УДК 532.526

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПРИ НАЛИЧИИ ОТСОСА ИЛИ ВДУВА

Э. М. Любавин, Я. С. Ходорковский

(Комсомольск-на-Амуре)

Получены функции распределения скорости на внешней границе пограничного слоя и функции распределения скорости протекания жидкости вдоль проницаемой поверхности, для которых интегрирование исходных уравнений в частных производных, описывающих движение жидкости в пространственном пограничном слое в ламинарном режиме, может быть сведено к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Приведены результаты численного решения одного из случаев автомодельного пространственного ламинарного пограничного слоя, выполненного на ЭВМ «Минск-22».

1. Задача определения характеристик движения несжимаемой жидкости в пространственном ламинарном пограничном слое на цилиндрической проницаемой поверхности сводится к интегрированию системы уравнений в частных производных

$$u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+u_3\frac{\partial u_1}{\partial x_3}=U_1\frac{\partial U_1}{\partial x_1}+U_2\frac{\partial U_1}{\partial x_2}+\nu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \tag{1.1}$$

$$u_1\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+u_3\frac{\partial u_2}{\partial x_3}=U_1\frac{\partial U_2}{\partial x_1}+U_2\frac{\partial U_2}{\partial x_2}+\nu\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \tag{1.2}$$

$$\partial u_1/\partial x_1+\partial u_2/\partial x_2+\partial u_3/\partial x_3=0 \tag{1.3}$$

при следующих граничных условиях:

$$\begin{gathered} u_1=0,\quad u_2=0,\quad u_3=v_0 \quad \text{при}\quad x_3=0 \\ u_1=U_1(x_1,x_2),\quad u_2=U_2(x_1,x_2)\quad \text{при}\quad x_3=\infty \end{gathered} \tag{1.4}$$

где оси декартовой системы координат x_1 и x_2 расположены на поверхности тела, ось x_3 — перпендикулярно к ней, v_0 — скорость протекания жидкости через проницаемую поверхность ($v_0>0$ при вдуве, $v_0<0$ при отсасывании).

Для отыскания автомодельных решений системы уравнений (1.1) — (1.3) перейдем к безразмерным величинам, введя характерные масштабы длины L и скорости U_0, определяющие число Рейнольдса $\mathrm{Re}=U_0L/\nu$ течения.

Поперечную координату примем в виде

$$\eta=x_3\sqrt{\mathrm{Re}}/(Lf_1(x_1)f_2(x_2)) \tag{1.5}$$

где $f_1(x_1)$, $f_2(x_2)$ — безразмерные масштабные множители, позволяющие совершать преобразование подобия для всех профилей скорости в пограничном слое.

Эти множители подлежат определению наряду с распределениями составляющих $U_1(x_1, x_2)$ и $U_2(x_1, x_2)$ — скорости потенциального потока, которые по аналогии будем рассматривать в виде

$$U_1(x_1,x_2)=V_1(x_1)V_2(x_2),\quad U_2(x_1,x_2)=W_1(x_1)W_2(x_2) \tag{1.6}$$

2. Используя граничные условия (1.4), из уравнения (1.3) получим для составляющей скорости $u_3(x_1,x_2,x_3)$

$$u_3=v_0-\int_0^{x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)dx_3 \tag{2.1}$$

В случае существования автомодельного движения составляющие $u_1(x_1,x_2,x_3)$ и $u_2(x_1,x_2,x_3)$ скорости определяются выражениями

$$u_1=V_1(x_1)V_2(x_2)F_{1\eta}(\eta),\quad u_2=W_1(x_1)W_2(x_2)F_{2\eta}(\eta) \tag{2.2}$$

где $F_1(\eta)$ и $F_2(\eta)$ — неизвестные функции безразмерной поперечной координаты η.

