Об одном подходе к построению потоковых схем расщепления в смешанном методе конечных элементов // Математическое моделирование. — 2014. — Т. 26, № 12. — С. 33–47. (Voronin K.V., Laevskij YU.M. Ob odnom podkhode k postroeniyu potokovykh skhem rasshchepleniya v smeshannom metode konechnykh elementov // Matematicheskoe modelirovanie. — 2014. — T. 26, № 12. — S. 33–47.)

2. **Гулин А.В.** Устойчивость нелокальных разностных схем в подпространстве // Дифф. уравнения. — 2012. — Т. 48, № 7. — С. 956–965. (Gulin A.V. Ustojchivost' nelokal'nykh raznostnykh skhem v podprostranstve // Diff. uravneniya. — 2012. — T. 48, № 7. — S. 956–965.)
3. **Arbogast T., Huang C.-S., and Yang S.-M.** Improved accuracy for alternating-direction methods for parabolic equations based on regular and mixed finite elements // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. — 2007. — Vol. 17, iss. 8. — P. 1279–1305.
4. **Вабищевич П.Н.** Потоковые схемы расщепления для параболических задач // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2012. — Т. 52, № 8. — С. 1415–1425. (Vabishchevich P.N. Potokovye skhemy rasshchepleniya dlya parabolicheskikh zadach // ZHurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2012. — T. 52, № 8. — S. 1415–1425.)
5. **Воронин К.В., Лаевский Ю.М.** Схемы расщепления в смешанном методе конечных элементов решения задач теплопереноса // Математическое моделирование. — 2012. — Т. 24, № 8. — С. 109–120. (Voronin K.V., Laevskij YU.M. Skhemy rasshchepleniya v smeshannom metode konechnykh elementov resheniya zadach teploperenosa // Matematicheskoe modelirovanie. — 2012. — T. 24, № 8. — S. 109–120.)
6. **Brezzi F., Fortin M.** Mixed and Hybrid Finite Element Methods. — New-York: Springer–Verlag, 1991.
7. **Самарский А.А.** Введение в теорию разностных схем. — М.: Наука, 1971. (Samarskij A.A. Vvedenie v teoriyu raznostnykh skhem. — M.: Nauka, 1971.)
8. **Douglas J., Gunn J.E.** A general formulation of alternating direction methods // Numerische Mathematik. — 1964. — Vol. 6. — P. 428–453.

Поступила в редакцию 30 июля 2014 г.,
в окончательном варианте 13 августа 2014 г.