С учетом (1.5) и (2.2) уравнение (2.1) приводится к виду

$$\begin{aligned} u_3=v_0+\frac{U_0}{\sqrt{\mathrm{Re}}\,f_1f_2}\{c_1[\eta F_{1\eta}(\eta)-F_1(\eta)]-a_1F_1(\eta)+g_1[\eta F_{2\eta}(\eta)-\\ -F_2(\eta)]-k_1F_2(\eta)\} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Подставляя соотношения (2.2) и (2.3) в (1.1) и (1.2), приходим к системе уравнений для определения функций $F_1(\eta)$ и $F_2(\eta)$

(2.4)
$$F_{1\eta\eta\eta}+a_1(1-F_{1\eta}^2+F_1F_{1\eta\eta})+c_1F_1F_{1\eta\eta}+b_1(1-F_{2\eta}F_{1\eta})+$$
$$+(g_1+k_1)\,F_2F_{1\eta\eta}+GF_{1\eta\eta}=0$$
$$F_{2\eta\eta\eta}+k_1(1-F_{2\eta}^2+F_2F_{2\eta\eta})+g_1F_2F_{2\eta\eta}+b_2(1-F_{1\eta}F_{2\eta})+$$
$$+(c_1+a_1)\,F_1F_{2\eta\eta}+GF_{2\eta\eta}=0$$

(2.5)
$$a_1=\frac{L}{U_0}f_1^2f_2^2\,V_1'V_2,\qquad c_1=\frac{L}{U_0}f_1f_1'f_2^2V_1V_2,\qquad b_1=\frac{L}{U_0}f_1^2f_2^2\frac{V_2'}{V_2}W_1W_2$$
$$g_1=\frac{L}{U_0}f_1^2f_2f_2'W_1W_2,\qquad k_1=\frac{L}{U_0}f_1^2f_2^2W_1W_2',\qquad b_2=\frac{L}{U_0}f_1^2f_2^2V_1V_2\frac{W_1'}{W_1}$$
$$G=-\frac{v_0}{U_0}\sqrt{\mathrm{Re}}f_1f_2$$

где штрих означает дифференцирование функции по переменной, от которой эта функция зависит.

Граничные условия полученной системы уравнений запишутся в соответствии с (1.4), (2.2) и (2.3)

(2.6)
$$F_1=0,\ F_2=0,\ F_{1\eta}=0\qquad \text{при } \eta=0$$
$$F_{1\eta}=1,\ F_{2\eta}=1\qquad \text{при } \eta=\infty$$

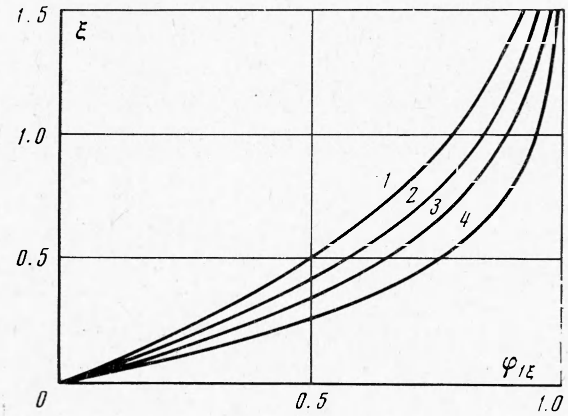
№	V_1/α	V_2/γ	W_1	W_2	f_1/λ	f_2/ζ	$\frac{-v_0}{GU_0}\sqrt{\mathrm{Re}}$
1	x_1^m	1	$\alpha(1-m)x_1^{m-1}$	γx_2	$x_1^{\frac{1-m}{2}}$	1	$x_1^{\frac{m-1}{2}}$
2	x_1	x_2^{n-1}	α	$\frac{\gamma}{1-n}x_2^n$	1	$x_2^{\frac{1-n}{2}}$	$x_1^{\frac{n-1}{2}}$
3	x_1^m	x_2^{-m}	αx_1^{m-1}	γx_2^{1-m}	$x_1^{\frac{1-m}{2}}$	$x_2^{\frac{-m}{2}}$	$x_1^{\frac{m-1}{2}}x_2^{\frac{m}{2}}$
4	x_1	1	β	εx_2	1	1	1
5	x_1^m	1	βx_1^{1-m}	ε	$x_1^{\frac{1-m}{2}}$	1	$x_1^{\frac{m-1}{2}}$
6	1	x_2^n	β	εx_2^{1-n}	1	$x_2^{\frac{n}{2}}$	$x_2^{\frac{-n}{2}}$
7	x_1^m	1	β	ε	$x_1^{\frac{1-m}{2}}$	1	$x_1^{\frac{m-1}{2}}$
8	1	1	β	εx_2^n	1	$x_2^{\frac{1-n}{2}}$	$x_2^{\frac{n-1}{2}}$
9	e^{mx_1}	1	β	ε	$e^{\frac{-mx_1}{2}}$	1	$e^{\frac{mx_1}{2}}$
10	1	1	β	εe^{nx_2}	1	$e^{\frac{-nx_2}{2}}$	$e^{\frac{nx_2}{2}}$
11	e^{mx_1}	1	βe^{-mx_1}	ε	$e^{\frac{-mx_1}{2}}$	1	$e^{\frac{mx_1}{2}}$
12	1	e^{nx_2}	β	εe^{-nx_2}	1	$e^{\frac{nx_2}{2}}$	$e^{\frac{-nx_2}{2}}$
13	e^{mx_1}	1	$-\alpha m e^{mx_1}$	γx_2	$e^{\frac{-mx_1}{2}}$	1	$e^{\frac{mx_1}{2}}$
14	x_1	e^{nx_2}	α	$-\frac{\gamma}{n}e^{nx_2}$	1	$e^{\frac{-nx_2}{2}}$	$e^{\frac{nx_2}{2}}$

3. Решая систему дифференциальных уравнений (2.4) относительно неизвестных f_i, V_i и W_i, можно определить, при каких законах изменения скорости внешнего потенциального потока имеют место автомодельные движения жидкости в пограничном слое.

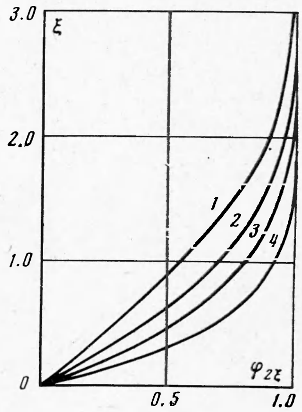
Полученные распределения скоростей V_i и W_i должны, как отмечено в [1], удовлетворять уравнениям движения невязкой жидкости, что для данной задачи дает условие

(3.1)
$$2V_1V_1'V_2V_2' + V_1V_2'W_1W_2' - V_1'V_2W_1'W_2 + V_1W_2\,(V_2''W_1 - V_2W_1'') - 2W_1W_1'W_2W_2' = 0$$

Все законы распределения скорости внешнего потока и скорости отсоса (вдува), удовлетворяющие условиям (3.1) и (2.5), представлены в таблице.



Фиг. 1



Фиг. 2

4. В качестве примера рассмотрим частный случай пространственного пограничного слоя на проницаемой поверхности, для которого имеет место автомодельное решение

(4.1)
$$V_1 = \alpha x_1^m,\quad V_2 = \gamma,\quad W_1 = \alpha\,(1-m)\,x_1^{m-1},\quad W_2 = \gamma x_2$$
$$f_1 = \lambda x_1^{(1-m)/2},\qquad f_2 = \zeta,\quad \frac{v_0}{U_0}\sqrt{\mathrm{Re}} = -\,G x_1^{(m-1)/2}$$

где α, γ, λ, ζ и G — постоянные числа.

Случай непроницаемой поверхности ($v_0 = 0$) рассмотрен в [1].

Определив коэффициенты уравнений (2.4) согласно выражениям (2.5), сделав замены переменных

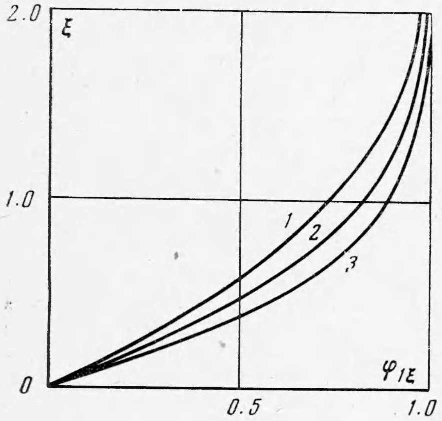
$$F_1(\eta) = \sqrt{\frac{2m}{a_1(m+1)}}\,\varphi_1(\xi),\qquad F_2(\eta) = \sqrt{\frac{2m}{a_1(m+1)}}\,\varphi_2(\xi)$$
$$\eta = \sqrt{\frac{2m}{a_1(m+1)}}\,\xi$$

получим систему уравнений

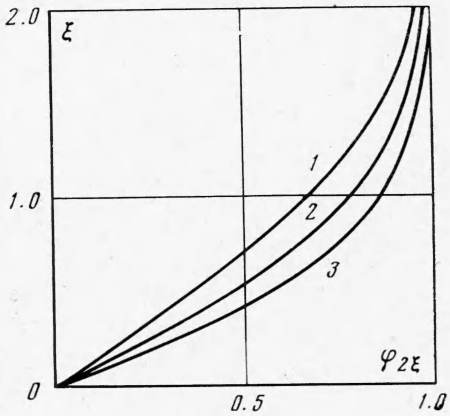
(4.2)
$$\varphi_{1\xi\xi\xi} + \varphi_1\varphi_{2\xi\xi} + \frac{2(1-m)}{1+m}\varphi_2\varphi_{1\xi\xi} + \frac{2m}{m+1}(1-\varphi_{1\xi}^2) + Q\varphi_{2\xi\xi} = 0$$
$$\varphi_{2\xi\xi\xi} + \varphi_1\varphi_{2\xi\xi} - \frac{2(1-m)}{1+m}(\varphi_{2\xi}^2 - \varphi_2\varphi_{2\xi\xi} - \varphi_{1\xi}\varphi_{2\xi}) + Q\varphi_{2\xi\xi} = 0$$
$$Q = G\sqrt{\frac{2m}{a_1(m+1)}}$$

Система уравнений (4.2) была численно проинтегрирована на ЭВМ «Минск-22» при граничных условиях

(4.3)
$$\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = 0,\ \varphi_{1\xi} = 0,\ \varphi_{2\xi} = 0 \quad \text{при } \xi = 0$$
$$\varphi_{1\xi} = 1,\ \varphi_{2\xi} = 1 \quad \text{при } \xi = \infty$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Результаты расчета распределения скорости в пограничном слое для нескольких параметров задачи представлены на фиг. 1—4. Величина параметра m составляла 1 для кривых фиг. 1 и 2, $^1/_3$ — для кривых фиг. 3 и 4. Кривым *1*, *2*, *3*, *4* соответствуют $Q = 0$, 0.5, 1.0, 2.

Поступила 11 VI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Карякин Ю. Е.* Автомодельные задачи пространственного пограничного слоя. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1965, № 248.

УДК 532.582.32

О ДВИЖЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ДВУМЯ ВРАЩАЮЩИМИСЯ СФЕРАМИ

Ю. Г. Овсеенко

(Новочеркасск)

В нелинейной постановке рассматривается установившееся неосесимметричное движение несжимаемой вязкой жидкости между двумя концентрическими сферами, вращающимися с постоянными угловыми скоростями вокруг разных осей, проходящих через их общий центр. Определяется силовое воздействие жидкости на внутреннюю сферу, которое сводится к моменту сопротивления вращению.

Пусть радиусы сфер r_1 и r_2 ($r_1 < r_2$), их угловые скорости ω_1 и ω_2, угол между осями вращения β. В сферической системе координат r, φ, θ, расположенной так, что ось вращения внутренней сферы лежит на прямой $\theta = 0$, а внешней — в плоскости $\varphi = 0$, граничные условия задачи таковы ($v_i = \omega_i r_i$, $i = 1,2$):

$$
\begin{aligned}
&v_\varphi = v_1 \sin\theta, \quad v_r = 0, \quad v_\theta = 0 && \text{при } r = r_1 \\
&v_\varphi = v_2 (\cos\beta \sin\theta - \sin\beta \cos\theta \cos\varphi), \quad v_r = 0, \quad v_\theta = -v_2 \sin\beta \sin\varphi && \text{при } r = r_2
\end{aligned} \tag{1}
$$

Решение уравнений Навье — Стокса и неразрывности [1] при предельных условиях (1), записанных в безразмерных величинах, разыскивается в виде рядов по степеням числа Рейнольдса R, которые сходятся при малых значениях этого числа [2,3] и коэффициенты которых могут быть найдены методом разделения переменных и вы-